

Peter V. O'Neil

MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA INGENIERÍA

Séptima edición

MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA INGENIERÍA

7a. edición

Matemáticas avanzadas para ingeniería

7a. Edición

PETER V. O'NEIL

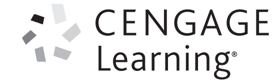
University of Alabama at Birmingham

TRADUCCIÓN

Juan Carlos Rodríguez Aguilar
Traductor profesional
con la colaboración de Fernando Álvarez King

REVISIÓN TÉCNICA

Dr. Edmundo Palacios Pastrana
Universidad Iberoamericana



Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur



Matemáticas avanzadas para ingeniería
Séptima edición
Peter V. O'Neil

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:
Fernando Valenzuela Migoya

Director Editorial, de Producción y de Plataformas Digitales para Latinoamérica:
Ricardo H. Rodríguez

Editora de Adquisiciones para Latinoamérica:
Claudia C. Garay Castro

Gerente de Manufactura para Latinoamérica:
Raúl D. Zendejas Espejel

Gerente Editorial en Español para Latinoamérica:
Pilar Hernández Santamarina

Gerente de Proyectos Especiales:
Luciana Rabuffetti

Coordinador de Manufactura:
Rafael Pérez González

Editor:
Omegar Martínez

Diseño de portada:
Sergio Bergocce

Imagen de portada:
Ver crédito en forros

Composición tipográfica:
Juan Carlos Rodríguez Aguilar

Traducido del libro: *Advanced Engineering Mathematics*, Seventh Edition
Publicado en inglés por Cengage Learning
© 2012 ISBN: 978-1-111-42741-2

Datos para catalogación bibliográfica:
O'Neil, Peter V.
Matemáticas avanzadas para ingeniería, séptima edición
ISBN: 978-607-522-025-3

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México

1 2 3 4 5 6 7 17 16 15 14

Contenido

Prefacio

Esta séptima edición de ***Matemáticas avanzadas para ingeniería*** difiere de la edición anterior en varias medidas. Si bien respeta el órden ya clásico del volumen, con el ánimo de respetar el orden de planes de estudio que numerosos cursos han construido en torno a sus páginas, esta edición hace un mayor énfasis en la construcción y análisis de modelos, en la utilización de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, de transformadas integrales y de funciones especiales. Además incluye tres capítulos completamente nuevos sobre matrices, proyecciones ortogonales y mínimos cuadrados, aproximaciones de vectores y funciones, factorización LU de matrices y transformaciones lineales y representaciones de matrices. Estos nuevos capítulos, al mismo tiempo que ayudan a que el volumen siga siendo uno de los más consultados y referenciados en la materia, hacen que el libro cubra en un solo volumen todos los materiales que el estudiante de ingeniería puede llegar a necesitar en un curso de matemáticas avanzadas.

Material de apoyo para el profesor

Este libro cuenta con una serie de recursos para el profesor, los cuales están disponibles únicamente en inglés y sólo se proporcionan a los docentes que lo adopten como texto en sus cursos. Para mayor información, póngase en contacto con el área de servicio al cliente en las siguientes direcciones de correo electrónico:

Cengage Learning México y Centroamérica	clientes.mexicoca@cengage.com
Cengage Learning Caribe	clientes.caribe@cengage.com
Cengage Learning Cono Sur	clientes.conosur@cengage.com
Cengage Learning Pacto Andino	clientes.pactoandino@cengage.com

Al igual que los recursos impresos adicionales, las direcciones de los sitios web señaladas a lo largo del texto, y que se incluyen a modo de referencia, no son administradas por Cengage Learning Latinoamerica, por lo que ésta no es responsable de los cambios y actualizaciones de las mismas.

Reconocimientos

El autor quiere agradecer a las siguientes personas que ayudaron en la preparación de estra edición:

Charles S. Campbell, Universidad del Sur de California
David Y. Gao, Virginia Tech
Donald Hartig, California Polytechnic State University, San Luis Obispo
Konstantin A. Lurie, Worcester Polytechnic Institute
Allen Plotkin, Universidad Estatal de San Diego
Mehdi Pourazady, Universidad de Toledo
Carl Prather, Virginia Tech
Scott Short, Northern Illinois University

PETER V. O'NEIL

LA SERIE DE FOURIER DE UNA
FUNCION CONVERGENCIA DE UN
SERIE DE FOURIER SERIE DE FO
EN COSENOS EN SENOS INTEGRA

CAPÍTULO 1

La transformada de Laplace

1.1 Definición y propiedades básicas

En matemáticas se llama transformada al mecanismo que convierte un problema de un tipo a otro, este último presumiblemente más fácil de resolver. El modo de hacerlo es resolver primero el problema transformado, para después transformar de regreso y así obtener la solución del problema original. En el caso de la transformada de Laplace los problemas con valores iniciales a menudo son convertidos en problemas algebraicos, un proceso que se puede ilustrar del modo siguiente:

problema con valores iniciales

↓

problema algebraico

↓

solución del problema algebraico

↓

solución del problema con valores iniciales

DEFINICIÓN 1.1 ***Transformada de Laplace***

La transformada de Laplace $\mathfrak{L}[f]$ de f es una función definida por

$$\mathfrak{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt,$$

para todo s tal que esta integral converja.

La transformada de Laplace convierte una función f en una nueva función llamada $\mathfrak{L}[f]$. Con frecuencia t es la variable independiente para f y s para la variable independiente de $\mathfrak{L}[f]$. Así, $f(t)$ es la función f evaluada en t, y $\mathfrak{L}[f](s)$ es la función $\mathfrak{L}[f]$ evaluada en s.

Es necesario convenir en usar letras minúsculas para la función de la transformada de Laplace, y su letra mayúscula para la función que resulta. En esta notación,

$$F = \mathfrak{L}[f], \quad G = \mathfrak{L}[g], \quad H = \mathfrak{L}[h],$$

y así sucesivamente.

EJEMPLO 1.1

Sea $f(t) = e^{at}$, siendo a cualquier número real. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}[f](s) &= F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\, dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\, dt \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_0^k e^{(a-s)t}\, dt = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \right]_0^k \\
&= \lim_{k\to\infty} \left[\frac{1}{a-s} e^{(a-s)k} - \frac{1}{a-s} \right] \\
&= -\frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}
\end{aligned}$$

siempre que $a - s < 0$, o $s > a$. La transformada de Laplace de $f(t) = e^{at}$ es $F(s) = 1/(s - a)$, definida por $s >$ a. ■

EJEMPLO 1.2

Sea $g(t) = \text{sen}(t)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}[g](s) &= G(s) = \int_0^\infty e^{-st} \,\text{sen}(t)\, dt \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_0^k e^{-st} \,\text{sen}(t)\, dt \\
&= \lim_{k\to\infty} \left[-\frac{e^{-ks}\cos k + se^{-ks}\,\text{sen}\, k - 1}{s^2+1} \right] = \frac{1}{s^2+1}.
\end{aligned}$$

$G(s)$ está definida para todo $s > 0$. ■

Una transformada de Laplace pocas veces es calculada directamente refiriéndose a la definición e integrando. En lugar de ello se utilizan las tablas de transformadas de Laplace de las funciones de uso frecuente (como la tabla 1.1) o algún software. También existen métodos útiles para encontrar la transformada de Laplace de funciones desplazadas o trasladadas, funciones escalonadas, pulsos y otras funciones que aparecen en las aplicaciones.

La transformada de Laplace es lineal, saca factores constantes, y la transformada de una suma de funciones es la suma de las transformadas de esas funciones.

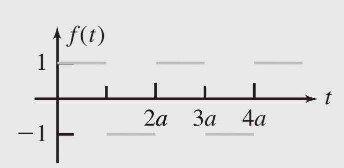
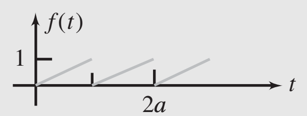
TABLA 1.1 ***Tabla de transformadas de Laplace de funciones***

	$f(t)$	$F(s) = \mathfrak{L}[f(t)](s)$
1.	1	$\frac{1}{s}$
2.	t	$\frac{1}{s^2}$
3.	$t^n (n = 1, 2, 3, \cdots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4.	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
5.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
6.	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
7.	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
8.	$\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
9.	$\frac{1}{a-b}(ae^{at} - be^{bt})$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$
10.	$\frac{(c-b)e^{at} + (a-c)e^{bt} + (b-a)e^{ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$
11.	$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
12.	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
13.	$1 - \cos(at)$	$\frac{a^2}{s(s^2+a^2)}$
14.	$at - \text{sen}(at)$	$\frac{a^3}{s^2(s^2+a^2)}$
15.	$\text{sen}(at) - at\cos(at)$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$
16.	$\text{sen}(at) + at\cos(at)$	$\frac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$
17.	$t\,\text{sen}(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
18.	$t\cos(at)$	$\frac{(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
19.	$\frac{\cos(at) - \cos(bt)}{(b-a)(b+a)}$	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
20.	$e^{at}\,\text{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
21.	$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
22.	$\text{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
23.	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
24.	$\text{sen}(at)\cosh(at) - \cos(at)\text{senh}(at)$	$\frac{4a^3}{s^4+4a^4}$
25.	$\text{sen}(at)\text{senh}(at)$	$\frac{2a^2 s}{s^4+4a^4}$

TABLA 1.1 *(continuación)*

	$f(t)$	$F(s) = \mathfrak{L}[f(t)](s)$
26.	$\operatorname{senh}(at) - \operatorname{sen}(at)$	$\dfrac{2a^3}{s^4 - a^4}$
27.	$\cosh(at) - \cos(at)$	$\dfrac{2a^2 s}{s^4 - a^4}$
28.	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{at}(1 + 2at)$	$\dfrac{s}{(s-a)^{3/2}}$
29.	$J_0(at)$	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}$
30.	$J_n(at)$	$\dfrac{1}{a^n} \dfrac{\left(\sqrt{s^2 + a^2} - s\right)^n}{\sqrt{s^2 + a^2}}$
31.	$J_0(2\sqrt{at})$	$\dfrac{1}{s} e^{-a/s}$
32.	$\dfrac{1}{t} \operatorname{sen}(at)$	$\tan^{-1}\left(\dfrac{a}{s}\right)$
33.	$\dfrac{2}{t}[1 - \cos(at)]$	$\ln\left(\dfrac{s^2 + a^2}{s^2}\right)$
34.	$\dfrac{2}{t}[1 - \cosh(at)]$	$\ln\left(\dfrac{s^2 - a^2}{s^2}\right)$
35.	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} - a e^{a^2 t} \operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{s} + a}$
36.	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} + a e^{a^2 t} \operatorname{erf}\left(\dfrac{a}{\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{\sqrt{s}}{s - a^2}$
37.	$e^{a^2 t} \operatorname{erf}(a\sqrt{t})$	$\dfrac{a}{\sqrt{s}(s - a^2)}$
38.	$e^{a^2 t} \operatorname{erfc}(a\sqrt{t})$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + a)}$
39.	$\operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{1}{s} e^{-a\sqrt{s}}$
40.	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t}$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}} e^{-a\sqrt{s}}$
41.	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi(t + a)}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}} e^{as} \operatorname{erfc}(\sqrt{as})$
42.	$\dfrac{1}{\pi t} \operatorname{sen}(2a\sqrt{t})$	$\operatorname{erf}\left(\dfrac{a}{\sqrt{s}}\right)$
43.	$f\left(\dfrac{t}{a}\right)$	$aF(as)$
44.	$e^{bt/a} f\left(\dfrac{t}{a}\right)$	$aF(as - b)$
45.	$\delta_\epsilon(t)$	$\dfrac{e^{-\epsilon s}(1 - e^{-\epsilon s})}{\epsilon s}$
46.	$\delta(t - a)$	e^{-as}
47.	$L_n(t)$ (Polinomio de Laguerre)	$\dfrac{1}{s}\left(\dfrac{s-1}{s}\right)^n$

TABLA 1.1 ***(continuación)***

	$f(t)$	$F(s) = \mathfrak{L}[f(t)](s)$
48.	$\dfrac{n!}{(2n)!\sqrt{\pi t}} H_{2n}(t)$ (Polinomio de Hermite)	$\dfrac{(1-s)^n}{s^{n+1/2}}$
49.	$\dfrac{-n!}{\sqrt{\pi}(2n+1)!} H_{2n+1}(t)$ (Polinomio de Hermite)	$\dfrac{(1-s)^n}{s^{n+3/2}}$
50.	onda triangular	$\dfrac{1}{as^2}\left[\dfrac{1-e^{-as}}{1+e^{-as}}\right]\left(= \dfrac{1}{as^2}\tanh\left(\dfrac{as}{2}\right)\right)$
51.	onda cuadrada 	$\dfrac{1}{s}\tanh\left(\dfrac{as}{2}\right)$
52.	onda serrucho 	$\dfrac{1}{as^2} - \dfrac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}$

Fórmulas operacionales

$f(t)$	$F(s)$
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0+)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\dfrac{1}{s} F(s)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$\dfrac{1}{t} f(t)$	$\int_s^\infty F(\sigma)\,d\sigma$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$f(t-a)H(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$f(t+\tau) = f(t)$ (periódica)	$\dfrac{1}{1-e^{-\tau s}} \int_0^\tau e^{-st} f(t)\,dt$

TEOREMA 1.1 *Linealidad de la transformada de Laplace*

Suponga que $\mathfrak{L}[f](s)$ y $\mathfrak{L}[g](s)$ están definidas para $s > a$, y α y β son números reales. Entonces

$$\mathfrak{L}[\alpha f + \beta g](s) = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

para $s > a$.

Prueba Por hipótesis, $\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$ y $\int_0^\infty e^{-st}g(t)\,dt$ convergen para $s > a$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[\alpha f + \beta g](s) &= \int_0^\infty e^{-st}(\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt = \alpha F(s) + \beta G(s)\end{aligned}$$

para $s > a$. ■

Esta conclusión se extiende para cualquier suma finita:

$$\mathfrak{L}[\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n](s) = \alpha_1 F_1(s) + \cdots + \alpha_n F_n(s),$$

para todo s tal que cada $F_j(s)$ esté definida.

No toda función tiene una transformada de Laplace, ya que $\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$ puede no converger para cualquier valor real de s. Considere condiciones sobre f para asegurar que f tiene una transformada de Laplace.

Una condición necesaria obvia es que $\int_0^k e^{-st}f(t)\,dt$ tiene que estar definida para todo $k > 0$, ya que $\mathfrak{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$. Para que esto suceda, es suficiente que f sea continua a pedazos en $[0, k]$ para todo número k positivo. Definiremos este concepto en términos generales ya que también aparece en otros contextos.

DEFINICIÓN 1.2 ***Continuidad a pedazos***

f es continua a pedazos en $[a, b]$ si hay puntos

$$a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < b$$

tal que f es continua en cada intervalo abierto (a, t_1), (t_{j-1}, t_j) y (tn, b) y todos los límites laterales siguientes son finitos:

$$\lim_{t\to a+} f(t),\ \lim_{t\to t_j-} f(t),\ \lim_{t\to t_j+} f(t) \quad \text{y} \quad \lim_{t\to b-} f(t).$$

Esto significa que f es continua en $[a, b]$ excepto quizá en un número finito de puntos, en cada uno de los cuales f tiene límites laterales finitos en todo el intervalo. Las únicas discontinuidades que una función continua a pedazos f puede tener en $[a, b]$ son un número finito de saltos de discontinuidades (huecos de anchura finita en la gráfica). La figura 1.1 muestra discontinuidades de saltos típicos en una gráfica.

Por ejemplo, sea

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{para } 0 \le t \le 2 \\ 2 & \text{en } t = 2 \\ 1 & \text{para } 2 < t \le 3 \\ -1 & \text{para } 3 < t \le 4 \end{cases}$$

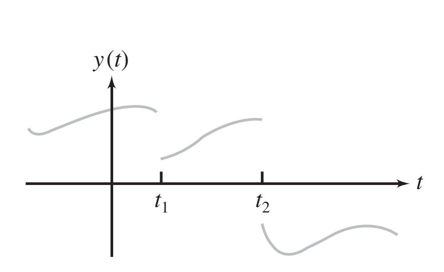


FIGURA 1.1 *Una función con discontinuidades de saltos en t_1 y t_2.*

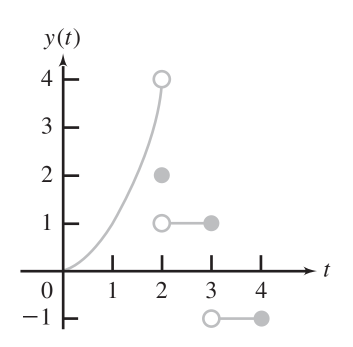


FIGURA 1.2

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ 2 & \text{si } t = 2 \\ 1 & \text{si } 2 < t \leq 3 \\ -1 & \text{si } 3 < t \leq 4 \end{cases}$$

Entonces f es continua [0, 4] excepto en 2 y 3, donde f tiene un salto de discontinuidad. En la figura 1.2 se muestra la gráfica de esta función.

Si f es continua a pedazos en $[0, k]$, entonces $e^{-st}f(t)$ también lo es y $\int_0^k e^{-st}f(t)\,dt$ existe.

La existencia de $\int_0^k e^{-st}f(t)\,dt$ para todo k positivo no asegura la existencia de $\lim_{k\to\infty}\int_0^k e^{-st}f(t)\,dt$. Por ejemplo, $f(t) = e^{t^2}$ es continua en todo intervalo $[0, k]$, pero $\int_0^\infty e^{-st}e^{t2}\,dt$ diverge para todo valor real de s. Así, para la convergencia de $\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$, es necesaria otra condición sobre f. La forma de esta integral sugiere una condición que es suficiente. Si, para algunos números M y b, se tiene $|f(t)| \leq Me^{bt}$, entonces

$$e^{-st}|f(t)| \leq Me^{(b-s)t} \quad \text{para } s \geq b.$$

No obstante

$$\int_0^\infty Me^{(b-s)t}\,dt$$

converge (a $M/(s-b)$) si $b - s < 0$, o $s > b$. Entonces, por comparación, $\int_0^\infty e^{-st}|f(t)|\,dt$ también converge si $s > b$, de donde $\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$ converge si $s > b$.

El resultado de este razonamiento sugiere que existe un conjunto de condiciones que son indicadoras de que una función dada tiene una transformada de Laplace.

TEOREMA 1.2 *Existencia de $\mathfrak{L}[f]$*

Suponga que f es continua a pedazos en $[0, k]$ para todo k positivo. También que existen números M y b, tales que $|f(t)| \leq Me^{bt}$ para $t \geq 0$. Entonces $\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$ converge para $s > b$, por tanto $\mathfrak{L}[f](s)$ está definida para $s > b$. ■

Muchas funciones satisfacen estas condiciones, incluyendo las polinomiales, sen(at), cos(at), e^{at} y otras.

Las condiciones del teorema son suficientes, pero no necesarias para que una función tenga una transformada de Laplace. Por ejemplo, considere $f(t) = t^{-1/2}$ para $t > 0$. Esta función no es continua a

pedazos en ningún $[0, k]$ ya que $\lim_{t\to 0+} t^{-1/2} = \infty$. Sin embargo, $\int_0^k e^{-st}\, t^{-1/2}\, dt$ existe para todo k y $s > 0$ positivos. Más aún,

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[f](s) &= \int_0^\infty e^{-st} t^{-1/2}\, dt = 2\int_0^\infty e^{-sx^2}\, dx \qquad (\text{sea } x = t^{1/2})\\ &= \frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-z^2}\, dz \qquad (\text{sea } z = x\sqrt{s})\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{s}},\end{aligned}$$

en donde usó el hecho (encontrado en algunas tablas de integración usuales) que $\int_0^\infty e^{-z^2}\, dz = \pi/2$.

Ahora revise el diagrama de flujo que aparece al inicio de este capítulo. El primer paso en la resolución de este tipo de problemas es tomar la transformada de Laplace de una función. El final del diagrama de flujo sugiere que en algún punto debe poder regresar por otro camino. Después de encontrar alguna función $G(s)$, necesita obtener una función g cuya transformada de Laplace sea G. Este es el proceso de tomar una transformada de Laplace inversa.

DEFINICIÓN 1.3 *Función G*

Dada una función G, una función g tal que $\mathfrak{L}[g] = G$ se llama una transformada inversa de Laplace de G.

En este caso

$$g = \mathfrak{L}^{-1}[G].$$

Por ejemplo,

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right](t) = e^{at}$$

y

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right](t) = \operatorname{sen}(t).$$

El proceso inverso es ambiguo ya que, dada G, puede haber muchas funciones cuya transformada de Laplace sea G. Por ejemplo, sabe que la transformada de Laplace de e^{-t} es $1/(s+1)$ para $s > -1$. Sin embargo, si cambia $f(t)$ sólo en un punto, haciendo

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{para } t \neq 3\\ 0 & \text{para } t = 3,\end{cases}$$

entonces $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-st}\, h(t)\, dt$ y h tienen la misma transformada de Laplace que f. En tal caso, ¿cuál es la transformada inversa de Laplace de $1/(s + 1)$?

Una respuesta la da el teorema de Lerch, el cual establece que dos funciones continuas que tienen la misma transformada de Laplace deben ser iguales.

TEOREMA 1.3 *Lerch*

Sean f y g continuas en $[0, \infty)$ y suponga que $\mathfrak{L}[f] = \mathfrak{L}[g]$. Entonces $f = g$. ■

En vista de esto, resuelva parcialmente la ambigüedad al tomar la transformada inversa de Laplace aceptando que, dada $F(s)$, busca una f continua cuya transformada de Laplace sea F. Si no hay una función transformada inversa continua, entonces debe tomar ciertos acuerdos para decidir a cuál de las candidatas posibles llamará $\mathfrak{L}^{-1}[F]$. Ya en aplicaciones el contexto hace frecuentemente esta elección obvia.

Gracias a su linealidad, la inversa de la transformada de Laplace es también lineal.

TEOREMA 1.4

Si $\mathfrak{L}^{-1}[F] = f$ y $\mathfrak{L}^{-1}[G] = g$, y α y β son números reales, entonces

$$\mathfrak{L}^{-1}[\alpha F + \beta G] = \alpha f + \beta g. \quad \blacksquare$$

Si usa la tabla 1.1 para encontrar $\mathfrak{L}[f]$, busque f en la columna izquierda y lea $\mathfrak{L}[f]$ de la columna derecha. Para $\mathfrak{L}^{-1}[F]$, busque F en la columna derecha y relaciónela con f en la izquierda.

SECCIÓN 1.1 *PROBLEMAS*

En cada uno de los problemas del 1 al 10, use la linealidad de la transformada de Laplace y la tabla 1.1 para encontrar la transformada de Laplace de la función.

1. $2\,\text{senh}(t) - 4$

2. $\cos(t) - \text{sen}(t)$

3. $4t\,\text{sen}(2t)$

4. $t^2 - 3t + 5$

5. $t - \cos(5t)$

6. $2t^2e^{-3t} - 4t + 1$

7. $(t + 4)^2$

8. $3e^{-t} + \text{sen}(6t)$

9. $t^3 - 3t + \cos(4t)$

10. $-3\cos(2t) + 5\,\text{sen}(4t)$

En cada uno de los problemas del 11 al 18, use la linealidad de la transformada inversa de Laplace y la tabla 1.1 para encontrar la transformada inversa de Laplace (continua) de la función.

11. $\dfrac{-2}{s + 16}$

12. $\dfrac{4s}{s^2 - 14}$

13. $\dfrac{2s - 5}{s^2 + 16}$

14. $\dfrac{3s + 17}{s^2 - 7}$

15. $\dfrac{3}{s - 7} + \dfrac{1}{s^2}$

16. $\dfrac{5}{(s + 7)^2}$

17. $\dfrac{1}{s - 4} - \dfrac{6}{(s - 4)^2}$

18. $\dfrac{2}{s^4}\left[\dfrac{1}{s} - \dfrac{3}{s^2} + \dfrac{4}{s^6}\right]$

Suponga que $f(t)$ está definida para todo $t \geq 0$. Entonces f es *periódica* con periodo T si $f(t + T) = f(t)$ para todo $t \geq 0$. Por ejemplo, $\text{sen}(t)$ tiene periodo 2π. En los problemas 19–22, suponga que f tiene periodo T.

19. Pruebe que

$$\mathfrak{L}[f](s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t)\, dt.$$

20. Pruebe que

$$\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t)\, dt = e^{-nsT} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt.$$

21. Para los problems 19 y 20, pruebe que

$$\mathfrak{L}[f](s) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nsT}\right] \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt.$$

22. Use la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1/(1 - r)$ para $|r| < 1$, junto al resultado del problema 21, para probar que

$$\mathfrak{L}[f](s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt.$$

En cada uno de los problemas del 23 al 30, se da una función periódica, algunas veces con una gráfica. Encuentre $\mathfrak{L}[f]$, usando el resultado del problema 22.

23. f tiene periodo 6 y $f(t) = \begin{cases} 5 & \text{para } 0 < t \leq 3 \\ 0 & \text{para } 3 < t \leq 6 \end{cases}$

24. $f(t) = |E \operatorname{sen}(\omega t)|$, con E y ω constantes positivas. (Aquí f tiene periodo π/ω).

25. f tiene la gráfica de la figura 1.3.

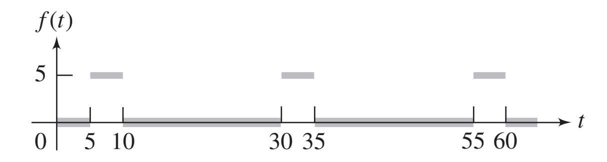


FIGURA 1.3

26. f tiene la gráfica de la figura 1.4.

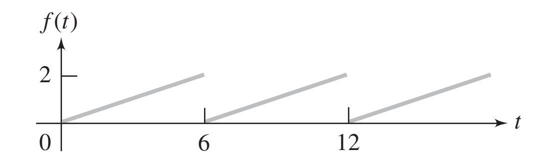


FIGURA 1.4

27. f tiene la gráfica de la figura 1.5.

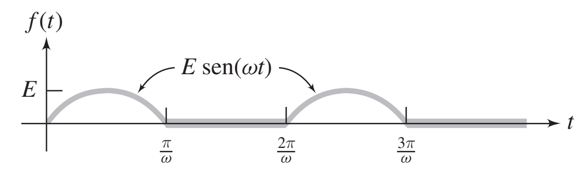


FIGURA 1.5

28. f tiene la gráfica de la figura 1.6.

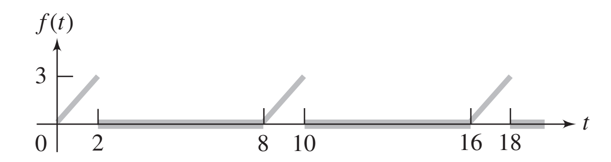


FIGURA 1.6

29. f tiene la gráfica de la figura 1.7.

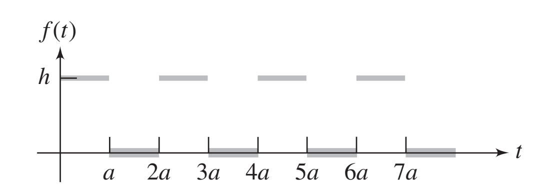


FIGURA 1.7

30. f tiene la gráfica de la figura 1.8.

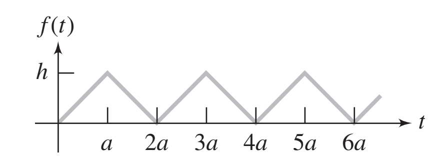


FIGURA 1.8

1.2 Solución de problemas con valores iniciales usando la transformada de Laplace

La transformada de Laplace es una herramienta poderosa para resolver cierto tipo de problemas con valores iniciales. La técnica depende del siguiente hecho acerca de la transformada de Laplace de una derivada.

TEOREMA 1.5 *Transformada de Laplace de una derivada*

Sea f continua en $[0, \infty)$ y suponga que f' es continua a pedazos en $[0, k]$ para todo k positivo. Suponga también que $\lim_{k\to\infty} e^{-sk} f(k) = 0$ si $s > 0$. Entonces

$$\mathfrak{L}[f'](s) = s\mathrm{F}(s) - f(0). \tag{1.1}$$

Esto es, la transformada de Laplace de la derivada de f es s veces la transformada de Laplace de f en s, menos f en cero.

Prueba Empiece con una integración por partes, con $u = e^{-st}$ y $dv = f'(t)\,dt$. Para $k > 0$,

$$\int_0^k e^{-st} f'(t)\,dt = [e^{-st} f(t)]_0^k - \int_0^k -se^{-st} f(t)\,dt$$
$$= e^{-sk} f(k) - f(0) + s\int_0^k e^{-st} f(t)\,dt.$$

Tome el límite conforme $k \to \infty$ y use la suposición que $e^{-sk}f(k) \to 0$ para obtener

$$\mathfrak{L}[f'](s) = \lim_{k\to\infty}\left[e^{-sk} f(k) - f(0) + s\int_0^k e^{-st} f(t)\,dt\right]$$
$$= -f(0) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = -f(0) + sF(s). \blacksquare$$

Si f tiene una discontinuidad de salto en 0 (por ejemplo, como ocurre, si f es una fuerza electromotriz que es encendida en el tiempo cero), entonces esta conclusión puede corregirse para obtener

$$\mathfrak{L}[f'](s) = sF(s) - f(0+),$$

donde

$$f(0+) = \lim_{t\to 0+} f(t)$$

es el límite lateral por la derecha de $f(t)$ en 0.

Para problemas que involucran ecuaciones diferenciales de segundo orden o mayor, necesita una versión del teorema para derivadas superiores. $f^{(j)}$ denota la j-ésima derivada de f.
Denotamos $f^{(0)} = f$.

TEOREMA 1.6 *Transformada de Laplace de una derivada superior*

Suponga que $f, f', \cdots, f^{n-1}$ son continuas en [0, 1), y $f^{(n)}$ es continua a pedazos en $[0, k]$ para todo k positivo. También que $\lim_{k\to\infty} e^{-sk}f^{(j)}(k) = 0$ para $s > 0$ y para $j = 1, 2, \ldots, n - 1$. Entonces

$$\mathfrak{L}[f^{(n)}](s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \blacksquare \quad (1.2)$$

El caso de la segunda derivada ($n = 2$) aparece con tanta frecuencia que conviene ponerla por separado. Bajo las condiciones del teorema,

$$\mathfrak{L}[f''](s) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0). \quad (1.3)$$

A continuación se usará la transformada de Laplace para resolver ciertos problemas con valores iniciales.

EJEMPLO 1.3

Resolver $y' - 4y = 1$; $y(0) = 1$.

Ya sabe cómo resolver este problema, pero use la transformada de Laplace para ilustrar la técnica. Escriba $\mathfrak{L}[y](s) = Y(s)$. Tomamos la transformada de Laplace de la ecuación diferencial, usando la linealidad de $\mathfrak{L}$ y la ecuación (1.1), con $y(t)$ en lugar de $f(t)$:

$$\mathfrak{L}[y' - 4y](s) = \mathfrak{L}[y'](s) - 4\mathfrak{L}[y](s)$$
$$= (sY(s) - y(0)) - 4Y(s) = \mathfrak{L}[1](s) = \frac{1}{s}.$$

Aquí use el hecho (de la tabla 1.1) que $\mathfrak{L}[1](s) = 1/s$ para $s > 0$. Como $y(0) = 1$, ahora tiene

$$(s-4)Y(s) = y(0) + \frac{1}{s} = 1 + \frac{1}{s}.$$

En este punto debe resolver un problema algebraico para $Y(s)$, obteniendo

$$Y(s) = \frac{1}{(s-4)} + \frac{1}{s(s-4)}$$

(observe el diagrama de flujo del inicio de este capítulo). La solución del problema con valores iniciales es

$$y = \mathfrak{L}^{-1}[Y] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-4}\right] + \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s-4)}\right].$$

De la entrada 5 de la tabla 1.1, con $a = 4$,

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-4}\right] = e^{4t}.$$

Y de la entrada 8, con $a = 0$ y $b = 4$,

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s-4)}\right] = \frac{1}{-4}(e^{0t} - e^{4t}) = \frac{1}{4}(e^{4t} - 1).$$

La solución del problema con valores iniciales es

$$y(t) = e^{4t} + \frac{1}{4}(e^{4t} - 1)$$
$$= \frac{5}{4}e^{4t} - \frac{1}{4}. \quad ■$$

Una característica de esta técnica de la transformada de Laplace es que el valor inicial dado en el problema es incorporado naturalmente en el proceso de solución a través de la ecuación (1.1). No necesita encontrar la solución general primero, y después resolver para que la constante satisfaga la condición inicial.

EJEMPLO 1.4

Resolver

$$y'' + 4y' + 3y = e^t; \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$$

Aplique $\mathfrak{L}$ a la ecuación diferencial para obtener $\mathfrak{L}[y''] + 4\mathfrak{L}[y'] + 3\mathfrak{L}[y] = \mathfrak{L}[e^t]$.

Ahora

$$\mathfrak{L}[y''] = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - 2$$

y

$$\mathfrak{L}[y'] = sY - y(0) = sY.$$

Por tanto,

$$s^2Y - 2 + 4sY + 3Y = \frac{1}{s-1}.$$

Resuelva para Y obteniendo

$$Y(s) = \frac{2s - 1}{(s-1)(s^2+4s+3)}.$$

La solución es la transformada inversa de Laplace de esta función. Algunos software pueden encontrar esta inversa. Si quiere usar la tabla 1.1, debe aplicar una descomposición en fracciones parciales para escribir $Y(s)$ como una suma de funciones más simples. Escriba

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2s-1}{(s-1)(s^2+4s+3)} \\ &= \frac{2s-1}{(s-1)(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3}. \end{aligned}$$

Esta ecuación se satisface sólo si, para todo s,

$$A(s+1)(s+3) + B(s-1)(s+3) + C(s-1)(s+1) = 2s - 1.$$

Ahora elija valores de s para simplificar la tarea de determinar A, B y C. Sea $s = 1$ para obtener $8A = 1$, así $A = \frac{1}{8}$. Sea $s = -1$ para obtener $-4B = -3$, de manera que $B = \frac{3}{4}$. Elija $s = -3$ para obtener $8C = -7$, así $C = -\frac{7}{8}$. Entonces

$$Y(s) = \frac{1}{8}\frac{1}{s-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{s+1} - \frac{7}{8}\frac{1}{s+3}.$$

Ahora lea de la tabla 1.1 que

$$y(t) = \frac{1}{8}e^{t} + \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{7}{8}e^{-3t}. \ \blacksquare$$

De nuevo, la transformada de Laplace ha convertido un problema con valores iniciales en un problema algebraico, incorporando las condiciones iniciales en las manipulaciones algebraicas. Una vez que obtiene $Y(s)$, el problema se convierte en uno de invertir la función transformada para obtener $y(t)$.

La ecuación (1.1) tiene una consecuencia interesante que será útil más adelante. Bajo las condiciones del teorema, sabe que

$$\mathfrak{L}[f'] = s\mathfrak{L}[f] - f(0).$$

Suponga que $f(t)$ está definida por una integral, a saber

$$f(t) = \int_0^t g(\tau)\,d\tau.$$

Ahora $f(0) = 0$ y, suponiendo la continuidad de g, $f'(t) = g(t)$. Entonces

$$\mathfrak{L}[f'] = \mathfrak{L}[g] = s\mathfrak{L}\left[\int_0^t g(\tau)\,d\tau\right].$$

Esto significa que

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t g(\tau)\,d\tau\right] = \frac{1}{s}\mathfrak{L}[g], \tag{1.4}$$

permite aplicar la transformada de Laplace de una función definida por una integral. Use esta ecuación más adelante al trabajar con circuitos que tienen fuerzas electromotrices discontinuas.

En las siguientes tres secciones analizaremos algunas herramientas necesarias para aplicar la transformada de Laplace a problemas en los que los métodos anteriores con frecuencia son menos útiles.

SECCIÓN 1.2 PROBLEMAS

En cada uno de los problemas del 1 al 10, use la transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales.

1. $y' + 4y = 1;\ y(0) = -3$

2. $y' - 9y = t\ ;\ y(0) = 5$

3. $y' + 4y = \cos(t);\ y(0) = 0$

4. $y' + 2y = e^{-t}\ ;\ y(0) = 1$

5. $y' - 2y = 1 - t\ ;\ y(0) = 4$

6. $y'' + y = 1;\ y(0) = 6,\ y'(0) = 0$

7. $y'' - 4y' + 4y = \cos(t);\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$

8. $y'' + 9y = t^2;\ y(0) = y'(0) = 0$

9. $y'' + 16y = 1 + t\ ;\ y(0) = -2,\ y'(0) = 1$

10. $y'' - 5y' + 6y = e^{-t}\ ;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

11. Suponga que f satisface las hipótesis del teorema 1.5, excepto para la discontinuidad de salto en 0. Pruebe que $\mathfrak{L}[f'](s) = sF(s) - f(0+)$, donde $f(0+) = \text{lím}_{t\to 0+} f(t)$.

12. Suponga que f satisface las hipótesis del teorema 1.5 para la discontinuidad de salto en un número c positivo. Pruebe que

$$\mathfrak{L}[f'](s) = sF(s) - f(0) - e^{-cs}\,[f(c+) - f(c-)],$$

donde $f(c-) = \text{lím}_{t\to c-} f(t)$.

13. Suponga que g es continua a pedazos en $[0, k]$ para todo $k > 0$, y que existen números, M, b y a tales que $|g(t)| \leq Me^{bt}$ para $t \geq a$. Sea $\mathfrak{L}[G] = g$. Pruebe que

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t g(w)\,dw\right](s) = \frac{1}{s}G(s) - \frac{1}{s}\int_0^a g(w)\,dw.$$

1.3 Teoremas de corrimiento y la función de Heaviside

Una motivación para desarrollar la transformada de Laplace es extender la clase de problemas que puede resolver. Los métodos de los capítulos 1 y 2 apuntan principalmente a problemas que conciernen a funciones continuas. Pero muchos modelos matemáticos tratan con procesos discontinuos (por ejemplo, prender y apagar un circuito). Para esto la transformada de Laplace es efectiva, pero debe aprender más acerca de la representación de funciones discontinuas y aplicarles tanto la transformada de Laplace como su inversa.

1.3.1 El primer teorema de corrimiento

La transformada de Laplace de $e^{at} f(t)$ es sólo la transformada de Laplace de $f(t)$, recorrida a unidades a la derecha. Esto se logra reemplazando s por $s - a$ en $F(s)$ para obtener $F(s - a)$.

TEOREMA 1.7 Primer teorema de corrimiento, o corrimiento en la variable s

Sea $\mathfrak{L}[f](s) = F(s)$ para $s > b \geq 0$. Sea a cualquier número. Entonces

$$\mathfrak{L}[e^{at} f(t)](s) = F(s - a) \qquad \text{para } s > a + b$$

Prueba Calcule

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[e^{at} f(t)](s) &= \int_0^\infty e^{at} e^{-st} f(s)\,ds \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\,dt = F(s - a)\end{aligned}$$

para $s - a > b$, o $s > a + b$. ■

EJEMPLO 1.5

Sabe por la tabla 1.1 que $\mathfrak{L}[\cos(bt)] = s/(s^2 + b^2)$. Para la transformada de Laplace de $e^{at}\cos(bt)$, reemplace s con $s - a$ para obtener

$$\mathfrak{L}[e^{at}\cos(bt)](s) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}. \blacksquare$$

EJEMPLO 1.6

Como $\mathfrak{L}[t^3] = 6/s^4$, entonces

$$\mathfrak{L}[t^3 e^{7t}](s) = \frac{6}{(s-7)^4}. \blacksquare$$

El primer teorema de corrimiento sugiere una fórmula correspondiente para la transformada inversa de Laplace: si $\mathfrak{L}[f] = F$, entonces

$$\mathfrak{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{at} f(t).$$

Algunas veces es conveniente escribir este resultado como

$$\mathfrak{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{at}\mathfrak{L}^{-1}[F(s)]. \tag{1.5}$$

EJEMPLO 1.7

Suponga que quiere calcular

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{4}{s^2 + 4s + 20}\right].$$

Manipule el cociente a una forma en la cual sea aplicable al teorema del corrimiento. Complete el cuadrado en el denominador para escribir

$$\frac{4}{s^2 + 4s + 20} = \frac{4}{(s+2)^2 + 16}.$$

Piense en el cociente de la derecha como una función de $s + 2$:

$$F(s+2) = \frac{4}{(s+2)^2 + 16}.$$

Esto significa que debe elegir

$$F(s) = \frac{4}{s^2 + 16}.$$

Ahora el teorema del corrimiento dice que

$$\mathfrak{L}[e^{-2t}\operatorname{sen}(4t)] = F(s - (-2)) = F(s+2) = \frac{4}{(s+2)^2 + 16}$$

y por tanto,

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{4}{(s+2)^2+16}\right] = e^{-2t}\,\mathrm{sen}(4t). \blacksquare$$

EJEMPLO 1.8

Calcule

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{3s-1}{s^2-6s+2}\right].$$

De nuevo, empiece con una manipulación para escribir la expresión como una función de $s - a$ para algún a:

$$\begin{aligned}\frac{3s-1}{s^2-6s+2} &= \frac{3s-1}{(s-3)^2-7}\\ &= \frac{3(s-3)}{(s-3)^2-7} + \frac{8}{(s-3)^2-7} = G(s-3) + K(s-3)\end{aligned}$$

si elige

$$G(s) = \frac{3s}{s^2-7} \quad \text{y} \quad K(s) = \frac{8}{s^2-7}.$$

Ahora aplique la ecuación (1.5) (en la segunda línea) para escribir

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{3s-1}{s^2-6s+2}\right] &= \mathfrak{L}^{-1}[G(s-3)] + \mathfrak{L}^{-1}[K(s-3)]\\ &= e^{3t}\mathfrak{L}^{-1}[G(s)] + e^{3t}\mathfrak{L}^{-1}[K(s)]\\ &= e^{3t}\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{3s}{s^2-7}\right] + e^{3t}\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{8}{s^2-7}\right]\\ &= 3e^{3t}\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2-7}\right] + 8e^{3t}\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-7}\right]\\ &= 3e^{3t}\cosh\left(\sqrt{7}t\right) + \frac{8}{\sqrt{7}}e^{3t}\,\mathrm{senh}\left(\sqrt{7}t\right). \blacksquare\end{aligned}$$

1.3.2 La función de Heaviside y los pulsos

Ahora conviene establecer los cimientos para resolver ciertos problemas con valores iniciales que tengan funciones de fuerza con discontinuidades. Para hacer esto utilice la función de Heaviside.

Recuerde que f tiene una discontinuidad de salto en a si $\lim_{t\to a-} f(t)$ y $\lim_{t\to a-} f(t)$ ambos existen y son finitos, pero distintos. La figura 1.9 muestra un salto de discontinuidad típico. La magnitud del salto de discontinuidad es el "ancho del hueco" en la gráfica en a. Este ancho es

$$\left|\lim_{t\to a-} f(t) - \lim_{t\to a-} f(t)\right|.$$

Las funciones con saltos de discontinuidades pueden tratarse eficientemente utilizando la función escalonada unitaria o función de Heaviside.

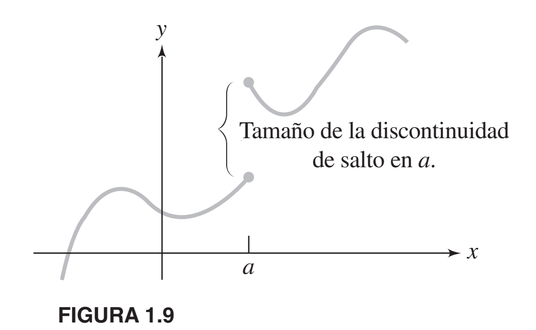


FIGURA 1.9

DEFINICIÓN 1.4 Función de Heaviside

La función de Heaviside H está definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Oliver Heaviside (1850-1925) fue un ingeniero electricista inglés que hizo mucho por introducir la transformada de Laplace en la práctica ingenieril. En la figura 1.10 aparece la gráfica de H. Tiene un salto de discontinuidad de magnitud 1 en 0.

Es posible pensar en la función de Heaviside como una función de interruptor, "prendida" cuando $t \geq 0$, donde $H(t) = 1$, y "apagada" cuando $t < 0$, donde $H(t) = 0$. Es útil para lograr una variedad de efectos, incluyendo funciones de interruptor prendido y apagado en tiempos distintos, funciones de corrimientos a lo largo del eje y funciones combinadas con pulsos.

Para empezar este programa, si a es cualquier número, entonces $H(t - a)$ es la función de Heaviside corrida a unidades a la derecha, como se muestra en la figura 1.11, como

$$H(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a. \end{cases}$$

$H(t - a)$ modela una señal plana de magnitud 1, prendida hasta el tiempo $t = a$ y después apagada.

Puede usar $H(t - a)$ para lograr el efecto de mantener una función g apagada hasta el tiempo $t = a$, en dicho tiempo prenderla. En particular,

$$H(t-a)g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ g(t) & \text{si } t \geq a. \end{cases}$$

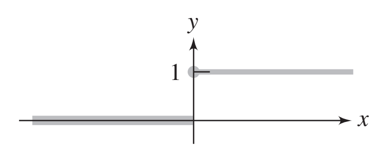


FIGURA 1.10 *La función de Heaviside $H(t)$.*

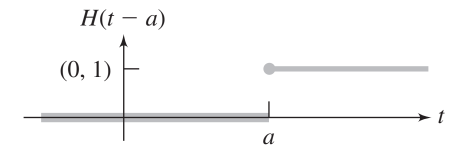


FIGURA 1.11 *Una función Heaviside recorrida.*

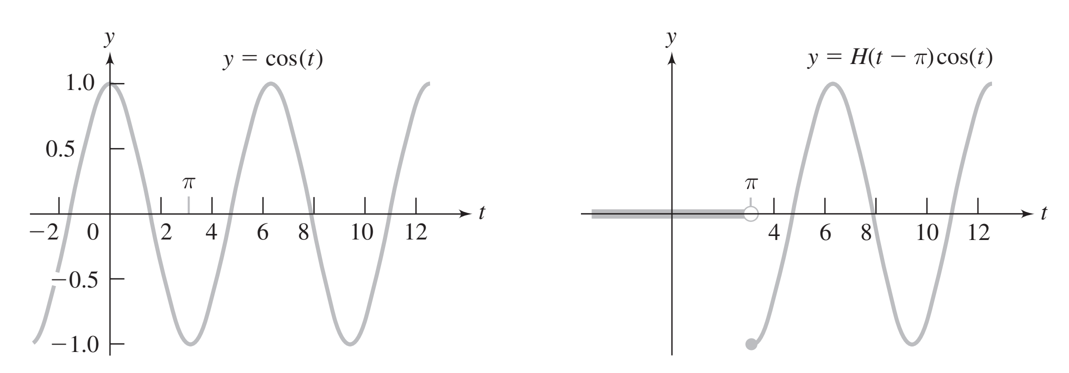


FIGURA 1.12 *Comparación de* $y = \cos(t)$ *y* $y = H(t - \pi)\cos(t)$.

es cero hasta el tiempo $t = a$, en dicho tiempo es encendida $g(t)$. Para ver un caso específico, sea $g(t) = \cos(t)$ para todo t. Entonces

$$H(t-\pi)g(t) = H(t-\pi)\cos(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \pi \\ \cos(t) & \text{si } t \geq \pi. \end{cases}$$

En la figura 1.12 se muestran las gráficas de $\cos(t)$ y $H(t - \pi)\cos(t)$ por comparación.

La función de Heaviside también sirve para describir un pulso.

DEFINICIÓN 1.5 Pulso

Un pulso es una función de la forma

$$k[H(t-a) - H(t-b)],$$

en donde $a < b$ y k es un número real distinto de cero.

En la figura 1.13 aparece la gráfica de esta función pulso. Tiene valor 0 si $t < a$ (donde $H(t - a) = H(t - b) = 0$), valor 1 si $a \leq t < b$ (donde $H(t - a) = 1$ y $H(t - b) = 0$) y valor 0 si $t \geq b$ (donde $H(t - a) = H(t - b) = 1$).

Multiplicar una función g por este pulso tiene el efecto de dejar apagada $g(t)$ hasta el tiempo a. Entonces la función es encendida hasta el tiempo b, cuando es nuevamente apagada. Por ejemplo, sea $g(t) = e^t$. Entonces

$$[H(t-1) - H(t-2)]e^t = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ e^t & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{si } t \geq 2. \end{cases}$$

La figura 1.14 muestra la gráfica de esta función.

Ahora considere las funciones de corrimiento de la forma $H(t - a)g(t - a)$. Si $t < a$, la $g(t - a)H(t - a) = 0$ ya que $H(t - a) = 0$. Si $t \geq a$, entonces $H(t - a) = 1$ y $H(t - a)g(t - a) = g(t - a)$, que es $g(t)$ con un corrimiento de a unidades a la derecha. Así la gráfica de $H(t - a)g(t - a)$ es cero a lo largo del eje horizontal hasta $t = a$, y para $t \geq a$ es la gráfica de $g(t)$ para $t \geq 0$, con un corrimiento de a unidades a la derecha empezando en a en lugar de 0.

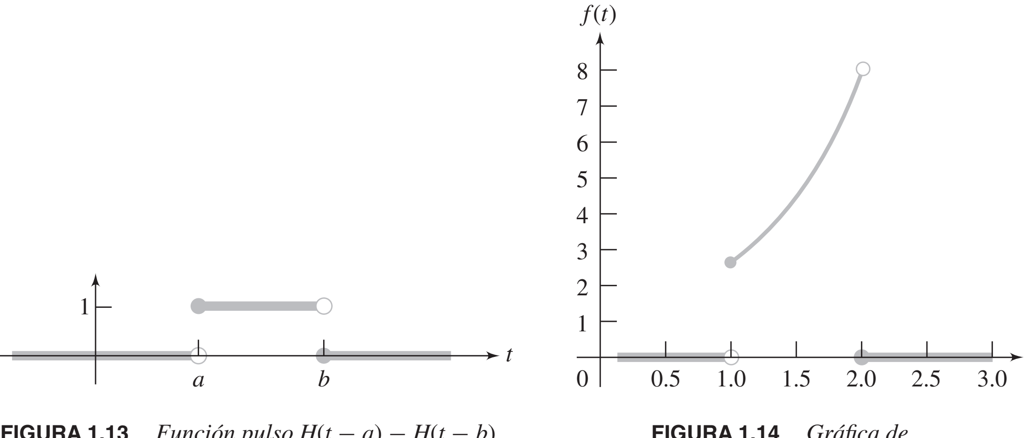


FIGURA 1.13 *Función pulso $H(t - a) - H(t - b)$.*

FIGURA 1.14 *Gráfica de* $f(t) = [H(t - 1) - H(t - 2)]e^t$.

EJEMPLO 1.9

Considere $g(t) = t^2$ y $a = 2$. La figura 1.15 compara la gráfica de g con la gráfica de $H(t-2)\,g(t - 2)$. La gráfica de g es una parábola familiar. La gráfica de $H(t - 2)g(t - 2)$ es cero hasta el tiempo 2, entonces tiene la forma de la gráfica de t^2 para $t \geq 0$, pero con un corrimiento de 2 unidades a la derecha empezando en $t = 2$. ■

Es importante entender la diferencia entre $g(t)$, $H(t - a)g(t)$ y $H(t - a)g(t - a)$. La figura 1.16 muestra las gráficas de estas tres funciones para $g(t) = t^2$ y $a = 3$.

1.3.3 El segundo teorema de corrimiento

Algunas veces a $H(t - a)g(t - a)$ se le conoce como una función de corrimiento, a pesar de ser más que eso ya que su gráfica también es cero para $t < a$. El segundo teorema de corrimiento trata con la transformada de Laplace de tal función.

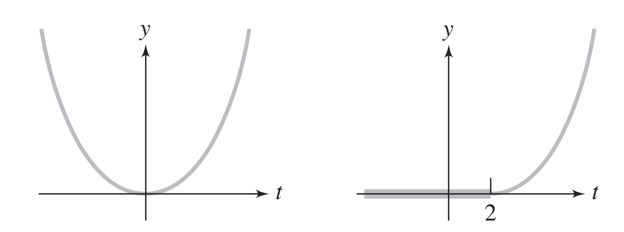


FIGURA 1.15 *Comparación de* $y = t^2$ *y* $y = (t - 2)^2H(t - 2)$.

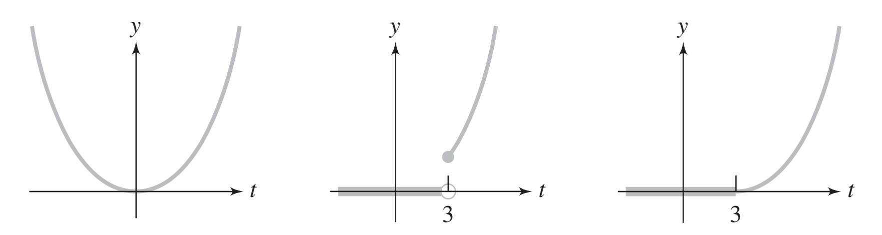


FIGURA 1.16 *Comparación de* $y = t^2$, $y = t^2H(t - 3)$, *y* $y = (t - 3)^2H(t - 3)$.

TEOREMA 1.8 *Segundo teorema de corrimiento o corrimiento en la variable t*

Sea $\mathfrak{L}[f](s) = F(s)$ para $s > b$. Entonces

$$\mathfrak{L}[H(t-a)f(t-a)](s) = e^{-as}F(s)$$

para $s > b$.

Esto es, obtiene la transformada de Laplace de $H(t-a)f(t-a)$ multiplicando la transformada de Laplace de $f(t)$ por e^{-as}.

Prueba Proceda a partir de la definición,

$$\mathfrak{L}[H(t-a)f(t-a)](s) = \int_0^\infty e^{-st}H(t-a)f(t-a)\,dt$$
$$= \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\,dt$$

ya que $H(t-a) = 0$ para $t < a$, y $H(t-a) = 1$ para $t \geq a$. Ahora $w = t - a$ en la última integral para obtener

$$\mathfrak{L}[H(t-a)f(t-a)](s) = \int_0^\infty e^{-s(a+w)}f(w)\,dw$$
$$= e^{-as}\int_0^\infty e^{-sw}f(w)\,dw = e^{-as}F(s). \blacksquare$$

EJEMPLO 1.10

Suponga que quiere la transformada de Laplace de $H(t-a)$. Escriba esto como $H(t-a)f(t-a)$, con $f(t) = 1$ para todo t. Como $F(s) = 1/s$ (de la tabla 1.1 o por cálculo directo a partir de la definición), entonces

$$\mathfrak{L}[H(t-a)](s) = e^{-as}\mathfrak{L}[1](s) = \frac{1}{s}e^{-as}. \blacksquare$$

EJEMPLO 1.11

Calcule $\mathfrak{L}[g]$, donde $g(t) = 0$ para $0 \leq t < 2$ y $g(t) = t^2 + 1$ para $t \geq 2$.

Como $g(t)$ es cero hasta el tiempo $t = 2$, y entonces es $t^2 + 1$, debe escribir $g(t) = H(t-2)(t^2+1)$.

Para aplicar el segundo teorema de corrimiento, debe escribir $g(t)$ como una función, o quizá una suma de funciones, de la forma $f(t-2)H(t-2)$. Es necesario escribir $t^2 + 1$ como una suma de funciones de $t - 2$. Una manera de hacer esto es desarrollar $t^2 + 1$ en una serie de Taylor alrededor de 2. En este caso logra el mismo resultado por manipulación algebraica:

$$t^2 + 1 = (t-2+2)^2 + 1 = (t-2)^2 + 4(t-2) + 5.$$

Entonces

$$g(t) = (t^2+1)H(t-2)$$
$$= (t-2)^2H(t-2) + 4(t-2)H(t-2) + 5H(t-2).$$

Ahora aplique el segundo teorema de corrimiento:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[g] &= \mathfrak{L}[(t-2)^2 H(t-2)] + 4\mathfrak{L}[(t-2)H(t-2)] + 5\mathfrak{L}[H(t-2)] \\ &= e^{-2s}\mathfrak{L}[t^2] + 4e^{-2s}\mathfrak{L}[t] + 5e^{-2s}\mathfrak{L}[1] \\ &= e^{-2s}\left[\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{5}{s}\right]. \ \blacksquare\end{aligned}$$

Como es usual, cualquier fórmula para la transformada de Laplace de una clase de funciones también puede leerse como una fórmula para una transformada inversa de Laplace. La versión inversa del segundo teorema de corrimiento es:

$$\mathfrak{L}^{-1}[e^{-as}F(s)](t) = H(t-a)f(t-a). \tag{1.6}$$

Esto permite calcular la transformada inversa de Laplace de una función transformada conocida multiplicada por una exponencial e^{-as}.

EJEMPLO 1.12

Calcule

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{se^{-3s}}{s^2+4}\right].$$

La presencia del factor exponencial sugiere el uso de la ecuación (1.6). Concéntrese en encontrar

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right].$$

Se puede leer esta inversa directamente en la tabla 1.1 y es $f(t) = \cos(2t)$. Por tanto,

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{se^{-3s}}{s^2+4}\right](t) = H(t-3)\cos(2(t-3)). \ \blacksquare$$

Ahora está preparado para resolver ciertos problemas con valores iniciales en los que aparecen funciones de fuerza discontinuas.

EJEMPLO 1.13

Resolver el problema con valor inicial

$$y'' + 4y = f(t); \qquad y(0) = y'(0) = 0,$$

en donde

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 3 \\ t & \text{para } t \geq 3 \end{cases}$$

Debido a la discontinuidad en f, no se pueden aplicar los métodos normales de solución de ecuaciones de segundo orden.

Primero reconozca que

$$f(t) = H(t-3)t.$$

Aplique la transformada de Laplace a la ecuación diferencial para obtener

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[y''] + \mathfrak{L}[y] &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s)\\ &= (s^2+4)Y(s) = \mathfrak{L}[H(t-3)t],\end{aligned}$$

en la cual ha insertado las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$.

Para utilizar el segundo teorema del corrimiento para calcular $\mathfrak{L}[H(t-3)t]$, escriba

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[H(t-3)t] &= \mathfrak{L}[H(t-3)(t-3+3)]\\ &= \mathfrak{L}[H(t-3)(t-3)] + 3\mathfrak{L}[H(t-3)]\\ &= e^{-3s}\mathfrak{L}[t] + 3e^{-3s}\mathfrak{L}[1] = \frac{1}{s^2}e^{-3s} + \frac{3}{s}e^{-3s}.\end{aligned}$$

Ahora tiene

$$(s^2+4)Y = \frac{1}{s^2}e^{-3s} + \frac{3}{s}e^{-3s}.$$

La transformada de la solución es

$$Y(s) = \frac{3s+1}{s^2(s^2+4)}e^{-3s}.$$

La solución está al alcance. Debe aplicar la transformada inversa de Laplace de $Y(s)$. Para hacer esto, primero use una descomposición en fracciones parciales para escribir

$$\frac{3s+1}{s^2(s^2+4)}e^{-3s} = \frac{3}{4}\frac{1}{s}e^{-3s} - \frac{3}{4}\frac{s}{s^2+4}e^{-3s} + \frac{1}{4}\frac{1}{s^2}e^{-3s} - \frac{1}{4}\frac{1}{s^2+4}e^{-3s}.$$

Cada término es una exponencial por una función cuya transformada de Laplace es conocida, aplique la ecuación (1.6) para escribir

$$\begin{aligned}y(t) = {}&\frac{3}{4}H(t-3) - \frac{3}{4}H(t-3)\cos(2(t-3))\\ &+ \frac{1}{4}H(t-3)(t-3) - \frac{1}{4}H(t-3)\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2(t-3)).\end{aligned}$$

Debido al factor $H(t-3)$ en cada término, esta solución es cero hasta el tiempo $t = 3$ y debe escribir

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 3\\ \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\cos(2(t-3)) + \frac{1}{4}(t-3) - \frac{1}{8}\operatorname{sen}(2(t-3)) & \text{para } t \geq 3.\end{cases}$$

o, combinando términos,

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 3\\ \frac{1}{8}[2t - 6\cos(2(t-3)) - \operatorname{sen}(2(t-3))] & \text{para } t \geq 3.\end{cases}$$

En la figura 1.17 se muestra la gráfica de esta solución. ■

En este ejemplo es interesante observar que la solución es diferenciable donde quiera, a pesar de que la función f que aparece en la ecuación diferencial tiene una discontinuidad de salto en 3. Este comportamiento es típico de los problemas con valores iniciales que tienen una función de fuerza discontinua. Si la ecuación diferencial tiene orden n y φ es una solución, entonces φ y sus primeras $n-1$ derivadas serán continuas, mientras que la n-ésima derivada tendrá discontinuidades de salto donde las tenga f, y estas discontinuidades de salto coincidirán en magnitud con las discontinuidades de salto de f correspondientes.

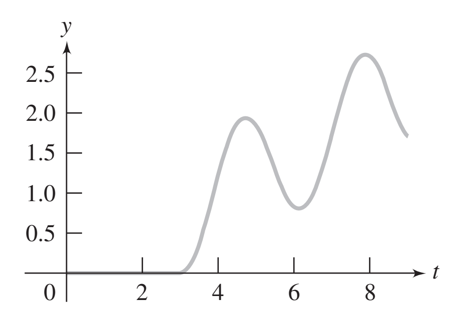


FIGURA 1.17 *Solución de*

$$y'' + 4y = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le t < 3 \\ t & \text{si } t \le 3 \end{cases}; \quad (y(0) = y'(0) = 0).$$

Con frecuencia necesitará escribir una función que tiene varias discontinuidades de salto en términos de las funciones de Heaviside para usar los teoremas de corrimiento. Aquí hay un ejemplo.

EJEMPLO 1.14

Sea

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2 \\ t - 1 & \text{si } 2 \le t < 3 \\ -4 & \text{si } t \ge 3. \end{cases}$$

En la figura 1.18 se muestra una gráfica de f. Hay discontinuidades de saltos de magnitud 1 en $t = 2$ y magnitud 6 en $t = 3$.

Piense que $f(t)$ está formada por dos partes distintas de cero, la parte que es $t - 1$ en $[2, 3)$ y la parte que es -4 en $[3, \infty)$. Quiere prender $t - 1$ en el tiempo 2 y apagarla en el tiempo 3, después prenderla -4 en el tiempo 3 y dejarla prendida.

El primer efecto se consigue multiplicando la función pulso $H(t-2) - H(t-3)$ por $t - 1$. El segundo multiplicando $H(t - 3)$ por 4. Por tanto,

$$f(t) = [H(t - 2) - H(t - 3)](t - 1) - 4H(t - 3).$$

Como verificación, esto da $f(t) = 0$ si $t < 2$ ya que todas las funciones de Heaviside de corrimiento son cero para $t < 2$. Para $2 \le t < 3$, $H(t - 2) = 1$ pero $H(t - 3) = 0$ de manera que $f(t) = t - 1$. Y para $t \ge 3$, $H(t - 2) = H(t - 3) = 1$, así $f(t) = -4$. ■

1.3.4 Análisis de circuitos eléctricos

La función de Heaviside es importante en muchos tipos de problemas, incluyendo el análisis de circuitos eléctricos, donde habrá interruptores que pueden prender y apagar. Aquí hay dos ejemplos.

EJEMPLO 1.15

Suponga que el condensador en el circuito de la figura 1.19 tiene inicialmente una carga de cero y que no hay corriente inicial. En el tiempo $t = 2$ segundos, el interruptor pasa de la posición B a A, se mantiene ahí por 1 segundo y regresa a B. Quiere el voltaje de salida E_{salida} en el condensador.

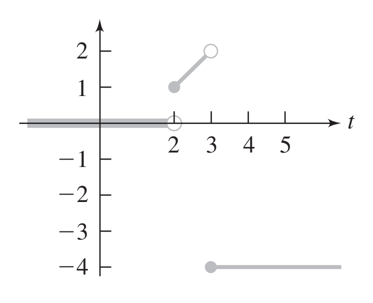


FIGURA 1.18 *Solución de*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2 \\ t-1 & \text{si } 2 \le t < 3 \\ -4 & \text{si } t \ge 3 \end{cases}.$$

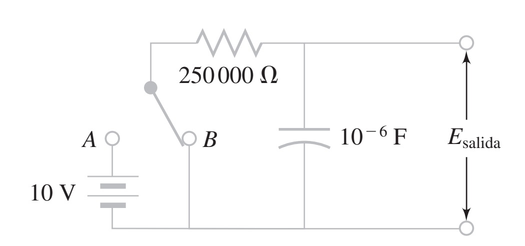


FIGURA 1.19

Del circuito del diagrama, la función de fuerza es cero hasta $t = 2$, después tiene valor de 10 volts hasta $t = 3$, y después es cero nuevamente. Así E es la función pulso

$$E(t) = 10[H(t-2) - H(t-3)].$$

Por la ley de voltaje de Kirchhoff,

$$Ri(t) + \frac{1}{C}q(t) = E(t),$$

o

$$250\,000q'(t) + 10^6 q(t) = E(t).$$

Quiere encontrar q sujeta a la condición inicial $q(0) = 0$. Aplique la transformada de Laplace a la ecuación diferencial, incorporando la condición inicial, para escribir

$$250\,000[s\,Q(t) - q(0)] + 10^6 Q(t) = 250\,000 s\,Q + 10^6\,Q = \mathfrak{L}[E(t)].$$

Ahora

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[E(t)](s) &= 10\mathfrak{L}[H(t-2)](s) - 10\mathfrak{L}[H(t-3)](s) \\ &= \frac{10}{s}e^{-2s} - \frac{10}{s}e^{-3s}. \end{aligned}$$

Ahora, la siguiente ecuación para Q:

$$2.5(10^5)s\,Q(s) + 10^6 Q(s) = \frac{10}{s}e^{-2s} - \frac{10}{s}e^{-3s}$$

o

$$Q(s) = 4(10^{-5})\frac{1}{s(s+4)}e^{-2s} - 4(10)^{-5}\frac{1}{s(s+4)}e^{-3s}.$$

Use una descomposición en fracciones parciales para escribir

$$Q(s) = 10^{-5}\left[\frac{1}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s+4}e^{-2s}\right] - 10^{-5}\left[\frac{1}{s}e^{-3s} - \frac{1}{s+4}e^{-3s}\right].$$

Por el segundo teorema de corrimiento,

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}e^{-2s}\right](t) = H(t-2)$$

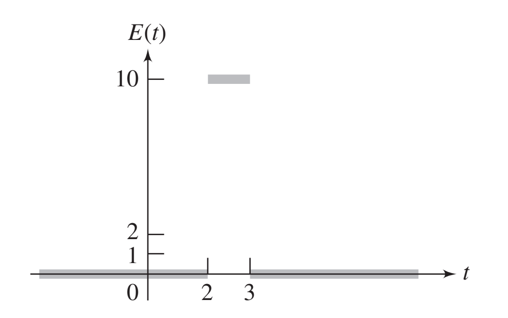


FIGURA 1.20 *Voltaje de entrada para el circuito de la figura 1.19.*

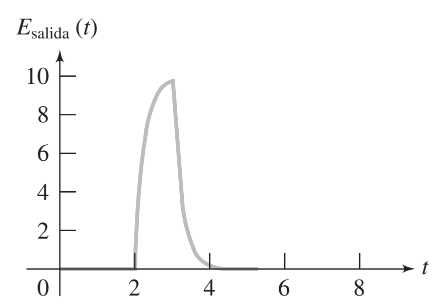


FIGURA 1.21 *Voltaje de salida para el circuito de la figura 1.19.*

y

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+4}e^{-2s}\right] = H(t-2)f(t-2),$$

donde $f(t) = \mathfrak{L}^{-1}[1/(s+4)] = e^{-4t}$. Así

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+4}e^{-2s}\right] = H(t-2)e^{-4(t-2)}.$$

Los otros dos términos en $Q(s)$ son tratados similarmente, y obtiene

$$\begin{aligned} q(t) &= 10^{-5}[H(t-2) - H(t-2)e^{-4(t-2)}] - 10^{-5}[H(t-3) - H(t-3)e^{-4(t-3)}] \\ &= 10^{-5}H(t-2)[1 - e^{-4(t-2)}] - 10^{-5}H(t-3)[1 - e^{-4(t-3)}]. \end{aligned}$$

Por último, como el voltaje de salida es $E_{\text{salida}}(t) = 10^6 q(t)$,

$$E_{\text{salida}}(t) = 10H(t-2)[1 - e^{-4(t-2)}] - 10H(t-3)[1 - e^{-4(t-3)}].$$

En las figuras 1.20 y 1.21 están graficados los voltajes de entrada y salida. ■

EJEMPLO 1.16

El circuito de la figura 1.22 tiene intercambiados la resistencia y el condensador del circuito del ejemplo anterior. Quiere saber el voltaje de salida $i(t)R$ en cualquier tiempo.

La ecuación diferencial del ejemplo anterior se aplica a este circuito, pero ahora está interesado en la corriente. Como $i = q'$, entonces

$$(2.5)(10^5)i(t) + 10^6 q(t) = E(t); \qquad i(0) = q(0) = 0.$$

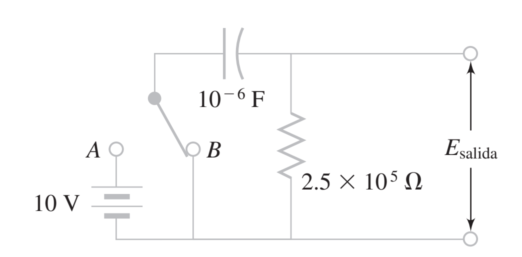


FIGURA 1.22

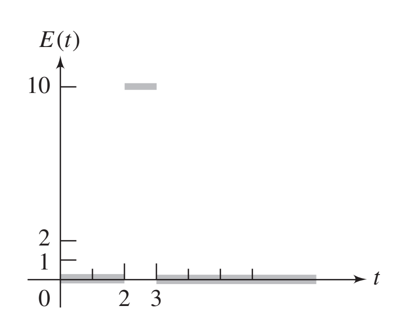


FIGURA 1.23 *Voltaje de entrada para el circuito de la figura 1.22.*

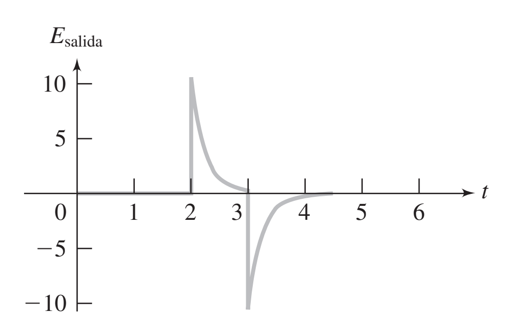


FIGURA 1.24 *Voltaje de salida para el circuito de la figura 1.22.*

La estrategia de eliminar q diferenciando y usando $i = q'$ no se puede aplicar aquí, ya que $E(t)$ no es diferenciable. Para eliminar $q(t)$ en este caso, escriba

$$q(t) = \int_0^t i(\tau)\,d\tau + q(0) = \int_0^t i(\tau)\,d\tau.$$

Ahora tiene que resolver el siguiente problema para la corriente:

$$(2.5)(10^5)i(t) + 10^6 \int_0^t i(\tau)\,d\tau = E(t); \qquad i(0) = 0.$$

Ésta no es una ecuación diferencial. Sin embargo, ya tiene los medios para resolverla. Tome la transformada de Laplace de la ecuación, usando la ecuación (1.4), para obtener

$$(2.5)(10^5)I(s) + 10^6 \frac{1}{s} I(s) = \mathfrak{L}[E](s)$$
$$= 10\frac{1}{s}e^{-2s} - 10\frac{1}{s}e^{-3s}.$$

Aquí $I = \mathfrak{L}[i]$. Resuelva para I (s) para obtener

$$I(s) = 4(10^{-5})\frac{1}{s+4}e^{-2s} - 4(10^{-5})\frac{1}{s+4}e^{-3s}.$$

Tome la transformada inversa de Laplace para obtener

$$i(t) = 4(10^{-5})H(t-2)e^{-4(t-2)} - 4(10^{-5})H(t-3)e^{-4(t-3)}.$$

En las figuras 1.23 y 1.24 aparecen las gráficas de los voltajes de entrada y salida. ■

SECCIÓN 1.3 PROBLEMAS

En cada uno de los problemas del 1 al 15, encuentre la transformada de Laplace de la función.

1. $(t^3 - 3t + 2)e^{-2t}$

2. $e^{-3t}(t-2)$

3. $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \le t < 7 \\ \cos(t) & \text{para } t \ge 7 \end{cases}$

4. $e^{4t}[t - \cos(t)]$

5. $f(t) = \begin{cases} t & \text{para } 0 \le t < 3 \\ 1 - 3t & \text{para } t \ge 3 \end{cases}$

6. $f(t) = \begin{cases} 2t - \text{sen}(t) & \text{para } 0 \le t < \pi \\ 0 & \text{para } t \ge \pi \end{cases}$

7. $e^{-t}[1 - t^2 + \text{sen}(t)]$

8. $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{para } 0 \le t < 2 \\ 1 - t - 3t^2 & \text{para } t \ge 2 \end{cases}$

9. $f(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{para } 0 \le t < 2\pi \\ 2 - \text{sen}(t) & \text{para } t \ge 2\pi \end{cases}$

10. $f(t) = \begin{cases} -4 & \text{para } 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{para } 1 \le t < 3 \\ e^{-t} & \text{para } t \ge 3 \end{cases}$

11. $te^{-2t}\cos(3t)$

12. $e^t[1 - \cosh(t)]$

13. $f(t) = \begin{cases} t - 2 & \text{para } 0 \le t < 16 \\ -1 & \text{para } t \ge 16 \end{cases}$

14. $f(t) = \begin{cases} 1 - \cos(2t) & \text{para } 0 \le t < 3\pi \\ 0 & \text{para } t \ge 3\pi \end{cases}$

15. $e^{-5t}(t^4 + 2t^2 + t)$

En cada uno de los problemas del 16 al 25, encuentre la transformada inversa de Laplace de la función.

16. $\dfrac{1}{s^2 + 4s + 12}$

17. $\dfrac{1}{s^2 - 4s + 5}$

18. $\dfrac{1}{s^3}e^{-5s}$

19. $\dfrac{se^{-2s}}{s^2 + 9}$

20. $\dfrac{3}{s + 2}e^{-4s}$

21. $\dfrac{1}{s^2 + 6s + 7}$

22. $\dfrac{s - 4}{s^2 - 8s + 10}$

23. $\dfrac{s + 2}{s^2 + 6s + 1}$

24. $\dfrac{1}{(s - 5)^3}e^{-s}$

25. $\dfrac{1}{s(s^2 + 16)}e^{-21s}$

26. Determine $\mathfrak{L}[e^{-2t}\int_0^t e^{2w}\cos(3w)\,dw]$. *Sugerencia:* Use el primer teorema de corrimiento.

En cada uno de los problemas del 27 al 32, resuelva el problema con valores iniciales usando la transformada de Laplace.

27. $y'' + 4y = f(t)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, con $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \le t < 4 \\ 3 & \text{para } t \ge 4 \end{cases}$

28. $y'' - 2y' - 3y = f(t)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, con $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \le t < 4 \\ 12 & \text{para } t \ge 4 \end{cases}$

29. $y^{(3)} - 8y = g(t)$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, con $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \le t < 6 \\ 2 & \text{para } t \ge 6 \end{cases}$

30. $y'' + 5y' + 6y = f(t)$; $y(0) = y'(0) = 0$, con $f(t) = \begin{cases} -2 & \text{para } 0 \le t < 3 \\ 0 & \text{para } t \ge 3 \end{cases}$

31. $y^{(3)} - y'' + 4y' - 4y = f(t)$; $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, con $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \le t < 5 \\ 2 & \text{para } t \ge 5 \end{cases}$

32. $y'' - 4y' + 4y = f(t)$; $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$, con $f(t) = \begin{cases} t & \text{para } 0 \le t < 3 \\ t + 2 & \text{para } t \ge 3 \end{cases}$

33. Calcule y grafique el voltaje de salida en el circuito de la figura 1.19, suponiendo que en el tiempo cero el condensador está cargado con un potencial de 5 volts y el apagador se abre en 0 y se cierra 5 segundos después.

34. Calcule y grafique el voltaje de salida en el circuito RL de la figura 1.25 si la corriente inicialmente es cero y

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \le t < 5 \\ 2 & \text{para } t \ge 5. \end{cases}$$

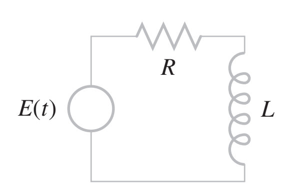


FIGURA 1.25

35. Resuelva para la corriente en el circuito RL del problema 34 si la corriente inicialmente es cero y $E(t) =$

$$\begin{cases} k & \text{para } 0 \le t < 5 \\ 0 & \text{para } t \ge 5. \end{cases}$$

36. Encuentre la corriente en el circuito RL del problema 34 si la corriente es cero inicialmente y $E(t) =$

$$\begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq t < 4 \\ Ae^{-t} & \text{para } t \geq 4. \end{cases}$$

37. Escriba la función graficada en la figura 1.26 en términos de la función de Heaviside y encuentre su transformada de Laplace.

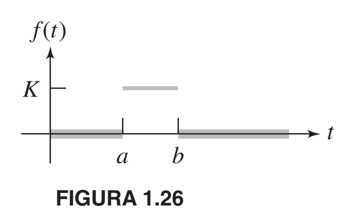


FIGURA 1.26

38. Escriba la función graficada en la figura 1.27 en términos de la función de Heaviside y encuentre su transformada de Laplace.

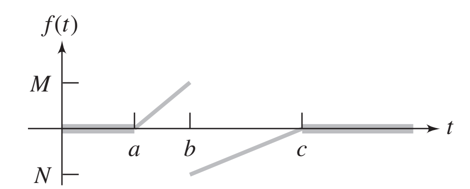


FIGURA 1.27

39. Escriba la función graficada en la figura 1.28 en términos de la función de Heaviside y encuentre su transformada de Laplace.

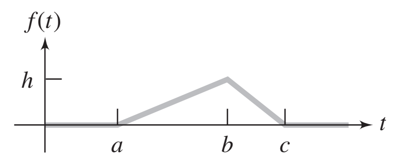


FIGURA 1.28

40. Resuelva para la corriente en el circuito RL de la figura 1.29 si la corriente es cero inicialmente, $E(t)$ tiene periodo 4 y

$$E(t) = \begin{cases} 10 & \text{para } 0 \leq t < 2 \\ 0 & \text{para } 2 \leq t < 4 \end{cases}$$

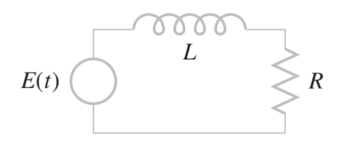


FIGURA 1.29

Sugerencia: Vea el problema 22 de la sección 1.1 para la transformada de Laplace de una función periódica. Debe encontrar que $I(s) = F(s)/(1 + e^{-2s})$ para alguna $F(s)$. Use una serie geométrica para escribir

$$\frac{1}{1 + e^{-2s}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-2ns}$$

para escribir $I(s)$ como una serie infinita, después tome la transformada inversa término a término usando el teorema del corrimiento.

Grafique la corriente para $0 \leq t < 8$.

1.4 Convolución

En general la transformada de Laplace del producto de dos funciones no es el producto de sus transformadas. Sin embargo, hay un tipo especial de producto, denotado por $f * g$, llamado la *convolución* de f con g. La convolución tiene la característica de que la transformada de $f * g$ es el producto de las transformadas de f y g. Este hecho se llama el *teorema de convolución*.

DEFINICIÓN 1.6 Convolución

Si f y g están definidas en $[0, \infty)$, entonces la convolución $f * g$ de f con g es la función definida por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau)\, d\tau$$

para $t \geq 0$.

TEOREMA 1.9 *Teorema de convolución*

Si $f * g$ está definida, entonces

$$\mathfrak{L}[f * g] = \mathfrak{L}[f]\mathfrak{L}[g]$$

Prueba Sean $F = \mathfrak{L}[f]$ y $G = \mathfrak{L}[g]$. Entonces

$$F(s)G(s) = F(s)\int_0^\infty e^{-st}g(t)\,dt = \int_0^\infty F(s)e^{-s\tau}g(\tau)\,d\tau,$$

en la cual cambia la variable de integración a τ y pone $F(s)$ dentro de la integral. Ahora recuerde que

$$e^{-s\tau}F(s) = \mathfrak{L}[H(t-\tau)f(t-\tau)](s).$$

Sustituya esto en la integral para $F(s)G(s)$ para obtener

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty \mathfrak{L}[H(t-\tau)f(t-\tau)](s)g(\tau)\,d\tau. \tag{1.7}$$

Pero, de la definición de la transformada de Laplace,

$$\mathfrak{L}[H(t-\tau)f(t-\tau)] = \int_0^\infty e^{-st}H(t-\tau)f(t-\tau)\,dt.$$

Sustituya esto en la ecuación (1.7) para obtener

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-st}H(t-\tau)f(t-\tau)\,dt\right]g(\tau)\,d\tau \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st}g(\tau)H(t-\tau)f(t-\tau)\,dt\,d\tau. \end{aligned}$$

Recuerde ahora que $H(t-\tau) = 0$ si $0 \leq t < \tau$, mientras $H(t-\tau) = 1$ si $t \geq \tau$. Por tanto,

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty \int_\tau^\infty e^{-st}g(\tau)f(t-\tau)\,dt\,d\tau.$$

La figura 1.30 muestra el plano $t\tau$. La última integración es sobre la región sombreada, que consiste de los puntos (t, τ) que satisfacen $0 \leq \tau < \infty$. Invierta el orden de integración para escribir

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^\infty \int_0^t e^{-st}g(\tau)f(t-\tau)\,d\tau \\ &= \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t g(\tau)f(t-\tau)\,d\tau\right]dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}(f * g)(t)\,dt = \mathfrak{L}[f * g](s). \end{aligned}$$

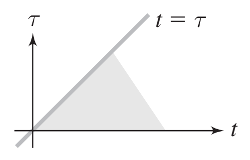


FIGURA 1.30

Por tanto,

$$F(s)G(s) = \mathfrak{L}[f * g](s),$$

como quería probar. ■

La versión inversa del teorema de convolución es útil cuando quiere encontrar la transformada inversa de una función que es un producto, y conoce la transformada inversa de cada factor.

TEOREMA 1.10

Sean $\mathfrak{L}^{-1}[F] = f$ y $\mathfrak{L}^{-1}[G] = g$. Entonces

$$\mathfrak{L}^{-1}[FG] = f * g. \blacksquare$$

EJEMPLO 1.17

Calcule

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s-4)^2}\right].$$

Puede hacer esto de distintas maneras (una tabla, un programa, una descomposición en fracciones parciales). Pero también si escribe

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s-4)^2}\right] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\frac{1}{(s-4)^2}\right] = \mathfrak{L}^{-1}[F(s)G(s)].$$

Ahora

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1 = f(t) \quad \text{y} \quad \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-4)^2}\right] = te^{4t} = g(t).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s-4)^2}\right] &= f(t) * g(t) = 1 * te^{4t} \\ &= \int_0^t \tau e^{4\tau}\, d\tau = \frac{1}{4}te^{4t} - \frac{1}{16}e^{4t} + \frac{1}{16}. \blacksquare\end{aligned}$$

La operación de convolución es conmutativa.

TEOREMA 1.11

Si $f * g$ está definida, entonces también lo está $g * f$ y $f * g = g * f$.

Prueba Sea $z = t - \tau$ en la integral que define la convolución para obtener

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$
$$= \int_t^0 f(z)g(t-z)(-1)\,dz = \int_0^t f(z)g(t-z)\,dz = (g * f)(t). \blacksquare$$

La conmutatividad puede tener una importancia práctica, ya que, en casos específicos, la integral que define a $g * f$ puede ser más fácil de evaluar que la integral que define a $f * g$.

Algunas veces la convolución permite escribir soluciones de problemas que están formulados en términos muy generales.

EJEMPLO 1.18

Resuelva el problema

$$y'' - 2y' - 8y = f(t); \qquad y(0) = 1,\, y'(0) = 0.$$

Aplique la transformada de Laplace, inserte los valores iniciales, para obtener

$$\mathfrak{L}[y'' - 2y' - 8y](s) = (s^2 Y(s) - s) - 2(sY(s) - 1) - 8Y(s) = \mathfrak{L}[f](s) = F(s).$$

Entonces

$$(s^2 - 2s - 8)Y(s) - s + 2 = F(s),$$

así

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 - 2s - 8}F(s) + \frac{s-2}{s^2 - 2s - 8}.$$

Use una descomposición en fracciones parciales

$$Y(s) = \frac{1}{6}\frac{1}{s-4}F(s) - \frac{1}{6}\frac{1}{s+2}F(s) + \frac{1}{3}\frac{1}{s-4} + \frac{2}{3}\frac{1}{s+2}.$$

Entonces

$$y(t) = \frac{1}{6}e^{4t} * f(t) - \frac{1}{6}e^{-2t} * f(t) + \frac{1}{3}e^{4t} + \frac{2}{3}e^{-2t}.$$

Ésta es la solución, para cualquier función f que tiene una convolución con e^{4t} y e^{-2t}. $\blacksquare$

También se usa la convolución para resolver cierto tipo de ecuaciones integrales, en donde la función a ser determinada aparece en una integral. Vio un caso de éstos en el ejemplo 1.16 al resolverlo para la corriente.

EJEMPLO 1.19

Determine f tal que

$$f(t) = 2t^2 + \int_0^t f(t-\tau)e^{-\tau}\,d\tau.$$

Reconocemos la integral de la derecha como la convolución de f con e^{-t}. Entonces la ecuación tiene la forma

$$f(t) = 2t^2 + (f * e^{-t})(t).$$

Tomando la transformada de Laplace de esta ecuación llegamos a

$$F(s) = \frac{4}{s^3} + F(s)\frac{1}{s+1}.$$

Entonces

$$F(s) = \frac{4}{s^3} + \frac{4}{s^4},$$

y a partir de esto fácilmente invertimos para obtener

$$f(t) = 2t^2 + \frac{2}{3}t^3. \blacksquare$$

SECCIÓN 1.4 PROBLEMAS

En cada uno de los problemas del 1 al 8, use el teorema de convolución para calcular la transformada inversa de Laplace de la función (aun si funciona otro método). Siempre, a y b son constantes positivas.

1. $\dfrac{1}{(s^2+4)(s^2-4)}$

2. $\dfrac{1}{s^2+16}e^{-2s}$

3. $\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$

4. $\dfrac{s^2}{(s-3)(s^2+5)}$

5. $\dfrac{1}{s(s^2+a^2)^2}$

6. $\dfrac{1}{s^4(s-5)}$

7. $\dfrac{1}{s(s+2)}e^{-4s}$

8. $\dfrac{2}{s^3(s^2+5)}$

En cada uno de los problemas del 9 al 16, use el teorema de convolución para escribir una fórmula para la solución del problema con valores iniciales en términos de $f(t)$.

9. $y'' - 5y' + 6y = f(t)$; $y(0) = y'(0) = 0$

10. $y'' + 10y' + 24y = f(t)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

11. $y'' - 8y' + 12y = f(t)$; $y(0) = -3$, $y'(0) = 2$

12. $y'' - 4y' - 5y = f(t)$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

13. $y'' + 9y = f(t)$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$

14. $y'' - k^2y = f(t)$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -4$

15. $y^{(3)} - y'' - 4y' + 4y = f(t)$; $y(0) = y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$

16. $y^{(4)} - 11y'' + 18y = f(t)$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = y^{(3)}(0) = 0$

En cada uno de los problemas del 17 al 23, resuelva la ecuación integral.

17. $f(t) = -1 + \int_0^t f(t-\alpha)e^{-3}\,d\alpha$

18. $f(t) = -t + \int_0^t f(t-\alpha)\,\mathrm{sen}(\alpha)\,d\alpha$

19. $f(t) = e^{-t} + \int_0^t f(t-\alpha)\,d\alpha$

20. $f(t) = -1 + t - 2\int_0^t f(t-\alpha)\,\mathrm{sen}(\alpha)\,d\alpha$

21. $f(t) = 3 + \int_0^t f(\alpha)\cos[2(t-\alpha)]\,d\alpha$

22. $f(t) = \cos(t) + e^{-2t}\int_0^t f(\alpha)e^{2\alpha}\,d\alpha$

23. $f(t) = e^{-3t}\,[e^t - 3\int_0^t f(\alpha)e^{3\alpha}\,d\alpha]$

24. Use el teorema de convolución para obtener la fórmula $\mathfrak{L}[\int_0^t f(w)\,dw](s) = (1/s)F(s)$. ¿Qué hipótesis se necesitan para $f(t)$?

25. Pruebe, por ejemplo, que en general $f * 1 \neq f$, donde 1 denota la función que es idénticamente 1 para todo t. *Sugerencia:* Considere $f(t) = \cos(t)$.

26. Use el terorema de convolución para determinar la transformada de Laplace de $e^{-2t}\int_0^t e^{2w}\cos(3w)\,dw$.

27. Use el teorema de convolución para probar que

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}F(s)\right](t) = \int_0^t \int_0^w f(\alpha)\,d\alpha\,dw.$$

1.5 Impulsos unitarios y la función delta de Dirac

Algunas veces encontrará el concepto de impulso, el cual debe ser entendido intuitivamente como una fuerza de magnitud grande aplicada sobre un instante de tiempo. Enseguida se modela un impulso. Para cualquier número positivo ϵ, considere el pulso δ_ϵ definido por

$$\delta_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}[H(t) - H(t-\epsilon)].$$

Como se muestra en la figura 1.31, éste es un pulso de magnitud $1/\epsilon$ y duración ϵ. Haciendo que se aproxime a cero, obtiene pulsos de magnitud cada vez mayor en intervalos de tiempo cada vez más cortos.

La función delta de Dirac se interpreta como un pulso de “magnitud infinito” sobre una duración “infinitamente corta” y se define como

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0+} \delta_\epsilon(t).$$

Ésta no es en realidad una función en el sentido convencional, sino un objeto más general llamado distribución. No obstante, por razones históricas se continúa refiriéndose a ella como la función delta. Se llama así en honor del premio Nobel de física P.A.M. Dirac. La función delta con corrimiento $\delta(t-a)$ es cero excepto para $t = a$, donde tiene su pico infinito.

Es posible definir la transformada de Laplace de la función delta de la siguiente manera. Empiece con

$$\delta_\epsilon(t-a) = \frac{1}{\epsilon}[H(t-a) - H(t-a-\epsilon)].$$

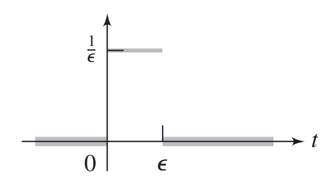


FIGURA 1.31 *Gráfica de* $\delta_\epsilon(t-a)$.

Entonces

$$\mathfrak{L}[\delta_\epsilon(t-a)] = \frac{1}{\epsilon}\left[\frac{1}{s}e^{-as} - \frac{1}{s}e^{-(a+\epsilon)s}\right] = \frac{e^{-as}(1-e^{-\epsilon s})}{\epsilon s}.$$

Esto sugiere que es necesario definir

$$\mathfrak{L}[\delta(t-a)] = \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{e^{-as}(1-e^{-\epsilon s})}{\epsilon s} = e^{-as}.$$

En particular, eligiendo $a = 0$

$$\mathfrak{L}[\delta(t)] = 1.$$

Así, la función delta tiene la transformada de Laplace igual a 1.

El siguiente resultado se llama la *propiedad de filtrado* de la función delta. Si en el tiempo a, una señal (función) es golpeada por un impulso, multiplicándola por $\delta(t-a)$, y la señal resultante es sumada sobre todos los tiempos positivos integrándola de cero a infinito, entonces obtiene exactamente el valor de la señal $f(a)$.

TEOREMA 1.12 *Propiedad de filtrado*

Sea $a > 0$ y f integrable en $[0, \infty)$ y continua en a. Entonces

$$\int_0^\infty f(t)\delta(t-a)\,dt = f(a).$$

Prueba Primero calcule

$$\int_0^\infty f(t)\delta_\epsilon(t-a)\,dt = \int_0^\infty \frac{1}{\epsilon}[H(t-a) - H(t-a-\epsilon)]f(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{\epsilon}\int_a^{a+\epsilon} f(t)\,dt.$$

Por el teorema del valor medio para integrales, existe algún t_ϵ entre a y $a+\epsilon$ tal que

$$\int_a^{a+\epsilon} f(t)\,dt = \epsilon f(t_\epsilon).$$

Entonces

$$\int_0^\infty f(t)\delta_\epsilon(t-a)\,dt = f(t_\epsilon).$$

Como $\epsilon \to 0+$, $a+\epsilon \to a$, así $t_\epsilon \to a$ y, por la continuidad, $f(t_\epsilon) \to f(a)$. Entonces

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\int_0^\infty f(t)\delta_\epsilon(t-a)\,dt = \int_0^\infty f(t)\lim_{\epsilon\to 0+}\delta_\epsilon(t-a)\,dt$$
$$= \int_0^\infty f(t)\delta(t-a)\,dt = \lim_{\epsilon\to 0+} f(t_\epsilon) = f(a),$$

como quería probar. ■

Si aplica la propiedad de filtrado para $f(t) = e^{-st}$, obtiene

$$\int_0^\infty e^{-st}\delta(t-a)\,dt = e^{-as},$$

que es consistente con la definición de la transformada de Laplace de la función delta. Más aún, si cambia la notación en la propiedad de filtrado y la escribe como

$$\int_0^\infty f(\tau)\delta(\tau - t)\,d\tau = f(t),$$

entonces reconocerá la convolución de f con δ y leerá la última ecuación como

$$f * \delta = f.$$

Por tanto, la función delta actúa como una identidad para el "producto" definido por la convolución de dos funciones.

Aquí hay un ejemplo de un problema con valor en la frontera que involucra la función delta.

EJEMPLO 1.20

Resolver

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t-3); \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

Aplique la transformada de Laplace a la ecuación diferencial para obtener

$$s^2Y(s) + 2sY(s) + 2Y(s) = e^{-3s},$$

entonces

$$Y(s) = \frac{e^{-3s}}{s^2 + 2s + 2}.$$

Para encontrar la transformada inversa de la función de la derecha, primero escriba

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2 + 1}e^{-3s}.$$

Ahora use ambos teoremas de corrimiento. Ya que $\mathfrak{L}^{-1}[1/(s^2+1)] = \text{sen}(t)$, un corrimiento en la variable s da

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+1}\right] = e^{-t}\,\text{sen}(t).$$

Ahora, un corrimiento en la variable t para obtener

$$y(t) = H(t-3)e^{-(t-3)}\,\text{sen}(t-3).$$

En la figura 1.32 se muestra la gráfica de esta solución. La solución es diferenciable para $t > 0$, excepto que $y'(t)$ tiene un salto de discontinuidad de magnitud 1 en $t = 3$. La magnitud del salto es el coeficiente de $\delta(t-3)$ en la ecuación diferencial. ■

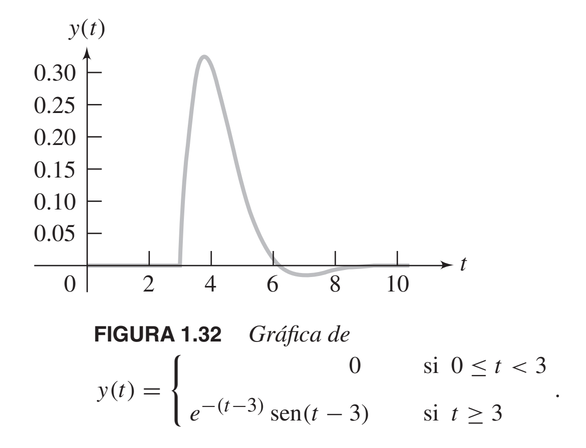


FIGURA 1.32 *Gráfica de*

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le t < 3 \\ e^{-(t-3)}\,\text{sen}(t-3) & \text{si } t \ge 3 \end{cases}.$$

La función delta puede usarse para estudiar el comportamiento de un circuito que ha sido sometido a transitorios. Éstos son generados durante el prendido y apagado, y los voltajes altos de entrada asociados con ellos crean una corriente excesiva en los componentes, dañando el circuito. Los transitorios también pueden ser dañinos ya que contienen un espectro de frecuencias amplio. La introducción de un transitorio en un circuito puede tener el efecto de forzar al circuito con un rango de frecuencias. Si hay una de éstas cerca de la frecuencia natural del sistema, habrá resonancia, por lo que se producen oscilaciones suficientemente grandes para dañar el sistema.

Por esta razón, antes de construir un circuito, algunas veces los ingenieros usan la función delta para modelar un transitorio y estudiar sus efectos en el circuito.

EJEMPLO 1.21

Suponga que, en el circuito de la figura 1.33, la corriente y la carga en el condensador son cero en el tiempo cero. Quiere determinar la respuesta del voltaje de salida a un transitorio modelado por $\delta(t)$.

El voltaje de salida es $q(t)/C$, de esta manera determinará $q(t)$. Por la ley de voltaje de Kirchhoff,

$$Li' + Ri + \frac{1}{C}q = i' + 10i + 100q = \delta(t).$$

Como $i = q'$,

$$q'' + 10q' + 100q = \delta(t).$$

Las condiciones iniciales son $q(0) = q'(0) = 0$.

Aplique la transformada de Laplace a la ecuación diferencial y use las condiciones iniciales para obtener

$$s^2Q(s) + 10sQ(s) + 100Q(s) = 1.$$

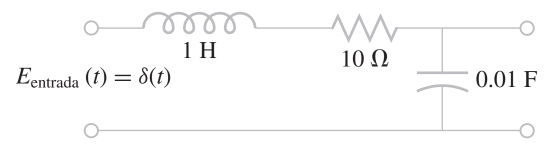


FIGURA 1.33

Entonces

$$Q(s) = \frac{1}{s^2 + 10s + 100}.$$

Para invertir esto usando el teorema del corrimiento, complete el cuadrado

$$Q(s) = \frac{1}{(s+5)^2 + 75}.$$

Como

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+75)}\right] = \frac{1}{5\sqrt{3}}\ \operatorname{sen}\big(5\sqrt{3}t\big),$$

entonces

$$q(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+5)^2+75}\right] = \frac{1}{5\sqrt{3}}e^{-5t}\ \operatorname{sen}\big(5\sqrt{3}t\big).$$

El voltaje de salida es

$$\frac{1}{C}q(t) = 100q(t) = \frac{20}{\sqrt{3}}e^{-5t}\ \operatorname{sen}\big(5\sqrt{3}t\big).$$

En la figura 1.34 se muestra una gráfica de esta salida. La salida del circuito muestra oscilaciones amortiguadas a su frecuencia natural, aunque no fue forzada explícitamente por oscilaciones de esta frecuencia. Si lo desea, puede obtener la corriente por $i(t) = q'(t)$. ■

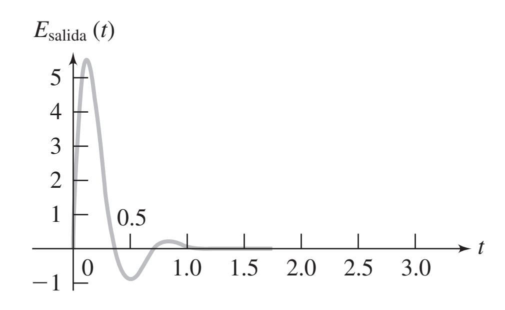


FIGURA 1.34 *Salida del circuito de la figura 1.32.*

SECCIÓN 1.5 PROBLEMAS

En cada uno de los problemas del 1 al 5, resuelva el problema con valores iniciales y grafique la solución.

1. $y'' + 5y' + 6y = 3\delta(t-2) - 4\delta(t-5)$; $y(0) = y'(0) = 0$

2. $y'' - 4y' + 13y = 4\delta(t-3)$; $y(0) = y'(0) = 0$

3. $y^{(3)} + 4y'' + 5y' + 2y = 6\delta(t)$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

4. $y'' + 16y' = 12\delta(t - 5\pi/8)$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

5. $y'' + 5y' + 6y = B\delta(t)$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$. Llame a la solución φ. ¿Qué son $\varphi(0)$ y $\varphi'(0)$? Usando esta informa-

ción, ¿qué fenómeno físico modela la función delta de Dirac?

6. Suponga que f no es continua en a, pero $\lim_{t\to a+} f(t) = f(a+)$ es finita. Probar que $\int_0^\infty f(t)\delta(t-a)\,dt = f(a+)$.

7. Evalúe $\int_0^\infty (\text{sen}(t)/t)\delta(t-\pi/6)dt$.

8. Evalúe $\int_0^2 t^2\delta(t-3)dt$.

9. Evalúe $\int_0^\infty f(t)\delta(t-2)dt$, donde

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{para } 0 \le t < 2 \\ t^2 & \text{para } t > 2 \\ 5 & \text{para } t = 2. \end{cases}$$

10. Algunas veces es conveniente considerar a $\delta(t)$ como la derivada de la función de Heaviside $H(t)$. Use las definiciones de la derivada, de la función de Heaviside, y de la función delta (como el límite de δ_ϵ) para dar una justificación heurística para esto.

11. Use la idea $H'(t) = \delta(t)$ del problema 10 para determinar el voltaje de salida del circuito del ejemplo 1.16 derivando la ecuación pertinente para obtener una ecuación en i en lugar de escribir el cambio como una integral.

12. Si $H'(t) = \delta(t)$, entonces $\mathfrak{L}[H'(t)](s) = 1$. Pruebe que no todas las reglas operacionales para la transformada de Laplace son compatibles con esta expresión. *Sugerencia:* Verifique para ver si $[H'(t)](s) = s\mathfrak{L}[H(t)](s) - H(0+)$.

13. Evalúe $\delta(t-a) * f(t)$.

14. Un objeto de masa m es atado al extremo inferior de un resorte de módulo k. Suponga que no existe oscilación. Obtenga y resuelva una ecuación de movimiento para la posición del objeto en el tiempo $t > 0$, suponiendo que, en el tiempo cero el objeto es empujado hacia abajo desde la posición de equilibrio con una velocidad inicial v_0. ¿En qué momento deja el objeto la posición de equilibrio?

15. Suponga que un objeto de masa m está atado al extremo inferior de un resorte de módulo k. Suponga que no existe oscilación. Resuelva la ecuación de movimiento para la posición del objeto en cualquier tiempo $t \ge 0$ si, en el tiempo cero, el peso es empujado hacia abajo con una fuerza mv_0. ¿Cómo es la posición del objeto del problema 14 comparada con la del objeto en este problema para cualquier tiempo positivo?

16. Un peso de 2 libras es atado al extremo inferior de un resorte, estirándolo $\frac{8}{3}$ pulgadas. Se deja que el peso alcance su posición de equilibrio. En algún tiempo posterior, que se llama tiempo cero, el peso se empuja hacia abajo con una fuerza de $\frac{1}{4}$ de libra (un impulso). Suponga que no hay amortiguamiento en el sistema. Determine la velocidad con la cual el peso deja la posición de equilibrio así como la frecuencia y la magnitud de las oscilaciones resultantes.

1.6 Solución de la transformada de Laplace de sistemas

La transformada de Laplace puede usarse para resolver sistemas de ecuaciones que involucren derivadas e integrales.

EJEMPLO 1.22

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales y condiciones iniciales para las funciones x y y:

$$\begin{aligned} x'' - 2x' + 3y' + 2y &= 4, \\ 2y' - x' + 3y &= 0, \\ x(0) = x'(0) = y(0) &= 0. \end{aligned}$$

Empiece por aplicar la transformada de Laplace de las ecuaciones diferenciales, incorporando las condiciones iniciales. Obtiene

$$\begin{aligned} s^2X - 2sX + 3sY + 2Y &= \frac{4}{s}, \\ 2sY - sX + 3Y &= 0. \end{aligned}$$

Resuelva estas ecuaciones para $X(s)$ y $Y(s)$ y obtendrá

$$X(s) = \frac{4s+6}{s^2(s+2)(s-1)} \text{ y } Y(s) = \frac{2}{s(s+2)(s-1)}.$$

Una descomposición en fracciones parciales produce

$$X(s) = -\frac{7}{2}\frac{1}{s} - 3\frac{1}{s^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{s+2} + \frac{10}{3}\frac{1}{s-1}$$

y

$$Y(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{3}\frac{1}{s+2} + \frac{2}{3}\frac{1}{s-1}.$$

Aplicando la transformada inversa, obtiene la solución

$$x(t) = -\frac{7}{2} - 3t + \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{10}{3}e^t$$

y

$$y(t) = -1 + \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^t. \blacksquare$$

El análisis de sistemas mecánicos y eléctricos que tienen varios componentes pueden encauzarse a sistemas de ecuaciones diferenciales, las cuales pueden resolverse usando la transformada de Laplace.

EJEMPLO 1.23

Consideramos el sistema masa/resorte de la figura 1.35. Sea $x_1 = x_2 = 0$ en la posición de equilibrio, donde los pesos están en reposo. Elija la dirección de la derecha como positiva y suponga que los pesos están en las posiciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en el tiempo t.

Aplicando dos veces la ley de Hooke, la fuerza recuperada en m_1 es

$$-k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1)$$

y en m_2 es

$$-k_2(x_2 - x_1) - k_3x_2.$$

Por la segunda ley del movimiento de Newton,

$$m_1x_1'' = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2 + f_1(t)$$

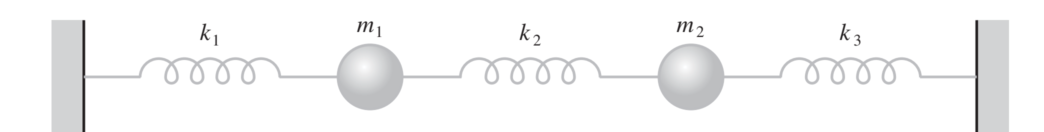


FIGURA 1.35

y

$$m_2x_2'' = k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + f_2(t).$$

Estas ecuaciones aceptan que el amortiguamiento es despreciable, pero permiten que las funciones de fuerza actúen en cada masa.

Como un ejemplo específico, suponga $m_1 = m_2 = 1$ y $k_1 = k_3 = 4$ mientras $k_2 = \frac{5}{2}$. Suponga que $f_2(t) = 0$, de manera que ninguna fuerza de impulso externa actúe en la segunda masa, mientras que una fuerza de magnitud $f_1(t) = 2[1 - H(t - 3)]$ actúa en la primera. Ésta pega a la primera masa con una fuerza de magnitud constante 2 durante los primeros 3 segundos, después se apaga. Ahora el sistema de ecuaciones para las funciones de desplazamiento es

$$x_1'' = -\frac{13}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_2 + 2[1 - H(t-3)],$$

$$x_2'' = \frac{5}{2}x_1 - \frac{13}{2}x_2.$$

Si las masas están inicialmente en reposo en la posición de equilibrio, entonces

$$x_1(0) = x_2(0) = x_1'(0) = x_2'(0) = 0.$$

Aplique la transformada de Laplace a cada ecuación del sistema para obtener

$$s^2X_1 = -\frac{13}{2}X_1 + \frac{5}{2}X_2 + \frac{2(1-e^{-3s})}{s},$$
$$s^2X_2 = \frac{5}{2}X_1 - \frac{13}{2}X_2.$$

Resuelva esto para obtener

$$X_1(s) = \frac{2}{(s^2+9)(s^2+4)}\left(s^2 + \frac{13}{2}\right)\frac{1}{s}(1 - e^{-3s})$$

y

$$X_2(s) = \frac{5}{(s^2+9)(s^2+4)}\frac{1}{s}(1 - e^{-3s}).$$

Como preparación para aplicar la transformada inversa de Laplace, use una descomposición en fracciones parciales para escribir

$$X_1(s) = \frac{13}{36}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{9}\frac{s}{s^2+9} - \frac{13}{36}\frac{1}{s}e^{-3s} + \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4}e^{-3s} + \frac{1}{9}\frac{s}{s^2+9}e^{-3s}$$

y

$$X_2(s) = \frac{5}{36}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{9}\frac{s}{s^2+9} - \frac{5}{36}\frac{1}{s}e^{-3s} + \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4}e^{-3s} - \frac{1}{9}\frac{s}{s^2+9}e^{-3s}$$

Ahora es rutina aplicar la transformada inversa de Laplace para obtener la solución

$$\begin{aligned} x_1(t) =& \frac{13}{36} - \frac{1}{4}\cos(2t) - \frac{1}{9}\cos(3t) \\ &+ \left[-\frac{13}{36} + \frac{1}{4}\cos(2(t-3)) - \frac{1}{9}\cos(3(t-3))\right] H(t-3), \\ x_2(t) =& \frac{5}{36} - \frac{1}{4}\cos(2t) + \tfrac{1}{9}\cos(3t) \\ &+ \left[-\frac{5}{36} + \frac{1}{4}\cos(2(t-3)) - \frac{1}{9}\cos(3(t-3))\right] H(t-3). \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.24

En el circuito de la figura 1.36, suponga que el interruptor está cerrado en el tiempo cero. Desea conocer la corriente en cada vuelta. Suponga que las corrientes en ambos ciclos y las cargas en los condensadores inicialmente son cero. Aplique las leyes de Kirchhoff a cada ciclo para obtener

$$\begin{aligned} 40i_1 + 120(q_1 - q_2) &= 10 \\ 60i_2 + 120q_2 &= 120(q_1 - q_2). \end{aligned}$$

Como $i = q'$, escriba $q(t) = \int_0^t i(\text{ww}\tau)d\tau + q(0)$. Aplique las dos ecuaciones de circuitos y obtendrá

$$40i_1 + 120\int_0^t [i_1(\tau) - i_2(\tau)]\,d\tau + 120[q_1(0) - q_2(0)] = 10$$

$$60i_2 + 120\int_0^t i_2(\tau)d\tau + 120q_2(0) = 120\int_0^t [i_1(\tau) - i_2(\tau)]\,d\tau + 120[q_1(0) - q_2(0)].$$

Ponga $q_1(0) = q_2(0) = 0$ en este sistema para obtener

$$\begin{aligned} 40i_1 + 120\int_0^t [i_1(\tau) - i_2(\tau)]\,d\tau &= 10 \\ 60i_2 + 120\int_0^t i_2(\tau)\,d\tau &= 120\int_0^t [i_1(\tau) - i_2(\tau)]\,d\tau. \end{aligned}$$

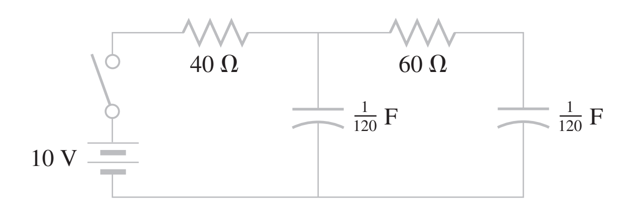


FIGURA 1.36

Aplique la transformada de Laplace a cada ecuación para obtener

$$40I_1 + \frac{120}{s}I_1 - \frac{120}{s}I_2 = \frac{10}{s}$$
$$60I_2 + \frac{120}{s}I_2 = \frac{120}{s}I_1 - \frac{120}{s}I_2.$$

Después de algunos rearreglos, tendrá

$$(s+3)I_1 - 3I_2 = \frac{1}{4}$$
$$2I_1 - (s+4)I_2 = 0.$$

Resuelva esto para obtener

$$I_1(s) = \frac{s+4}{4(s+1)(s+6)} = \frac{3}{20}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{10}\frac{1}{s+6}$$

y

$$I_2(s) = \frac{1}{2(s+1)(s+6)} = \frac{1}{10}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{10}\frac{1}{s+6}$$

Ahora use la transformada inversa de Laplace para encontrar la solución

$$i_1(t) = \frac{3}{20}e^{-t} + \frac{1}{10}e^{-6t},\ i_2(t) = \frac{1}{10}e^{-t} - \frac{1}{10}e^{-6t}. \blacksquare$$

SECCIÓN 1.6 PROBLEMAS

En cada uno de los problemas del 1 al 10, use la transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales para el sistema.

1. $x' - 2y' = 1,\ x' + y - x = 0;\ x(0) = y(0) = 0$

2. $2x' - 3y + y' = 0,\ x' + y' = t\ ;\ x(0) = y(0) = 0$

3. $x' + 2y' - y = 1,\ 2x' + y = 0;\ x(0) = y(0) = 0$

4. $x' + y' - x = \cos(2t),\ x' + 2y' = 0;\ x(0) = y(0) = 0$

5. $3x' - y = 2t,\ x' + y' - y = 0;\ x(0) = y(0) = 0$

6. $x' + 4y' - y = 0,\ x' + 2y = e^{-t};\ x(0) = y(0) = 0$

7. $x' + 2x - y' = 0,\ x' + y + x = t^2;\ x(0) = y(0) = 0$

8. $x' + 4x - y = 0,\ x' + y' = t\ ;\ x(0) = y(0) = 0$

9. $x' + y' + x - y = 0,\ x' + 2y' + x = 1;\ x(0) = y(0) = 0$

10. $x' + 2y' - x = 0,\ 4x' + 3y' + y = -6;\ x(0) = y(0) = 0$

11. Use la transformada de Laplace para resolver el sistema

$$y_1' - 2y_2' + 3y_1 = 0$$
$$y_1 - 4y_2' + 3y_3' = t,$$
$$y_1 - 2y_2' + 3y_3' = -1 \quad y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0.$$

12. Encuentre las corrientes en el circuito de la figura 1.37, suponiendo que las corrientes y las cargas son cero inicialmente y que $E(t) = 2H(t-4) - H(t-5)$.

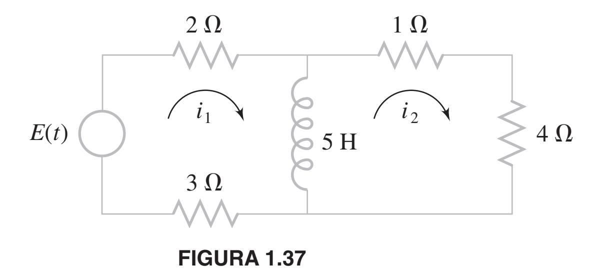


FIGURA 1.37

13. Encuentre las corrientes en el circuito de la figura 1.37 si las corrientes y las cargas inicialmente son cero y $E(t) = 1 - H(t-4)\,\text{sen}(2(t-4))$.

14. Encuentre las funciones de desplazamiento de las masas en el sistema de la figura 1.38. Desprecie el amortiguamiento y suponga que los desplazamientos y las velocidades son cero inicialmente, y que las fuerzas externas son $f_1(t) = 2$ y $f_2(t) = 0$.

15. Encuentre las funciones de desplazamiento en el sistema de la figura 1.38 si $f_1(t) = 1 - H(t-2)$ y $f_2(t) = 0$. Suponga que los desplazamientos y las velocidades iniciales son cero.

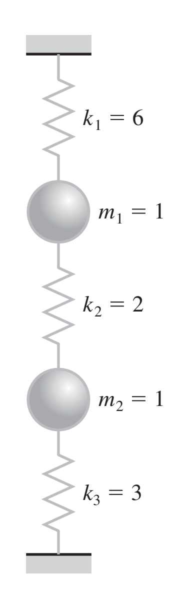


FIGURA 1.38

16. Considere el sistema de la figura 1.39. Sea M sometida a una fuerza de impulso periódica $f(t) = A\text{sen}(\omega t)$. Las masas están inicialmente en reposo en la posición de equilibrio.

(a) Obtenga y resuelva el problema con valores iniciales para las fuerzas de desplazamiento.

(b) Pruebe que, si m y k_2 son elegidos de manera que $\omega = \sqrt{k_2/m}$, entonces la masa m cancela las vibraciones forzadas de M. En este caso m es una vibración absorbente.

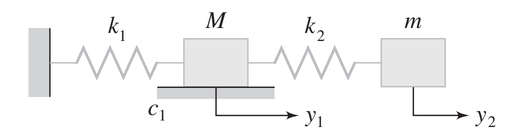


FIGURA 1.39

17. Dos objetos de masas m_1 y m_2 están atados en los extremos opuestos de un resorte teniendo una constante de resorte k (figura 1.40). Se coloca todo el aparato sobre una mesa muy barnizada. Pruebe que, si se estira y suelta desde el reposo, las masas oscilan una con respecto a la otra con periodo

$$2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1+m_2)}}.$$

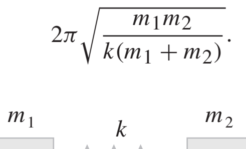


FIGURA 1.40

18. Resuelva para las corrientes en el circuito de la figura 1.41 si $E(t) = 5H(t-2)$ y las corrientes iniciales son cero.

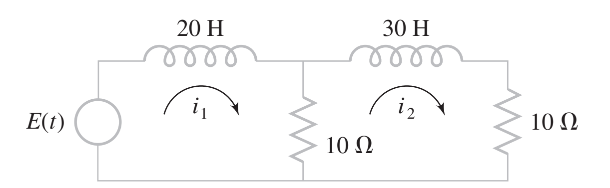


FIGURA 1.41

19. Resuelva para las corrientes en el circuito de la figura 1.41 si $E(t) = 5\delta(t-1)$.

20. Como se muestra en la figura 1.42, dos tanques están conectados por una serie de tuberías. El tanque 1 contiene inicialmente 60 galones de salmuera en el cual disuelven 11 libras de sal. El tanque 2 contiene inicialmente 7 libras de sal disuelta en 18 galones de salmuera. Empezando en el tiempo cero, la mezcla contiene $\frac{1}{6}$ de libra de sal para cada galón de agua que es bombeado en el tanque 1 a una razón de 2 galones por minuto, mientras las soluciones de agua salada se intercambian entre los dos tanques y también salen del tanque 2 en las razones que se muestran en el diagrama. Cuatro minutos después del tiempo cero, se vierte sal en el tanque 2 a razón de 11 libras por minuto por un periodo de 2 minutos. Determine la cantidad de sal en cada tanque para cualquier tiempo $t \geq 0$.

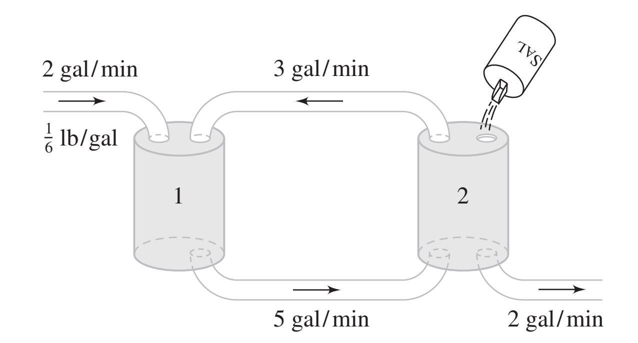


FIGURA 1.42

21. Dos tanques están conectados por una serie de tuberías como se muestra en la figura 1.43. El tanque 1 contiene inicialmente 200 galones de salmuera en donde se disuelven 10 libras de sal. El tanque 2 contiene inicialmente 5 libras de sal disueltas en 100 galones de agua. Empezando en el tiempo cero, se bombea agua pura en el tanque 1 a razón de 3 galones por minuto, mientras las soluciones de salmuera se intercambian entre los tanques en las razones que se muestran en el diagrama. Tres minutos después del tiempo cero, 5 libras de sal son descargadas en el tanque 2. Determine la cantidad de sal en cada tanque para cualquier tiempo $t \geq 0$.

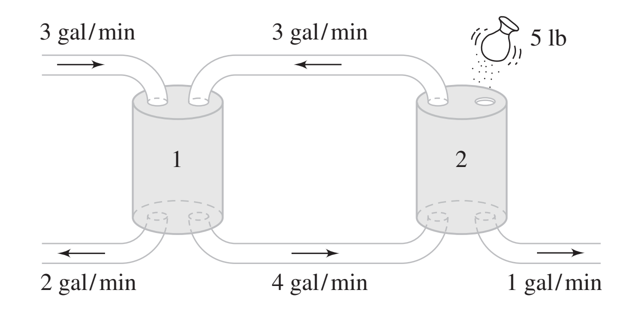


FIGURA 1.43

1.7 Ecuaciones diferenciales con coeficientes polinomiales

Algunas veces la transformada de Laplace puede ser usada para resolver ecuaciones diferenciales lineales que tienen polinomios como coeficientes. Para esto es necesario que la transformada de Laplace de $tf(t)$ sea el negativo de la derivada de la transformada de Laplace de $f(t)$.

TEOREMA 1.13

Sea $\mathfrak{L}[f](s) = F(s)$ para $s > b$ y suponga que F es derivable. Entonces

$$\mathfrak{L}[tf(t)](s) = -F'(s)$$

para $s > b$.

Prueba Derive bajo el signo de la integral para calcular

$$\begin{aligned} F'(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds}(e^{-st} f(t))\,dt \\ &= \int_0^\infty -te^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}[-tf(t)]\,dt \\ &= \mathfrak{L}[-tf(t)](s), \end{aligned}$$

y esto es equivalente a la conclusión del teorema. ■

Aplicando este resultado n veces, se llega al siguiente.

COROLARIO 1.1

Sea $\mathfrak{L}[f](s) = F(s)$ para $s > b$ y sea n un entero positivo. Suponga que F es derivable n veces. Entonces, para $s > b$,

$$\mathfrak{L}[t^n f(t)](s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s). \quad ■$$

EJEMPLO 1.25

Considere el problema

$$ty'' + (4t - 2)y' - 4y = 0; \qquad y(0) = 1.$$

Si escribe esta ecuación diferencial en la forma $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, entonces debe elegir $p(t) = (4t - 2)/t$, la cual no está definida en $t = 0$, donde está dada la condición inicial. Este problema no es del tipo para los que hay teorema de existencia/unicidad. Más aún, sólo hay una condición inicial. Sin embargo, busque funciones que satisfagan el problema como fue formulado.

Aplique la transformada de Laplace a la ecuación diferencial y obtiene

$$\mathfrak{L}[ty''] + 4\mathfrak{L}[ty''] - 2\mathfrak{L}[y'] - 4\mathfrak{L}[y] = 0.$$

Calcule los primeros tres términos como sigue. Primero,

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[ty''] &= -\frac{d}{ds}\,\mathfrak{L}[y'] = -\frac{d}{ds}\,[s^2Y - sy(0) - y'(0)]\\ &= -2sY - s^2Y' + 1\end{aligned}$$

ya que $y(0) = 1$ y $y'(0)$, aunque desconocido, es constante y tiene derivada cero. Después,

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[ty'] &= -\frac{d}{ds}\,[y']\\ &= -\frac{d}{ds}\,[sY - y(0)] = -Y - sY'.\end{aligned}$$

Por último,

$$\mathfrak{L}[y'] = sY - y(0) = sY - 1.$$

Por tanto, la transformada de una ecuación diferencial es

$$-2sY' - s^2Y + 1 - 4Y - 4sY' - 2sY + 2 - 4Y = 0.$$

Entonces

$$Y' + \frac{4s+8}{s(s+4)}Y = \frac{3}{s(s+4)}.$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de primer orden, y encontrará un factor de integración. Primero calcule

$$\int \frac{4s+8}{s(s+4)}\,ds = \ln[s^2(s+4)^2].$$

Entonces

$$e^{\ln[(s^2(s+4)^2]} = s^2(s+4)^2$$

es un factor de integración. Si multiplica la ecuación diferencial por este factor obtiene

$$s^2(s+4)^2 Y' + (4s+8)s(s+4)Y = 3s(s+4),$$

o

$$[s^2(s+4)^2 Y]' = 3s(s+4).$$

Integre para obtener

$$s^2(s+4)^2 Y = s^3 + 6s^2 + C.$$

Entonces

$$Y(s) = \frac{s}{(s+4)^2} + \frac{6}{(s+4)^2} + \frac{C}{s^2(s+4)^2}.$$

Aplique la transformada inversa de Laplace, para obtener

$$y(t) = e^{-4t} + 2te^{-4t} + \frac{C}{32}[-1 + 2t + e^{-4t} + 2te^{-4t}].$$

Esta función satisface la ecuación diferencial y la condición $y(0) = 1$ para cualquier número real C. Este problema no tiene una solución única. ■

Cuando aplica la transformada de Laplace a una ecuación diferencial con coeficiente constante $y'' + Ay' + By = f(t)$, obtiene una expresión algebraica para Y. En este ejemplo, donde aparecen polinomios como coeficientes, obtiene una ecuación diferencial para Y ya que el proceso de calcular la transformada de $t^k y(t)$ involucra derivar $Y(s)$.

En el ejemplo siguiente, necesitará el siguiente hecho.

TEOREMA 1.14

Sea f continua a pedazos en $[0, k]$ para todo número k positivo, y suponga que existen números M y b tales que $|f(t)| \leq Me^{bt}$ para $t \geq 0$. Sea $\mathfrak{L}[f] = F$. Entonces

$$\lim_{s \to \infty} F(s) = 0.$$

Prueba Escriba

$$|F(s)| = \left| \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \right| \leq \int_0^\infty e^{-st} M e^{bt}\, dt$$
$$= \frac{M}{b-s} e^{-(s-b)t} \Big]_0^\infty = \frac{M}{s-b} \to 0$$

conforme $s \to \infty$. ■

Este resultado permitirá resolver el siguiente problema con valores iniciales.

EJEMPLO 1.26

Suponga que quiere resolver

$$y'' + 2ty' - 4y = 1; \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

A diferencia del ejemplo anterior, este problema satisface las hipótesis del teorema de existencia/unicidad.

Aplique la transformada de Laplace a la ecuación diferencial para obtener

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2\mathfrak{L}[ty'](s) - 4Y(s) = \frac{1}{s}.$$

Ahora $y(0) = y'(0) = 0$ y

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[ty'](s) &= -\frac{d}{ds}\,[\mathfrak{L}[y'](s)] \\ &= -\frac{d}{ds}\,[sY(s) - y(0)] = -Y(s) - sY'(s).\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que

$$s^2Y(s) - 2Y(s) - 2sY'(s) - 4Y(s) = \frac{1}{s},$$

o

$$Y' + \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{2}\right)Y = -\frac{1}{2s^2}.$$

Ésta es una ecuación diferencial lineal de primer orden para Y. Para encontrar un factor de integración, primero calcule

$$\int\left(\frac{3}{s} - \frac{s}{2}\right)ds = 3\ln(s) - \frac{1}{4}s^2.$$

La exponencial de esta función, o

$$s^3e^{-s^2/4},$$

es un factor de integración. Multiplique la ecuación diferencial por esta función para obtener

$$(s^3e^{-s^2/4}Y)' = -\frac{1}{2}se^{-s^2/4}.$$

Entonces

$$s^3e^{-s^2/4}Y = e^{-s^2/4} + C$$

así

$$Y(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{C}{s^3}e^{s^2/4}.$$

No tiene ninguna otra condición inicial para determinar C. Sin embargo, para tener $\text{lím}_{s\to\infty} Y(s) = 0$, debe elegir $C = 0$. Entonces $Y(s) = 1/s^3$ así

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2. \blacksquare$$

SECCIÓN 1.7 PROBLEMAS

Use la transformada de Laplace para resolver cada uno de los problemas del 1 al 10.

1. $t^2y' - 2y = 2$

2. $y'' + 4ty' - 4y = 0;\ y(0) = 0,\ y'(0) = -7$

3. $y'' - 16ty' + 32y = 14;\ y(0) = y'(0) = 0$

4. $y'' + 8ty' - 8y = 0;\ y(0) = 0,\ y'(0) = -4$

5. $ty'' + (t - 1)y' + y = 0;\ y(0) = 0$

6. $y'' + 2ty' - 4y = 6;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

7. $y'' + 8ty' = 0;\ y(0) = 4,\ y'(0) = 0$

8. $y'' - 4ty' + 4y = 0;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 10$

9. $y'' - 8ty' + 16y = 3;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

10. $(1 - t)y'' + ty' - y = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = -1$

LA SERIE DE FOURIER DE UNA
FUNCION CONVERGENCIA DE UN
SERIE DE FOURIER SERIE DE FO
EN COSENOS EN SENOS INTEGRA

CAPÍTULO 2

Series de Fourier



En 1807, Joseph Fourier presentó un documento a la Academia Francesa de las Ciencias como parte de la competencia por un premio ofrecido al mejor tratamiento matemático de la conducción de calor. En las páginas de este trabajo, Fourier sorprendió a sus contemporáneos ya que afirmaba que las funciones "arbitrarias" (como podrían ser las temperaturas iniciales) podrían ampliarse en series de senos y cosenos. Las consecuencias de la obra de Fourier han tenido un enorme impacto en áreas tan diversas como la ingeniería, la música, la medicina, y el análisis de datos.

2.1 ¿Por qué las series de Fourier?

Una serie de Fourier es la representación de una función como una serie de constantes multiplicadas por funciones seno y/o coseno de diferentes frecuencias. Para mostrar el interés que tienen esas series, se le presenta un problema del tipo que llevó a Fourier a considerarlas.

Considere una barra delgada de longitud π, de sección transversal de densidad constante y uniforme. Sea $u\ (x, t)$ la temperatura en el tiempo t en la sección transversal de la barra en x, para $0 \leq x \leq \pi$. La ecuación en derivadas parciales que satisface u es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < \pi, t > 0, \tag{2.1}$$

en donde k es una constante que depende del material de la barra. Suponga que los extremos izquierdo y derecho de la barra se mantienen a temperatura cero

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \text{para } t > 0, \tag{2.2}$$

y que la temperatura a lo largo de la barra en el tiempo $t = 0$ está especificada por

$$u(x, 0) = f(x) = x(\pi - x). \tag{2.3}$$

Intuitivamente, la ecuación de calor junto con la distribución de la temperatura inicial a lo largo de la barra y la información de que los extremos se mantienen a cero grados durante todo el tiempo, son suficientes para determinar la distribución de la temperatura $u(x, t)$ a lo largo de la barra en cualquier tiempo.

Mediante un proceso que ahora lleva su nombre y que desarrollará cuando estudie las ecuaciones en derivadas parciales, Fourier encontró que las funciones que satisfacen la ecuación de calor (2.1) y las condiciones en los extremos de la barra, las ecuaciones (2.2), tienen la forma

$$u_n(x, t) = b_n \operatorname{sen}(nx)e^{-kn^2t}, \tag{2.4}$$

en donde n puede ser cualquier entero positivo y b_n cualquier número real. Debe usar estas funciones para encontrar una que también satisfaga la condición (2.3).

Una simple elección del entero positivo n_0 y la constante b_{n_0} no funciona. Si $u(x, t) = b_{n_0} \operatorname{sen}(n_0x)e^{-kn_0^2t}$, entonces necesita

$$u(x, 0) = x(\pi - x) = b_{n_0} \operatorname{sen}(n_0x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq \pi,$$

una imposibilidad. Un polinomio no puede ser igual a una constante multiplicada por una función seno en $[0, \pi]$ (o en cualquier intervalo no trivial).

Lo siguiente es intentar una suma finita de funciones de la forma (2.4),

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{N} b_n \operatorname{sen}(nx)e^{-kn^2t}. \tag{2.5}$$

Tal función seguirá satisfaciendo la ecuación de calor y las condiciones (2.2). Para satisfacer la condición (2.3), debe elegir N y $b_n's$ de manera que:

$$u(x, 0) = x(\pi - x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \operatorname{sen}(nx) \quad \text{para } 0 \leq x \leq \pi.$$

Pero esto también es imposible. Una suma finita de múltiplos constantes de las funciones seno no puede ser igual a un polinomio en $[0, \pi]$.

En este punto Fourier tuvo una inspiración brillante. Como ninguna suma finita de funciones (2.4) puede ser una solución, entonces intentó con una serie infinita:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx) e^{-kn^2 t}. \tag{2.6}$$

Esta función satisfará la ecuación de calor así como las condiciones $u(x, 0) = u(\pi, 0) = 0$. Para satisfacer la condición (2.3) debe escoger las $b_n's$ de manera que:

$$u(x,0) = x(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx) \quad \text{para } 0 \le x \le \pi. \tag{2.7}$$

Esto es muy diferente que intentar representar el polinomio $x(\pi - x)$ por la suma trigonométrica finita (2.5). Fourier afirmaba que la ecuación (2.7) es válida para $0 \le x \le \pi$ si los coeficientes se eligen como:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \operatorname{sen}(nx)\, dx = \frac{4}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n^3}.$$

Sustituyendo estos coeficientes en la solución propuesta (2.6), Fourier afirmaba que la solución a este problema de conducción de calor con la temperatura inicial dada es

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \operatorname{sen}(nx) e^{-kn^2 t}.$$

La afirmación que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \operatorname{sen}(nx) = x(\pi - x) \quad \text{para } 0 \le x \le \pi$$

fue demasiado radical para que la aceptaran los contemporáneos de Fourier; las matemáticas de ese tiempo no eran adecuadas para probar este tipo de aseveraciones. Ésta fue la falta de rigor que motivó a la Academia a rechazar la publicación del artículo, pero las implicaciones no fueron olvidadas por los colegas de Fourier. No hay nada particular en $x(\pi - x)$ como una distribución de temperatura inicial y pueden usarse diferentes funciones. Lo que realmente afirmaba Fourier era que para una extensa clase de funciones f, los coeficientes b_n pueden elegirse de manera que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$ en $[0, \pi]$.

Con el tiempo, esta afirmación y otras aún más generales sobre estas series propuestas por Fourier fueron probadas. Ahora sigue un análisis de las ideas de Fourier y algunas de sus ramificaciones.

SECCIÓN 2.1 PROBLEMAS

1. En el mismo conjunto de ejes, haga una gráfica de $x(\pi - x)$ y $\sum_{n=1}^{5}(4/\pi)([1 - (-1)^n]/n^3) \operatorname{sen}(nx)$ para $0 \le x \le \pi$. Repita esto para las sumas parciales $\sum_{n=1}^{10}(4/\pi)([1 - (-1)^n]/n^3) \operatorname{sen}(nx)$ y $\sum_{n=1}^{20}(4/\pi)([1 - (-1)^n]/n^3) \operatorname{sen}(nx)$. Esto permitirá ver la exactitud de la intuición de Fourier al afirmar que $x(\pi - x)$ puede representarse correctamente por $\sum_{n=1}^{\infty}(4/\pi)([1 - (-1)^n]/n^3) \operatorname{sen}(nx)$ en este intervalo.

2. Pruebe que un polinomio no puede ser un múltiplo constante de $\operatorname{sen}(nx)$ en $[0, \pi]$ para cualquier entero positivo n. *Sugerencia:* una manera es aplicar la inducción sobre el grado del polinomio.

3. Pruebe que un polinomio no puede ser igual a una suma de la forma $\sum_{j=0}^{n} c_j \operatorname{sen}(jx)$ para $0 \le x \le \pi$, donde las c_j' son números reales.

2.2 La serie de Fourier de una función

Sea $f(x)$ definida para $-L \leq x \leq L$. Por el momento, suponga sólo que $\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$ existe. Quiere explorar la posibilidad de elegir números $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ tales que

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{2.8}$$

para $-L \leq x \leq L$. Algunas veces esto es pedir demasiado, pero se puede lograr bajo ciertas condiciones sobre f. Sin embargo, para empezar, acepte el mejor de los mundos y suponga por el momento que la ecuación (2.8) es cierta. ¿Qué dice esto acerca de la elección de los coeficientes? Hay un mecanismo ingenioso para contestar esta pregunta, que era conocido por Fourier y otros de su época. Necesita el siguiente lema elemental.

LEMA 2.1

Sea n y m enteros no negativos. Entonces

1.

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0.$$

2. Si $n \neq m$, entonces

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0.$$

3. Si $n \neq 0$, entonces

$$\int_{-L}^{L} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = L. \quad \blacksquare$$

El lema se prueba integrando directamente.

Ahora, para encontrar a_0, integre la serie (2.8) término a término (suponiendo por ahora que puede hacerlo):

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^{L} dx$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Todas las integrales de la derecha valen cero, excepto, posiblemente, la primera, y esta ecuación se reduce a:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = La_0.$$

Por tanto,

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\,dx.$$

Ahora, determine a_k para cualquier entero positivo k. Multiplique la ecuación (2.8) por $\cos(k\pi x/L)$ e integre cada término de la serie resultante para obtener

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}a_0\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx + b_n\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx.$$

Por el lema, todas las integrales de la derecha son cero excepto la $\int_{-L}^{L}\cos(k\pi x/L)\cos(k\pi x/L)dx$, que aparece cuando $n = k$, y esta integral es igual a L. El lado derecho de esta ecuación se reduce a un solo término y la ecuación se convierte en:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx = a_k L,$$

de donde

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx.$$

Para encontrar b_k, regrese a la ecuación (2.8). Esta vez multiplique la ecuación por $\operatorname{sen}(k\pi x/L)$ e integre cada término para obtener

$$\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}a_0\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx + b_n\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx.$$

Nuevamente, por el lema, todos los términos de la derecha son cero a excepción de la $\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}(n\pi x/L)\operatorname{sen}(k\pi x/L)dx$ cuando $n = k$, y esta ecuación se reduce a

$$\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx = b_k L.$$

Por tanto,

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx.$$

Ha "encontrado" los coeficientes en el desarrollo en la serie trigonométrica (2.8). Por supuesto, este análisis es débil debido al intercambio de las series y las integrales, lo que no siempre está justificado. Sin embargo, este argumento señala cómo pueden elegirse las constantes, al menos bajo ciertas condiciones, y sugiere la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.1 *Serie y coeficientes de Fourier*

Sea f una función Riemann integrable en $[-L, L]$.

1. Los números

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

y

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

son los coeficientes de Fourier de f en $[-L, L]$.

2. La serie

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

es la serie de Fourier de f en $[-L, L]$ cuando las constantes son los coeficientes de Fourier de f en $[-L, L]$.

EJEMPLO 2.1

Sea $f(x) = x$ para $-\pi \leq x \leq \pi$. Escriba la serie de Fourier de f en $[-\pi, \pi]$. Los coeficientes son

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{n^2\pi}\cos(nx) + \frac{x}{n\pi}\,\text{sen}(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\text{sen}(nx)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{n^2\pi}\,\text{sen}(nx) - \frac{x}{n\pi}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{n}\cos(n\pi) = \frac{2}{n}(-1)^{n+1},$$

ya que $\cos(n\pi) = (-1)^n$ si n es un entero. La serie de Fourier de x en $[-\pi, \pi]$ es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\,\text{sen}(nx) = 2\,\text{sen}(x) - \text{sen}(2x) + \frac{2}{3}\,\text{sen}(3x) - \frac{1}{2}\,\text{sen}(4x) + \frac{2}{5}\,\text{sen}(5x) - \cdots.$$

En este ejemplo, el término constante y los coeficientes de los cosenos son todos cero y la serie de Fourier tiene sólo términos en senos. ■

EJEMPLO 2.2

Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -3 \leq x \leq 0 \\ x & \text{para } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}.$$

Aquí $L = 3$ y los coeficientes de Fourier son

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_{0}^{3} x\,dx = \frac{3}{2},$$

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx\\ &= \frac{1}{3}\int_{0}^{3} x\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx\\ &= \frac{3}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) + \frac{x}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\Bigg]_0^3\\ &= \frac{3}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1],\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx = \frac{1}{3}\int_{0}^{3} x\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx\\ &= \frac{3}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{3}\right) - \frac{x}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\Bigg]_0^3\\ &= \frac{3}{n\pi}(-1)^{n+1}.\end{aligned}$$

La serie de Fourier de f en $[-3, 3]$ es

$$\frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1]\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) + \frac{3}{n\pi}(-1)^{n+1}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\right). \blacksquare$$

Aunque $f(x)$ sea bastante sencilla, $\int_{-L}^{L} f(x)\cos(n\pi x/L)\,dx$ y $\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}(n\pi x/L)\,dx$ pueden requerir de mucho trabajo si se calculan a mano. Se recomienda ampliamente el uso de un paquete de software para evaluar integrales definidas.

En estos ejemplos, escriba la serie de Fourier de f, pero no le pida que sea igual a $f(x)$. Para la mayoría de las x no es obvio cuál es la suma de la serie de Fourier. Sin embargo, en algunos casos es evidente que la serie no es igual a $f(x)$. Considere nuevamente $f(x) = x$ en $[-\pi, \pi]$ en el ejemplo 2.1. En $x = \pi$ y en $x = -\pi$, cada término de la serie de Fourier es cero, aunque $f(\pi) = \pi$ y $f(-\pi) = -\pi$. Así que, incluso para funciones muy sencillas, puede haber puntos donde la serie de Fourier no converja a $f(x)$. Más adelante determine la suma de la serie de Fourier de una función; mientras no lo haga, no sabrá la relación entre la serie de Fourier y la función misma.

2.2.1 Funciones pares e impares

Algunas veces ahorrará trabajo en el cálculo de los coeficientes de Fourier, si observa las propiedades especiales de $f(x)$.

DEFINICIÓN 2.2

Función par:

f es una función par en $[-L, L]$ si $f(-x) = f(x)$ para $-L \leq x \leq L$.

Función impar:

f es una función impar en $[-L, L]$ si $f(-x) = -f(x)$ para $-L \leq x \leq L$.

Por ejemplo, x^2, x^4, $\cos(n\pi x/L)$, y $e^{-|x|}$ son funciones pares en cualquier intervalo $[-L, L]$. En la figura 2.1 se muestran las gráficas de $y = x^2$ y $y = \cos(5\pi x/3)$. La gráfica de tales funciones para $-L \leq x \leq 0$ es la reflexión a lo largo del eje y de la gráfica para $0 \leq x \leq L$ (figura 2.2).

Las funciones x, x^3, x^5 y $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$ son funciones impares en cualquier intervalo $[-L, L]$. En la figura 2.3 se muestran las gráficas de $y = x$, $y = x^3$ y $y = \operatorname{sen}(5\pi x/2)$. La gráfica de una función impar para $-L \leq x \leq 0$ es la reflexión a lo largo del eje vertical y después a lo largo del eje horizontal de la gráfica para $0 \leq x \leq L$ (figura 2.4). Si f es impar, entonces $f(0) = 0$, ya que

$$f(-0) = f(0) = -f(0).$$

Por supuesto, la mayoría de las funciones no son ni par ni impar. Por ejemplo $f(x) = e^x$ no es ni par ni impar en ningún intervalo $[-L, L]$.

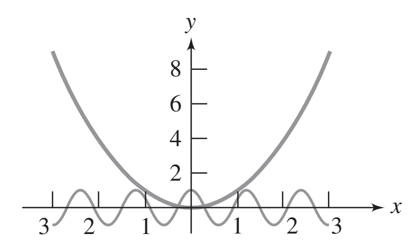


FIGURA 2.1 *Gráficas de las funciones pares* $y = x^2$ *y* $y = \cos(5\pi x/3)$.

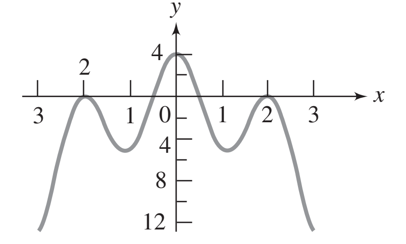


FIGURA 2.2 *Gráfica de una función par típica, simétrica respecto al eje y.*

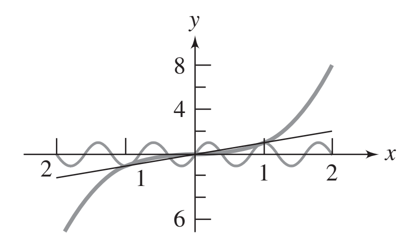


FIGURA 2.3 *Gráficas de las funciones impares* $y = x$, $y = x^3$ y $y = \operatorname{sen}(5\pi x/2)$.

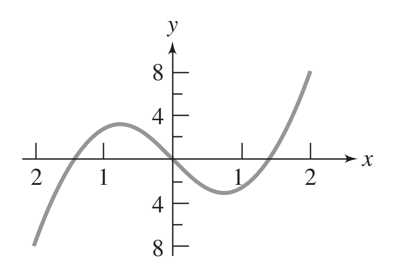


FIGURA 2.4 *Gráfica de una función impar típica, simétrica respecto al origen.*

Las funciones pares e impares se comportan igual que los enteros pares e impares bajo la multiplicación:

$$\text{par} \cdot \text{par} = \text{par},$$
$$\text{impar} \cdot \text{impar} = \text{par},$$

y

$$\text{par} \cdot \text{impar} = \text{impar}.$$

Por ejemplo, $x^2 \cos(n\pi x/L)$ es una función par (producto de dos funciones pares); $x^2 \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ es impar (producto de una función par con una función impar); y $x^3 \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ es par (producto de dos funciones impares).

Ahora recuerde del cálculo que

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0 \quad \text{si } f \text{ es impar en } [-L, L]$$

y

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx \quad \text{si } f \text{ es par en } [-L, L].$$

Estas integrales se sugieren en las figuras 2.2 y 2.4. En la figura 2.4, f es impar en $[-L, L]$, y el área acotada por la gráfica y el eje horizontal para $-L \leq x \leq 0$ es exactamente el negativo de la acotada por la gráfica y el eje horizontal para $0 \leq x \leq L$. Esto hace que $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$. En la figura 2.2, donde f es par, el área a la izquierda del eje vertical, para $-L \leq x \leq 0$, es igual a la de la derecha, para $0 \leq x \leq L$, así $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$.

Una ramificación de estas ideas para los coeficientes de Fourier es que si f es una función par o impar, entonces se puede ver inmediatamente que algunos coeficientes de Fourier son cero y no necesita efectuar explícitamente la integración. Esto aparece en el ejemplo 2.1 con $f(x) = x$, que es una función impar en $[-\pi, \pi]$. Aquí todos los coeficientes del coseno son cero, ya que $x \cos(nx)$ es una función impar.

EJEMPLO 2.3

Encontrará la serie de Fourier de $f(x) = x^4$ en $[-1, 1]$. Como f es una función par, $x^4 \operatorname{sen}(n\pi x)$ es impar y sabe de inmediato que los coeficientes del seno b_n son cero. Para los otros coeficientes, calcule

$$a_0 = \int_{-1}^{1} x^4\,dx = 2\int_{0}^{1} x^4\,dx = \frac{2}{5}$$

y

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^{1} x^4 \cos(n\pi x)\,dx \\ &= 2\int_{0}^{1} x^4 \cos(n\pi x)\,dx = 8\frac{n^2\pi^2 - 6}{\pi^4 n^4}(-1)^n. \end{aligned}$$

La serie de Fourier de x^4 en $[-1, 1]$ es

$$\frac{1}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} 8\frac{n^2\pi^2 - 6}{\pi^4 n^4}(-1)^n \cos(n\pi x). \blacksquare$$

Para considerar nuevamente el problema de la convergencia, observe que en este ejemplo, $f(0) = 0$, pero la serie de Fourier en $x = 0$ es

$$\frac{1}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} 8\frac{n^2\pi^2 - 6}{\pi^4 n^4}(-1)^n.$$

No está claro que la suma de esta serie sea 0.

EJEMPLO 2.4

Sea $f(x) = x^3$ para $-4 \leq x \leq 4$. Como f es impar en $[-4, 4]$, los coeficientes de Fourier de los cosenos son todos cero. Los coeficientes de Fourier de los senos son

$$b_n = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4} x^3 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{4} x^3 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx = (-1)^{n+1} 128\frac{n^2\pi^2 - 6}{n^3\pi^3}.$$

La serie de Fourier de x^3 en $[-4, 4]$ es

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} 128\frac{n^2\pi^2 - 6}{n^3\pi^3} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right). \quad ■$$

Más adelante usará estos argumentos. Por ahora éste es un resumen de las conclusiones: Si f es par en $[-L, L]$, entonces su serie de Fourier en este intervalo es

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{2.9}$$

en donde

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.10}$$

Si f es impar en $[-L, L]$, entonces su serie de Fourier en este intervalo es

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{2.11}$$

donde

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots. \tag{2.12}$$

SECCIÓN 2.2 PROBLEMAS

En los problemas del 1 al 12, encuentre la serie de Fourier de la función en el intervalo.

1. $f(x) = 4, -3 \leq x \leq 3$

2. $f(x) = -x, -1 \leq x \leq 1$

3. $f(x) = \cosh(\pi x), -1 \leq x \leq 1$

4. $f(x) = 1 - |x|, -2 \leq x \leq 2$

5. $f(x) = \begin{cases} -4 & \text{para } -\pi \leq x \leq 0 \\ 4 & \text{para } 0 < x \leq \pi \end{cases}$

6. $f(x) = \text{sen}(2x), \ -\pi \le x \le \pi$

7. $f(x) = x^2 - x + 3, \ -2 \le x \le 2$

8. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{para } -5 \le x < 0 \\ 1 + x^2 & \text{para } 0 \le x \le 5 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } -\pi \le x < 0 \\ 2 & \text{para } 0 \le x \le \pi \end{cases}$

10. $f(x) = \cos(x/2) - \text{sen}(x), \ -\pi \le \text{x} \le \pi$

11. $f(x) = \cos(x), \ -3 \le \text{x} \le 3$

12. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{para } -1 \le \text{x} \le 0 \\ 0 & \text{para } 0 < x \le 1 \end{cases}$

13. Suponga que *f* y *g* son integrables en $[-L, L]$ y que $f(x) = g(x)$ excepto para $x = x_0$, un punto dado en el intervalo. ¿Cómo están relacionadas las series de Fourier de *f* y *g*? ¿Qué sugiere esto acerca de la relación entre una función y su serie de Fourier en un intervalo?

14. Pruebe que $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$ si *f* es impar en $[-L, L]$.

15. Pruebe que $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_0^L f(x)dx$ si *f* es par en $[-L, L]$.

2.3 Convergencia de series de Fourier

Poder escribir los coeficientes de Fourier de una función *f* en un intervalo $[-L, L]$ es una cosa. Esto requiere sólo de la existencia de $\int_{-L}^{L} f(x) \cos(n\pi x/L)\, dx$ y $\int_{-L}^{L} f(x)\, \text{sen}(n\pi x/L)\, dx$. Es completamente otro asunto determinar si la serie de Fourier resultante converge a $f(x)$, o incluso, si siquiera converge. Las sutilezas de esta pregunta fueron dramatizadas en 1873 cuando el matemático francés Paul Du Bois-Reymond dio un ejemplo de una función continua en $(-\pi, \pi)$, pero cuya serie de Fourier no convergía en ningún punto de este intervalo.

Sin embargo, la utilidad obvia de las series de Fourier para resolver ecuaciones diferenciales parciales produjo en el siglo XIX un esfuerzo intensivo para determinar sus propiedades de convergencia. Alrededor de 1829, Peter Gustav Lejeune-Dirichlet dio condiciones suficientes sobre la función *f* para la convergencia de la serie de Fourier de *f*. De hecho, el teorema de Dirichlet dio la suma de la serie de Fourier en cada punto, tanto si la suma era $f(x)$ como si no lo era.

Esta sección está dedicada a las condiciones sobre una función que permite determinar la suma de su serie de Fourier en un intervalo. Estas condiciones se centran en el concepto de continuidad a pedazos.

DEFINICIÓN 2.3 *Función continua a pedazos*

Sea $f(x)$ definida en $[a, b]$, excepto quizá en un número finito de puntos. Entonces *f* es continua a pedazos en $[a, b]$ si

1. *f* es continua en $[a, b]$ excepto quizá en un número finito de puntos.
2. Ambos $\lim_{x\to a+} f(x)$ y $\lim_{x\to b-} f(x)$ existen y son finitos.
3. Si x_0 está en (a, b) y *f* no es continua en x_0, entonces $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ y $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ existen y son finitos.

Las figuras 2.5 y 2.6 muestran gráficas de funciones continuas a pedazos típicas. En los puntos de discontinuidad (suponga un número finito), la función debe tener límites laterales finitos. Esto significa que en el peor de los casos, la gráfica tiene a lo más un salto en una discontinuidad. Los puntos donde esto sucede se llaman *discontinuidades de salto* de la función.

Ahora un ejemplo de una función simple que no es continua a pedazos. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x = 0 \\ 1/x & \text{para } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

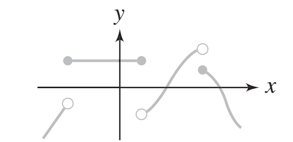


FIGURA 2.5 *Una función continua a pedazos.*

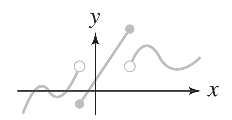


FIGURA 2.6 *Gráfica de una función continua a pedazos típica.*

Entonces f es continua en $(0, 1]$ y discontinua en 0. Sin embargo, $\text{lím}_{x\to 0+} f(x) = \infty$, de manera que la discontinuidad no es un salto finito y f no es continua a pedazos en $[0, 1]$.

EJEMPLO 2.5

Sea

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{para } x = -\pi \\ x & \text{para } -\pi < x < 1 \\ 1 - x^2 & \text{para } 1 \le x < 2 \\ 4 & \text{para } 2 \le x \le \pi \end{cases}$$

En la figura 2.7 se muestra la gráfica de f. Esta función es discontinua en $-\pi$, y

$$\text{lím}_{x\to -\pi+} f(x) = -\pi.$$

f también es discontinua en 1, en el interior de $[-\pi, \pi]$, y

$$\text{lím}_{x\to 1-} f(x) = 1 \quad \text{y} \quad \text{lím}_{x\to 1+} f(x) = 0.$$

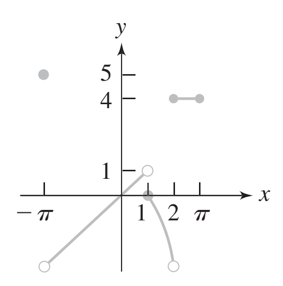


FIGURA 2.7 *Gráfica de la función del ejemplo 2.5.*

Finalmente, f es discontinua en 2, y

$$\text{lím}_{x\to 2-} f(x) = -3 \quad \text{y} \quad \text{lím}_{x\to 2+} f(x) = 4.$$

En cada punto de discontinuidad en el interior del intervalo, la función tiene límites laterales finitos de ambos lados. En el punto de discontinuidad del extremo $-\pi$, la función tiene límite finito desde dentro del intervalo. En este ejemplo, el otro extremo no es tema de discusión ya que ahí f es continua por la izquierda. Por tanto, f es continua a pedazos en $[-\pi, \pi]$. ■

Use la siguiente notación para los límites por la izquierda y por la derecha de una función en un punto:

$$f(x_0+) = \text{lím}_{x\to x_0+} f(x) \quad \text{y} \quad f(x_0-) = \text{lím}_{x\to x_0-} f(x).$$

En el ejemplo 2.5,

$$f(1-) = 1 \qquad \text{y} \qquad f(1+) = 0$$

y

$$f(2-) = -3 \qquad \text{y} \qquad f(2+) = 4.$$

En los extremos de un intervalo puede seguir usando esta notación excepto en el extremo izquierdo, donde sólo debe considerar el límite derecho (desde dentro del intervalo) y en el extremo derecho use sólo el límite izquierdo (nuevamente tome el límite desde dentro del intervalo) De nuevo, haciendo referencia al ejemplo 2.5,

$$f(-\pi+) = -\pi \quad \text{y} \quad f(\pi-) = 4.$$

DEFINICIÓN 2.4 *Función suave a pedazos*

f es suave a pedazos en $[a, b]$ si f y f' son continuas a pedazos en $[a, b]$.

Una función suave a pedazos es, por tanto, una que es continua, excepto quizá para un número finito de discontinuidades de salto y tiene derivada continua en todos lados, excepto en un número finito de puntos donde la derivada puede no existir, pero debe tener límites laterales finitos.

EJEMPLO 2.6

Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } -4 \le x < 1 \\ -2x & \text{para } 1 \le x < 2 \\ 9e^{-x} & \text{para } 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

La figura 2.8 muestra la gráfica de *f*. La función es continua, excepto para un número finito de discontinuidades de salto en 1 y 2. Por tanto, *f* es continua a pedazos en $[-4, 3]$. La derivada de *f* es:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -4 < x < 1 \\ -2 & \text{para } 1 < x < 2 \\ -9e^{-x} & \text{para } 2 < x < 3 \end{cases}$$

La derivada es continua en $[-4, 3]$ excepto en los puntos de discontinuidad 1 y 2 de *f*, donde $f'(x)$ no existe. Sin embargo, en estos puntos $f'(x)$ tiene límites laterales finitos. Así f' es continua a pedazos en $[-4, 3]$, de manera que *f* es suave a pedazos. ■

Como lo sugiere la figura 2.8, una función suave a pedazos es aquella que tiene tangente continua en todos lados, excepto en un número finito de puntos.

Ahora aparece el primer teorema de convergencia.

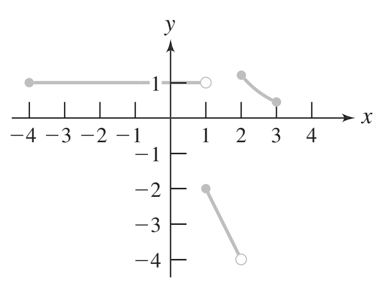


FIGURA 2.8 *Gráfica de*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } -4 \le x < 1 \\ -2x & \text{para } 1 \le x < 2 \\ 9e^{-x} & \text{para } 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

TEOREMA 2.1 Convergencia de series de Fourier

Sea f suave a pedazos en $[-L, L]$. Entonces, para $-L < x < L$, la serie de Fourier de f en $[-L, L]$ converge a

$$\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) .$$ ■

Esto significa que en cada punto entre $-L$ y L, la función converge al promedio de sus límites izquierdo y derecho. Si f es continua en x, entonces, estos límites izquierdo y derecho son iguales a $f(x)$, entonces, la serie de Fourier converge al valor de la función en x. Si f tiene una discontinuidad de salto en x; entonces, la serie de Fourier no puede converger a $f(x)$, pero convergirá al punto medio entre los extremos del hueco en la gráfica en x (figura 2.9).

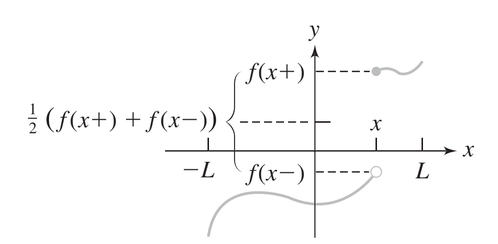


FIGURA 2.9 *Convergencia de una serie de Fourier en una discontinuidad de salto.*

EJEMPLO 2.7

Sea

$$f(x) = \begin{cases} 5\,\text{sen}(x) & \text{para } -2\pi \le x < -\pi/2 \\ 4 & \text{para } x = -\pi/2 \\ x^2 & \text{para } -\pi/2 < x < 2 \\ 8\cos(x) & \text{para } 2 \le x < \pi \\ 4x & \text{para } \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

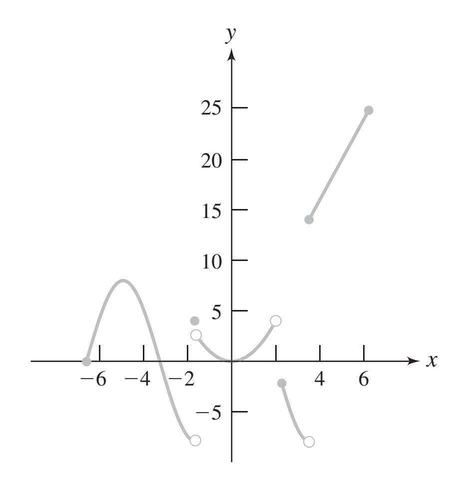


FIGURA 2.10 *Gráfica de*

$$f(x) = \begin{cases} 5\,\text{sen}(x) & \text{para } -2\pi \le x < -\pi/2 \\ 4 & \text{para } x = -\pi/2 \\ x^2 & \text{para } -\pi/2 < x < 2 \\ 8\cos(x) & \text{para } 2 \le x < \pi \\ 4x & \text{para } \pi \le x \le 2\pi \end{cases}.$$

En la figura 2.10 se da la gráfica de f. Como f es suave a pedazos en $[-2\pi, 2\pi]$, puede determinar la suma de su serie de Fourier en este intervalo. Aplicando el teorema, no tiene que calcular esta serie de Fourier. Podría hacerlo, pero no es necesario para determinar la suma de la serie de Fourier.

Para $-2\pi < x < -\pi/2$, f es continua y la serie de Fourier converge a $f(x) = 5\,\text{sen}(x)$.

En $x = -\pi/2$, f tiene una discontinuidad de salto y la serie de Fourier convergirá al promedio de los límites izquierdo y derecho de $f(x)$ en $-\pi/2$. Calcule

$$f(-\pi/2-) = \lim_{x\to-\pi/2-} f(x) = \lim_{x\to-\pi/2-} 5\,\text{sen}(x) = 5\,\text{sen}(-\pi/2) = -5$$

y

$$f(-\pi/2+) = \lim_{x\to-\pi/2+} f(x) = \lim_{x\to-\pi/2+} x^2 = \frac{\pi^2}{4}.$$

Así, en $x = -\pi/2$, la serie de Fourier de f converge a

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - 5\right).$$

En $(-\pi/2, 2)$ la función es continua, entonces la serie de Fourier converge a x^2 para $-\pi/2 < x < 2$.

En $x = 2$ la función tiene otra discontinuidad de salto. Calcule

$$f(2-) = \lim_{x\to 2-} x^2 = 4$$

y

$$f(2+) = \lim_{x\to 2+} 8\cos(x) = 8\cos(2).$$

En $x = 2$ la serie de Fourier converge a

$$\frac{1}{2}\left(4 + 8\cos(2)\right).$$

En $(2, \pi)$, f es continua. En cada x con $2 < x < \pi$, la serie de Fourier converge a $f(x) = 8\cos(x)$.

En $x = \pi$, f tiene una discontinuidad de salto. Calcule

$$f(\pi-) = \lim_{x \to \pi-} 8\cos(x) = 8\cos(\pi) = -8$$

y

$$f(\pi+) = \lim_{x \to \pi+} 4x = 4\pi.$$

En $x = \pi$ la serie de Fourier de f converge a

$$\frac{1}{2}\left(4\pi - 8\right).$$

Finalmente, en $(\pi, 2\pi)$, f es continua y la serie de Fourier converge a $f(x) = 4x$.

Estas conclusiones pueden resumirse:

$$\text{La serie de Fourier converge a } \begin{cases} 5\,\mathrm{sen}(x) & \text{para } -2\pi < x < -\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi^2}{4} - 5\right) & \text{para } x = -\dfrac{\pi}{2} \\ x^2 & \text{para } -\dfrac{\pi}{2} < x < 2 \\ \dfrac{1}{2}(4 + 8\cos(2)) & \text{para } x = 2 \\ 8\cos(x) & \text{para } 2 < x < \pi \\ \dfrac{1}{2}(4\pi - 8) & \text{para } x = \pi \\ 4x & \text{para } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

La figura 2.11 muestra la gráfica de la suma de esta serie de Fourier, que difiere de la función misma en $(-2\pi, 2\pi)$ en las discontinuidades de salto, donde la serie converge al promedio de los límites izquierdo y derecho. ■

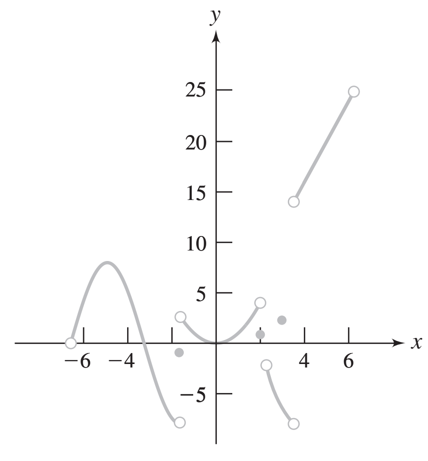


FIGURA 2.11 *Gráfica de la serie de Fourier de la función de la figura 2.10.*

Si f es suave a pedazos en $[-L, L]$ y continua en $[-L, L]$; entonces, la serie de Fourier converge a $f(x)$ para $-L < x < L$.

EJEMPLO 2.8

Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{para } -2 \leq x \leq 1 \\ 2 - x^2 & \text{para } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Entonces f es continua en $[-2, 2]$ (figura 2.12). f es diferenciable excepto en $x = 1$, donde $f'(x)$ tiene límites izquierdo y derecho finitos, de manera que f es suave a pedazos. Para $-2 < x < 2$, la serie de Fourier de f converge a $f(x)$. En este ejemplo, la serie de Fourier es una representación exacta de la función en $(-2, 2)$. ■

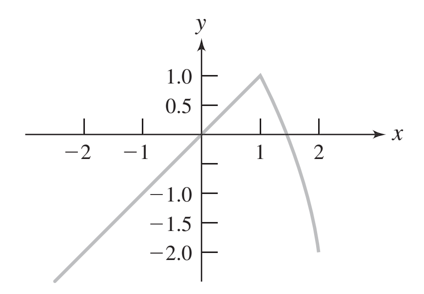


FIGURA 2.12 *Gráfica de*

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{para } -2 \leq x \leq 1 \\ 2 - x^2 & \text{para } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

2.3.1 Convergencia en los extremos

El teorema 2.1 no hace referencia a la convergencia de una serie de Fourier en los extremos del intervalo. Aquí hay una sutileza que conviene discutir ahora.

El problema está en que aunque la función f que interesa puede estar definida sólo en $[-L, L]$, su serie de Fourier

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{2.13}$$

está definida para todo real x para los cuales la serie converge. Más aún, la serie de Fourier es periódica, de periodo $2L$. El valor de la serie no cambia si reemplaza x por $x + 2L$. ¿Cómo reconciliar la representación de una función que está definida sólo en un intervalo con una función que es periódica y puede estar definida en toda la recta real?

La reconciliación se da en una extensión periódica de f sobre la recta real. Tome la gráfica de $f(x)$ en $[-L, L)$ y reprodúzcala en intervalos sucesivos de longitud $2L$. Esto define una nueva función, f_p, que coincide con $f(x)$ para $-L \leq x < L$ y tiene periodo $2L$. En la figura 2.13 se ilustra este procedimiento para la función $f(x) = x^2$ para $-2 \leq x < 2$. Esta gráfica se repite para $2 \leq x < 6$,

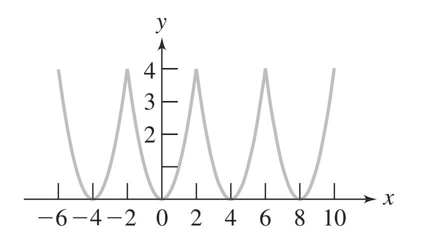


FIGURA 2.13 *Parte de la extensión periódica, de periodo 4, de $f(x) = x^2$ para $-2 \leq x < 2$.*

$6 \leq x < 10, \ldots, -6 \leq x < -2, -10 \leq x < -6$, y así sucesivamente. La razón por la que se usa el intervalo semiabierto $[-L, L)$ en esta extensión es que si f_p debe tener periodo $2L$, entonces

$$f_p(x + 2L) = f_p(x)$$

para todo x. Pero esto requiere que $f(-L) = f(-L + 2L) = f(L)$, de manera que una vez definida $f_p(-L)$, $f_p(L)$ debe tener este mismo valor.

Si hace esta extensión, entonces el teorema de convergencia se aplica a $f_p(x)$ en todo x. En particular en $-L$, la serie converge a

$$\frac{1}{2}\big(f_p(-L-) + f_p(-L+)\big),$$

que es

$$\frac{1}{2}\big(f(L-) + f(-L+)\big).$$

Análogamente, en L, la serie de Fourier converge a

$$\frac{1}{2}\big(f_p(L-) + f_p(L+)\big),$$

que es

$$\frac{1}{2}\big(f(L-) + f(-L+)\big).$$

La serie de Fourier converge al mismo valor en L y en $-L$. Esto se puede ver directamente en la serie (2.13). Si $x = L$, todos los términos en senos son $\text{sen}(n\pi)$, que desaparecen, y los términos en cosenos son $\cos(n\pi)$. Así la serie en $x = L$ es

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1} a_n \cos(n\pi).$$

En $x = -L$, nuevamente todos los términos en senos desaparecen, y como $\cos(-n\pi) = \cos(n\pi)$, la serie en $x = -L$ también es

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1} a_n \cos(n\pi).$$

2.3.2 Un segundo teorema de convergencia

Un segundo teorema de convergencia puede enunciarse en términos de las derivadas laterales.

DEFINICIÓN 2.5 ***Derivada derecha***

Suponga que $f(x)$ está definida al menos para $c < x < c + r$ para algún número positivo r. Suponga que $f(c+)$ es finito; entonces, la derivada derecha de f en c es

$$f'_{\mathcal{R}}(c) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(c+h) - f(c+)}{h},$$

si este límite existe y es finito. ■

DEFINICIÓN 2.6 ***Derivada izquierda***

Suponga que $f(x)$ está definida al menos para $c - r < x < c$ para algún número positivo r. Suponga que $f(c-)$ es finito; entonces, la derivada izquierda de f en c es

$$f'_{\mathcal{L}}(c) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(c+h) - f(c-)}{h},$$

si este límite existe y es finito.

Si $f'(c)$ existe, entonces f es continua en c, de manera que $f(c-) = f(c+) = f(c)$, y en este caso la derivada izquierda y derecha son iguales a $f'(c)$. Sin embargo, la figura 2.14 muestra la importancia de las derivadas izquierda y derecha cuando f tiene una discontinuidad de salto en c. La derivada izquierda es la pendiente de la gráfica en $x = c$ si tapa la parte de la gráfica a la derecha de c y se queda sólo con la izquierda. La derivada derecha es la pendiente en c si tapa la parte izquierda y se queda sólo con la derecha.

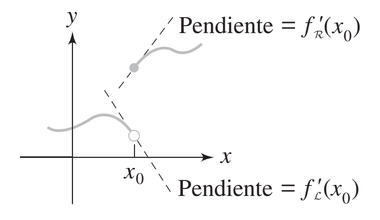


FIGURA 2.14 *Derivadas laterales como pendientes por la derecha y por la izquierda.*

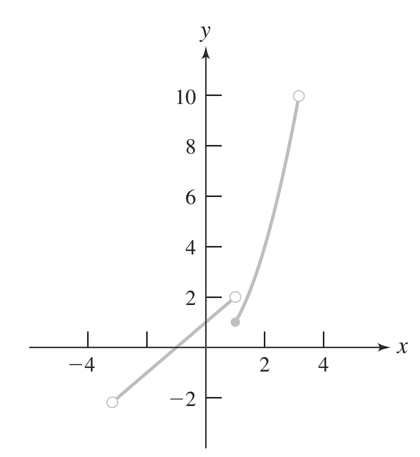


FIGURA 2.15 *Gráfica de*

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{para } -\pi < x < 1 \\ x^2 & \text{para } 1 \leq x < \pi \end{cases}$$

EJEMPLO 2.9

Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{para } -\pi < x < 1 \\ x^2 & \text{para } 1 \leq x < \pi \end{cases}$$

Entonces *f* es continua en $(-\pi, \pi)$ excepto en 1, donde hay una discontinuidad de salto (figura 2.15). Más aún, *f* es diferenciable excepto en este punto de discontinuidad. Ciertamente,

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } -\pi < x < 1 \\ 2x & \text{para } 1 < x < \pi \end{cases}$$

A partir de la gráfica y las pendientes de los pedazos izquierdo y derecho en $x = 1$, esperaría que la derivada izquierda en $x = 1$ fuera 1 y la derivada derecha fuera 2. Verifique esto a partir de la definición. Primero,

$$f'_{\mathcal{L}}(0) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(1+h) - f(1-)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0-} \frac{1 + (1+h) - 2}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{h}{h} = 1,$$

y

$$f'_{\mathcal{R}}(c) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(1+h) - f(1+)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0+} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0+} (2+h) = 2. \blacksquare$$

Usando las derivadas laterales enuncie el siguiente teorema de convergencia.

TEOREMA 2.2

Sea *f* continua a pedazos en $[-L, L]$. Entonces,

1. Si $-L < x < L$ y *f* tiene derivada izquierda y derecha en *x*, entonces la serie de Fourier de *f* en $[-L, L]$ converge en *x* a

$$\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)).$$

2. Si $f'_{\mathcal{R}}(-L)$ y $f'_{\mathcal{L}}(L)$ existen, entonces en ambos L y $-L$, la serie de Fourier de f en $[-L, L]$ converge a

$$\frac{1}{2}(f(-L+) + f(L-)) . \blacksquare$$

Como con el primer teorema de convergencia, no necesita calcular la serie de Fourier para determinar su suma.

EJEMPLO 2.10

Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{para } -2 \le x < 1 \\ -2x^2 & \text{para } 1 \le x < 2 \\ 4 & \text{para } x = 2 \end{cases} .$$

Quiere determinar la suma de la serie de Fourier de f en $[-2, 2]$. En la figura 2.16 se muestra la gráfica de f.

f es continua a pedazos, siendo continua excepto para las discontinuidades de salto en 1 y 2.

Para $-2 < x < 1$, f es continua, y la serie de Fourier converge a $f(x) = e^{-x}$.

Para $1 < x < 2$, f también es continua y la serie de Fourier converge a $f(x) = -2x^2$.

En la discontinuidad de salto $x = 1$, existen las derivadas izquierda y derecha ($-e^{-1}$ y -4, respectivamente). Determine esto a partir de los límites en las definiciones, pero estas derivadas son claras si observa la gráfica de f a la derecha y a la izquierda del 1. Por tanto, la serie de Fourier converge en $x = 1$ a

$$\frac{1}{2}(f(1-) + f(1+)) ,$$

que es

$$\frac{1}{2}\left(e^{-1} - 2\right) .$$

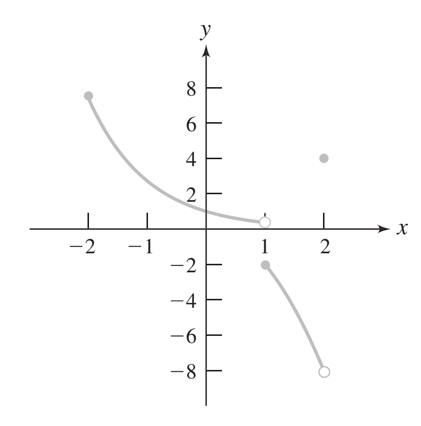


FIGURA 2.16 *Gráfica de*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{para } -2 \le x < 1 \\ -2x^2 & \text{para } 1 \le x < 2 \\ 4 & \text{para } x = 2 \end{cases}$$

Esto incluye todos los puntos en $(-2, 2)$. Ahora considere los extremos. La derivada izquierda de f en 2 es -8 y la derivada derecha en -2 es $-e^2$. Por tanto, en ambos 2 y en -2, la serie de Fourier converge a

$$\frac{1}{2}(f(2-) + f(-2+)) = \frac{1}{2}\left(-8 + e^2\right).$$

La figura 2.17 muestra la gráfica de la serie de Fourier en $[-2, 2]$, y puede compararse con la gráfica de f. Las dos gráficas coinciden excepto en los puntos extremos y en la discontinuidad de salto. El hecho de que $f(2) = 9$ no afecta la convergencia de la serie de Fourier de $f(x)$ en $x = 2$. ■

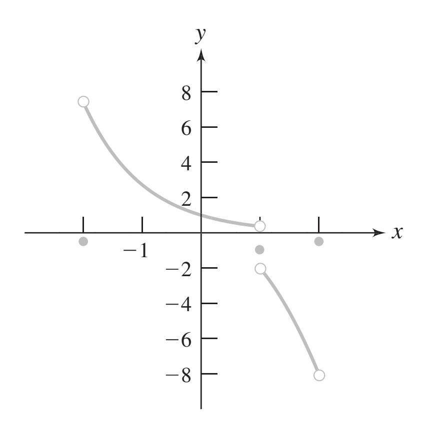


FIGURA 2.17 *Gráfica de la serie de Fourier de la función de la figura 2.16.*

Se pide precaución al aplicar el segundo teorema de convergencia. Las derivadas izquierda y derecha de una función en un punto son importantes sólo para verificar que las hipótesis del teorema se satisfacen en una discontinuidad de salto de la función. Sin embargo, estas derivadas no afectan el valor al que converge la serie de Fourier en un punto. Ese valor involucra los límites izquierdo y derecho de la función.

2.3.3 Sumas parciales de la serie de Fourier

Las afirmaciones de Fourier sobre sus series eran contrarias a la intuición en el sentido de que funciones tales como polinomios y exponenciales no parecieran ser candidatos para ser representados por series de senos y cosenos. Es ilustrativo ver gráficas de sumas parciales de algunas series de Fourier que convergen a la gráfica de la función.

EJEMPLO 2.11

Sea $f(x) = x$ para $-\pi \leq x \leq \pi$. En el ejemplo 2.1 vio que la serie de Fourier es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \operatorname{sen}(nx).$$

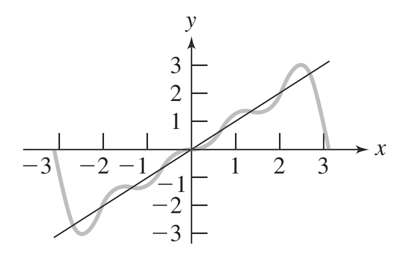


FIGURA 2.18(a) *Cuarta suma parcial de la serie de Fourier* $S_4(x) = \sum_{n=1}^{4} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx)$ *de* $f(x) = x$ *en* $-\pi \leq x \leq \pi$.

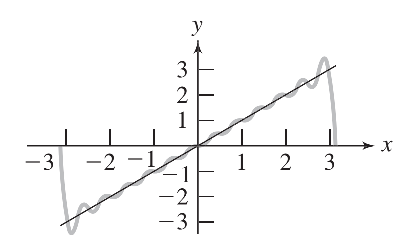


FIGURA 2.18(b) *Décima suma parcial de la serie de Fourier de* $f(x) = x$ *en* $[-\pi, \pi]$.

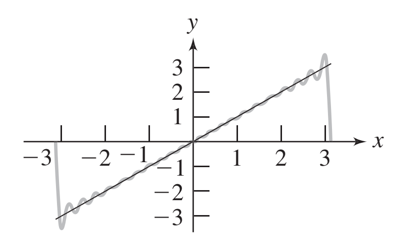


FIGURA 2.18(c) *Vigésima suma parcial de la serie de Fourier de* $f(x) = x$ *en* $[-\pi, \pi]$.

Puede aplicar cualquier teorema de convergencia para probar que esta serie converge a

$$\begin{cases} x & \text{para } -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{para } x = \pi \quad \text{y} \quad \text{para } x = -\pi \end{cases}$$

Las figuras 2.18(a), (b) y (c) muestran, respectivamente, la cuarta, décima y vigésima sumas parciales de esta serie y sugieren cómo se aproximan cada vez más a $f(x) = x$ en $(-\pi, \pi)$ conforme se incluyen más términos. ■

EJEMPLO 2.12

Sea $f(x) = e^x$ para $-1 \leq x \leq 1$. La serie de Fourier de f en $[-1, 1]$ es

$$\frac{1}{2}\left(e - e^{-1}\right) + \left(e - e^{-1}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{1 + n^2\pi^2} \cos(n\pi x) - n\pi \frac{(-1)^n}{1 + n^2\pi^2} \operatorname{sen}(n\pi x) \right).$$

Esta serie converge a

$$\begin{cases} e^x & \text{para } -1 < x < 1 \\ \frac{1}{2}(e + e^{-1}) & \text{para } x = 1 \quad \text{y para } x = -1. \end{cases}$$

Las figuras 2.19(a) y (b) muestran la décima y trigésima sumas parciales de esta serie, comparadas con la gráfica de f. ■

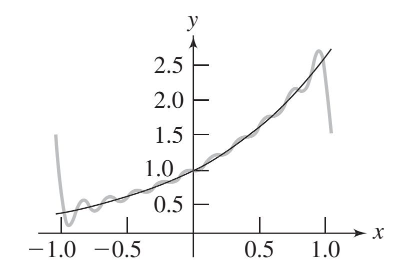


FIGURA 2.19(a) *Décima suma parcial de la serie de Fourier de* $f(x) = e^x$ *en* $[-1, 1]$.

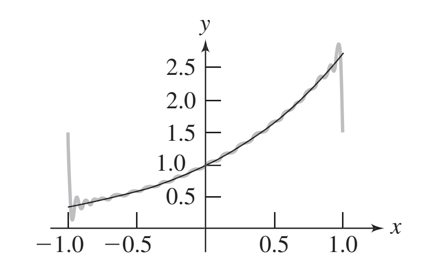


FIGURA 2.19(b) *Trigésima suma parcial de la serie de Fourier de* $f(x) = e^x$ *en* $[-1, 1]$.

EJEMPLO 2.13

Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ para $-1 \le x \le 1$. La serie de Fourier de f en $[-1, 1]$ es

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{n\pi \operatorname{sen}(1)(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2 - 1} \operatorname{sen}(n\pi x).$$

Esta serie converge a

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{para } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{para } x = 1 \quad \text{y} \quad \text{para } x = -1 \end{cases}$$

Las figuras 2.20 (a) y (b) muestran sumas parciales de esta serie comparadas con la gráfica de f. ■

2.3.4 El fenómeno de Gibbs

En 1881 el experimento de Michelson-Morley revolucionó la física y ayudó a allanar el camino para la teoría general de la relatividad de Einstein. En un experimento brillante usando su propia adaptación del interferómetro, Michelson y Morley probaron por mediciones cuidadosas que el postulado “éter” que los físicos de ese tiempo creían que llenaba todo el espacio, no tenía efecto sobre la velocidad de la luz vista desde distintas direcciones.

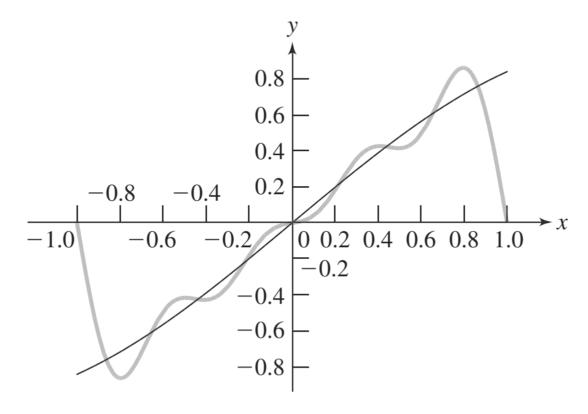


FIGURA 2.20(a) *Cuarta suma parcial de la serie de Fourier de* $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ para $-1 < x < 1$.

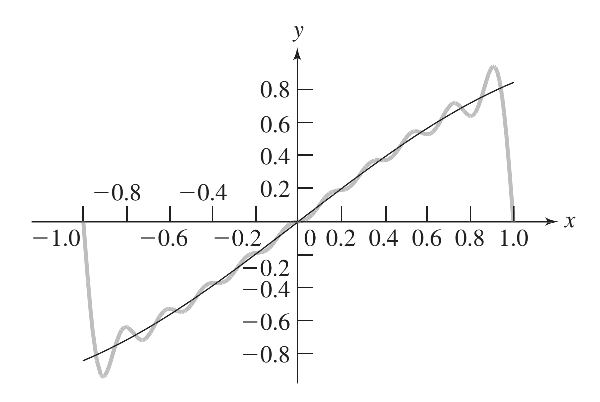


FIGURA 2.20(b) *Décima suma parcial de la función* $f(x) = \text{sen}(x)$ para $-1 \leq x \leq 1$.

Algunos años después, Michelson probó un aparato mecánico que había inventado para calcular los coeficientes de Fourier y para construir una función a partir de sus coeficientes de Fourier. En una prueba usó 80 coeficientes de Fourier para la función $f(x) = x$ para $-\pi \leq x \leq \pi$. La máquina respondió con una gráfica que tenía saltos inesperados en los extremos π y $-\pi$. Al principio Michelson supuso que había algún problema con su máquina. Sin embargo, con el tiempo, se encontró que este comportamiento es característico de la serie de Fourier en las discontinuidades de salto de la función. Éste se conoce como el fenómeno de Gibbs, debido al matemático de Yale, Josiah Willard Gibbs, quien fue el primero que lo definió y explicó satisfactoriamente. El fenómeno fue advertido por el matemático inglés Wilbraham unos 60 años antes, quien sin embargo no pudo analizarlo.

Para ilustrar el fenómeno, considere la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} -\pi/4 & \text{para } -\pi \leq x < 0 \\ 0 & \text{para } x = 0 \\ \pi/4 & \text{para } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

La figura 2.21 muestra la gráfica de esta función, cuya serie de Fourier es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \text{sen}((2n-1)x).$$

Por cualquiera de los teoremas de convergencia, esta serie converge a $f(x)$ para $-\pi < x < \pi$. Hay una discontinuidad de salto en 0, pero

$$\frac{1}{2}(f(0+) + f(0-)) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 0 = f(0).$$

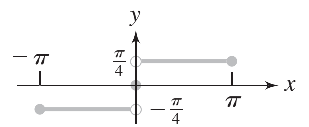


FIGURA 2.21 *Función que ilustra el fenómeno de Gibbs.*

La N-ésima suma parcial de esta serie de Fourier es

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n-1} \operatorname{sen}((2n-1)x),$$

y la figura 2.22 muestra las gráficas de $S_5(x)$, $S_{14}(x)$ y $S_{22}(x)$. Cada una de estas sumas parciales muestra un pico cerca del cero. Intuitivamente, como la suma parcial se acerca a $f(x)$ conforme $N \to \infty$, puede esperar que estos picos se achaten y se hagan pequeños conforme N crece. Pero no es así. En cambio, los picos mantienen la misma altura, pero se mueven más cerca del eje y conforme N crece. Las sumas parciales sí tienen como límite a la función, pero no exactamente como los matemáticos esperaban.

Como otro ejemplo, considere

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -2 \leq x < 0 \\ 2 - x & \text{para } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

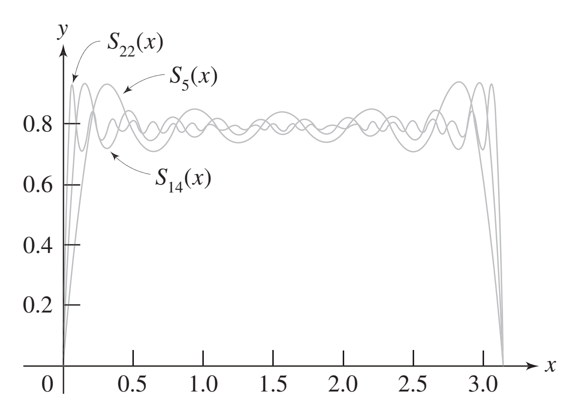


FIGURA 2.22 *Las sumas parciales (para $0 \leq x \leq \pi/4$) muestran el fenómeno de Gibbs para la función de la figura 2.21.*

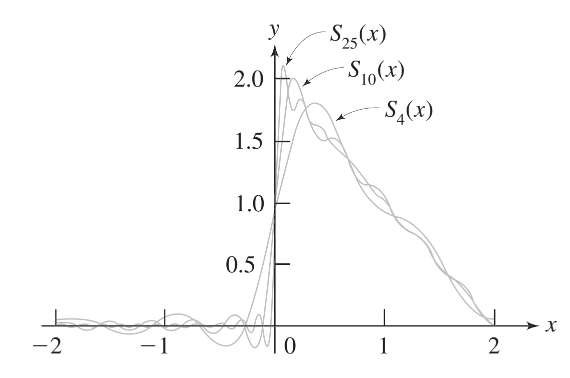


FIGURA 2.23 *Cuarta, décima y vigésimoquinta sumas parciales de la serie de Fourier de*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -2 \leq x < 0 \\ 2 - x & \text{para } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Esta función tiene una discontinuidad de salto en 0, y serie de Fourier

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n))\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)+\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right).$$

La figura 2.23 muestra la cuarta, décima y vigésimoquinta sumas parciales de esta serie. Nuevamente el fenómeno de Gibbs aparece en la discontinuidad de salto. Gibbs mostró que este comportamiento sucede en la serie de Fourier de una función en todo punto donde tiene una discontinuidad de salto.

SECCIÓN 2.3 PROBLEMAS

En cada uno de los problemas del 1 al 10 use un teorema de convergencia para determinar la suma de la serie de Fourier de la función en el intervalo. Verifique que las hipótesis del teorema utilizado se satisfacen, suponga los hechos familiares del cálculo acerca de las funciones continuas y diferenciables. No es necesario escribir la serie para hacer esto.

Después, encuentre la serie de Fourier de la función y la gráfica de f para $N = 5, 10, 15, 25$, dibuje la gráfica de la N-ésima suma parcial de la serie junto con la función en el intervalo. Indique cualquier lugar, en esta gráfica, donde aparezca el fenómeno de Gibbs.

1. $f(x)=\begin{cases}2x & \text{para } -3\le x<-2\\ 0 & \text{para } -2\le x<1\\ x^2 & \text{para } 1\le x\le 3\end{cases}$

2. $f(x)=x^2$ para $-2\le x\le 2$

3. $f(x)=x^2e^{-x}$ para $-3\le x\le 3$

4. $f(x)=\begin{cases}2x-2 & \text{para } -\pi\le x\le 1\\ 3 & \text{para } 1<x\le\pi\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{para } -\pi\le x\le 0\\ 2 & \text{para } 0<x\le\pi\end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases}\cos(x) & \text{para } -2\le x<0\\ \operatorname{sen}(x) & \text{para } 0\le x\le 2\end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{para } -4\le x<0\\ 1 & \text{para } 0\le x\le 4\end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases}0 & \text{para } -1\le x<\frac{1}{2}\\ 1 & \text{para } \frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{4}\\ 2 & \text{para } \frac{3}{4}<x\le 1\end{cases}$

9. $f(x)=e^{-|x|}$ para $-\pi\le x\le\pi$

10. $f(x)=\begin{cases}-2 & \text{para } -4\le x\le -2\\ 1+x^2 & \text{para } -2<x\le 2\\ 0 & \text{para } 2<x\le 4\end{cases}$

11. Sea $f(x)=x^2/2$ para $-\pi\le x\le\pi$. Encuentre la serie de Fourier de $f(x)$ y evalúela en un valor apropiado de x para encontrar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^2$.

12. Use la serie de Fourier del problema 11 para sumar la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n^2$.

2.4 Series de Fourier en senos y cosenos

Si $f(x)$ está definida en $[-L, L]$, puede escribir su serie de Fourier. Los coeficientes de esta serie están completamente determinados por la función y el intervalo.

Ahora probará que si $f(x)$ está definida en el semiintervalo $[0, L]$, entonces, tiene una elección y puede escribir una serie que tenga sólo cosenos o sólo senos para representar a $f(x)$ en este semiintervalo.

2.4.1 La serie de Fourier en cosenos de una función

Sea f integrable en $[0, L]$. Quiere desarrollar a $f(x)$ en una serie de funciones cosenos.

Ya tiene los medios para hacerlo. La figura 2.24 muestra una gráfica de una f típica. Doble esta gráfica a lo largo del eje y para obtener una función f_e definida para $-L \le x \le L$:

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x) & \text{para } 0 \le x \le L \\ f(-x) & \text{para } -L \le x < 0 \end{cases}$$

f_e es una función par,

$$f_e(-x) = f(x),$$

y coincide con f en $[0, L]$,

$$f_e(x) = f(x) \quad \text{para } 0 \le x \le L.$$

Llame a f_e la extensión par de f para $[-L, L]$.

EJEMPLO 2.14

Sea $f(x) = e^x$ para $0 \le x \le 2$. Entonces

$$f_e(x) = \begin{cases} e^x & \text{para } 0 \le x \le 2 \\ e^{-x} & \text{para } -2 \le x < 0 \end{cases}.$$

Aquí pone $f_e(-x) = f(x) = e^{-x}$ para $0 < x \le 2$, lo que significa $f_e(x) = e^{-x}$ *para* $-2 < x < 0$. En la figura 2.25 se da la gráfica de f_e. ■

Debido a que f_e es una función par en $[-L, L]$, su serie de Fourier en $[-L, L]$ es

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{2.14}$$

en donde

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f_e(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \tag{2.15}$$

como $f_e(x) = f(x)$ para $0 \le x \le L$. Llame a la serie (2.14) la *serie de Fourier en cosenos de f en* $[0, L]$. Los coeficientes (2.15) son los *coeficientes de Fourier en cosenos de f en* $[0, L]$.

Se introdujo la extensión par f_e sólo para poder utilizar el trabajo previo para obtener una serie que contenga sólo cosenos. Para encontrar la serie de Fourier en cosenos, sólo use la ecuación (2.14) para calcular los coeficientes sin definir f_e.

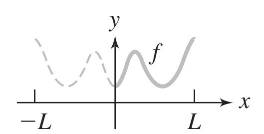


FIGURA 2.24 *Extensión par de f para* $[-L, L]$.

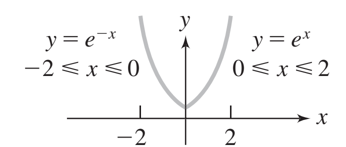


FIGURA 2.25

Otra razón para tener f_e es que puede usar los teoremas de convergencia de Fourier para escribir un teorema de convergencia para la serie en cosenos.

TEOREMA 2.3 *Convergencia de la serie de Fourier en cosenos*

Sea f continua a pedazos en $[0, L]$. Entonces,

1. Si $0 < x < L$, y f tiene derivadas izquierda y derecha en x, entonces en x la serie de Fourier en cosenos para $f(x)$ en $[0, L]$ converge a

$$\frac{1}{2}(f(x-) + f(x+)).$$

2. Si f tiene derivada derecha en 0, entonces la serie de Fourier en cosenos para $f(x)$ en $[0, L]$ converge a $f(0+)$.
3. Si f tiene derivada izquierda en L, entonces la serie de Fourier en cosenos para $f(x)$ en $[0, L]$ converge a $f(L-)$. ■

Las conclusiones (2) y (3) se siguen del teorema 2.2, aplicado a f_e. Considere primero $x = 0$. La serie de Fourier de f_e converge en 0 a

$$\frac{1}{2}(f_e(0-) + f_e(0+)).$$

Pero

$$f_e(0+) = f(0+)$$

y

$$f_e(0-) = f(0+),$$

entonces en 0 la serie converge a

$$\frac{1}{2}(f(0+) + f(0+)) = f(0+).$$

Un argumento similar prueba la conclusión (3).

EJEMPLO 2.15

Sea $f(x) = e^{2x}$ para $0 \leq x \leq 1$. Escriba la serie de Fourier en cosenos de f. Calcule

$$a_0 = 2\int_0^1 e^{2x}\,dx = e^2 - 1$$

y

$$a_n = 2\int_0^1 e^{2x}\cos(n\pi x)\,dx$$
$$= 4\frac{e^2(-1)^n - 1}{4 + n^2\pi^2}.$$

El desarrollo en cosenos de f es

$$\frac{1}{2}(e^2 - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{e^2(-1)^n - 1}{4 + n^2\pi^2}\cos(n\pi x).$$

Esta serie converge a

$$\begin{cases} e^{2x} & \text{para } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{para } x = 0 \\ e^{2} & \text{para } x = 1 \end{cases}$$

Así esta serie en cosenos converge a e^{2x} para $0 \leq x \leq 1$. Las figuras 2.26 (a) y (b) muestran la gráfica de f comparada con la quinta y décima sumas parciales del desarrollo en cosenos, respectivamente. ■

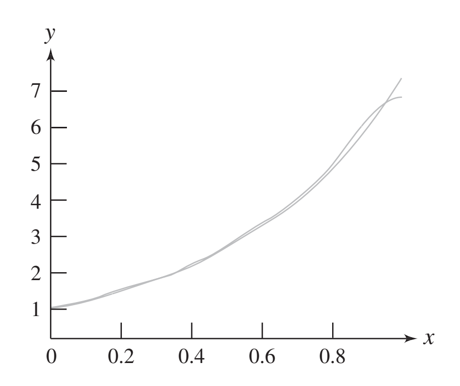


FIGURA 2.26(a) *Quinta suma parcial del desarrollo en cosenos de* e^{2x} *en* [0, 1].

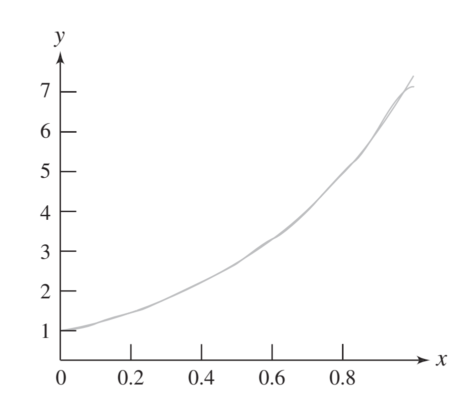


FIGURA 2.26(b) *Décima suma parcial del desarrollo en cosenos de* e^{2x} *en* [0, 1].

2.4.2 La serie de Fourier en senos de una función

Duplique la estrategia que acaba de usar para escribir una serie en cosenos, excepto que ahora extienda f a una función impar f_o sobre $[-L, L]$, puede escribir una serie de Fourier en senos para $f(x)$ en $[0, L]$. En particular, si $f(x)$ está definida en $[0, L]$, sea

$$f_o(x) = \begin{cases} f(x) & \text{para } 0 \leq x \leq L \\ -f(-x) & \text{para } -L \leq x < 0 \end{cases}$$

Entonces f_o es una función impar, y $f_o(x) = f(x)$ para $0 \leq x \leq L$. Esta es la *extensión impar* de f en $[-L, L]$. Por ejemplo, si $f(x) = e^{2x}$ para $0 \leq x \leq 1$, sea

$$f_o(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ -e^{-2x} & \text{para } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

Esto corresponde a doblar la gráfica de f sobre el eje vertical y después sobre el eje horizontal (figura 2.27).

Ahora escriba la serie de Fourier de $f_o(x)$ en $[-L, L]$. Por la ecuación (2.11) y (2.12), la serie de Fourier de f_o es

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{2.16}$$

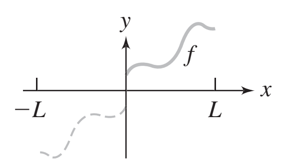


FIGURA 2.27 *Extensión impar de f en [−L, L].*

con coeficientes

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f_o(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx. \tag{2.17}$$

Llame a la serie (2.16) la serie de Fourier en senos de f en $[0, L]$. Los coeficientes dados por la ecuación (2.17) son los coeficientes de Fourier en senos de f en $[0, L]$. Como con la serie en cosenos, no necesita hacer la extensión explícita a f_o para escribir la serie de Fourier en senos para f en $[0, L]$.

Nuevamente, como con el desarrollo en cosenos, escriba un teorema de convergencia para la serie en senos usando el teorema de convergencia para la serie de Fourier.

TEOREMA 2.4 *Convergencia de la serie de Fourier en senos*

Sea f continua a pedazos en $[0, L]$. Entonces,

1. Si $0 < x < L$, y f tiene derivadas izquierda y derecha en x, entonces la serie de Fourier en senos para $f(x)$ en $[0, L]$ converge en x

$$\frac{1}{2}(f(x-) + f(x+)).$$

2. En 0 y en L, la serie de Fourier en senos para $f(x)$ en $[0, L]$ converge a 0. ■

La conclusión (2) es directa, ya que cada término de la serie en senos (2.16) es cero para $x = 0$ y para $x = L$.

EJEMPLO 2.16

Sea $f(x) = e^{2x}$ para $0 \le x \le 1$. Escriba la serie de Fourier en senos de f en $[0, 1]$. Los coeficientes son

$$\begin{aligned} b_n &= 2\int_0^1 e^{2x}\,\text{sen}(n\pi x)\,dx \\ &= 2\frac{n\pi(1-(-1)^n e^2)}{4+n^2\pi^2}. \end{aligned}$$

La serie en senos es

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{n\pi(1-(-1)^n e^2)}{4+n^2\pi^2}\,\text{sen}(n\pi x).$$

Esta serie converge a e^{2x} para $0 < x < 1$, y a cero para $x = 0$ y para $x = 1$. Las figuras 2.28 (a) y (b) muestran las gráficas de la décima y la cuadragésima sumas parciales de esta serie. ■

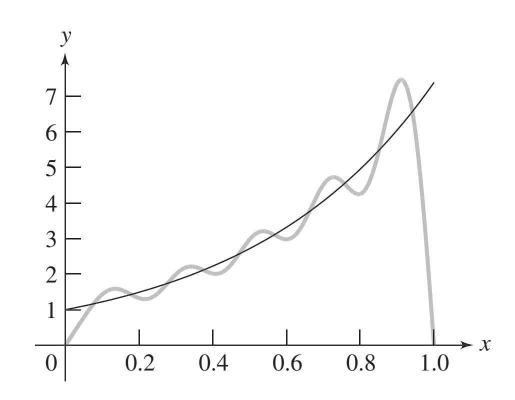


FIGURA 2.28(a) *Décima suma parcial del desarrollo en senos de* e^{2x} *en* [0, 1].

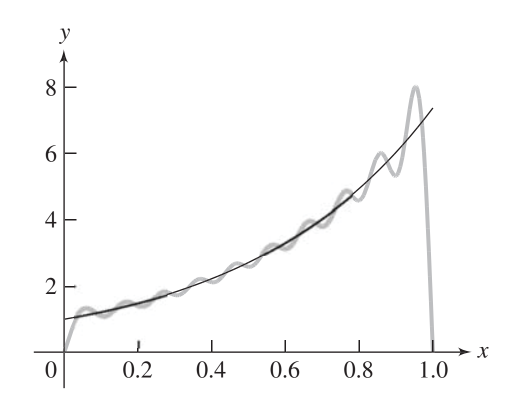


FIGURA 2.28(b) *Cuadragésima suma parcial del desarrollo en senos de* e^{2x} en [0, 1].

SECCIÓN 2.4 PROBLEMAS

En cada problema del 1 al 10, escriba la serie de Fourier en cosenos y la serie de Fourier en senos de la función en el intervalo. Determine la suma de cada serie.

1. $f(x) = 4, 0 \leq x \leq 3$

2. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ -1 & \text{para } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq x < \pi \\ \cos(x) & \text{para } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$

4. $f(x) = 2x$ para $0 \leq x \leq 1$

5. $f(x) = x^2$ para $0 \leq x \leq 2$

6. $f(x) = e^{-x}$ para $0 \leq x \leq 1$

7. $f(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 \leq x \leq 2 \\ 2 - x & \text{para } 2 < x \leq 3 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{para } 1 \leq x \leq 3 \\ -1 & \text{para } 3 < x \leq 5 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{para } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$

10. $f(x) = 1 - x^3$ para $0 \leq x \leq 2$

11. Sea $f(x)$ definida en $[-L, L]$. Pruebe que f puede escribirse como la suma de una función par y una impar en este intervalo.

12. Encuentre todas las funciones definidas en $[-L, L]$ que son al mismo tiempo par e impar.

13. Encuentre la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/(4n^2-1)$. *Sugerencia:* Desarrolle sen(x) en una serie en cosenos en $[0, \pi]$ y elija un valor apropiado de x.

2.5 Integración y diferenciación de series de Fourier

En esta sección se abordan más de cerca los coeficientes de Fourier y se considera la diferenciación e integración de series de Fourier término a término.

Generalmente la diferenciación de series de Fourier término a término lleva a resultados absurdos aun para funciones que tengan un comportamiento extremadamente bueno. Considere por ejemplo, $f(x) = x$ para $-\pi \leq x \leq \pi$. La serie de Fourier es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \operatorname{sen}(nx),$$

que converge a x para $-\pi < x < \pi$. Por supuesto, $f'(x) = 1$ para $-\pi < x < \pi$, de manera que f es suave a pedazos. Sin embargo, si diferencia la serie de Fourier término a término, tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1}\cos(nx),$$

la cual ni siquiera converge en $(-\pi, \pi)$. La derivada término a término de esta serie de Fourier no está relacionada con la derivada de $f(x)$.

La integración de la serie de Fourier tiene mejores expectativas.

TEOREMA 2.5 *Integración de series de Fourier*

Sea f continua a pedazos en $[-L, L]$, con serie de Fourier

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Entonces, para cualquier x con $-L \leq x \leq L$,

$$\int_{-L}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{2}a_0(x+L) + \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - b_n\left(\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - (-1)^n\right)\right]. \blacksquare$$

En esta ecuación, la expresión de la derecha es exactamente lo que obtiene integrando la serie de Fourier término a término, de $-L$ a x. Esto significa que para cualquier función continua a pedazos, puede integrar f de $-L$ a x integrando su serie de Fourier término a término. Esto se satisface aunque la serie de Fourier no converja a $f(x)$ en esta x en particular (por ejemplo, f puede tener una discontinuidad de salto en x).

Prueba Defina

$$F(x) = \int_{-L}^{x} f(t)\,dt - \frac{1}{2}a_0 x$$

para $-L \leq x \leq L$. Entonces F es continua en $[-L, L]$ y $F(L) = F(-L) = La_0/2$. Más aún, $F'(x) = f(x) - \frac{1}{2}a_0$ en todo punto de $[-L, L]$ donde f es continua. Así F es continua a pedazos en $[-L, L]$. Por tanto, la serie de Fourier de $F(x)$ converge a $F(x)$ en $[-L, L]$:

$$F(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{2.18}$$

use letras mayúsculas para los coeficientes de Fourier de F y letras minúsculas para los de f. Ahora calcule las A'_n y B'_n para $n = 1, 2, \ldots$ integrando por partes. Primero,

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt \\
&= \frac{1}{L}\left[F(t)\frac{L}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right]_{-L}^{L} - \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\frac{L}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)F'(t)\,dt \\
&= -\frac{1}{n\pi}\int_{-L}^{L}\left(f(t) - \frac{1}{2}a_0\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt \\
&= -\frac{1}{n\pi}\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt + \frac{1}{2n\pi}a_0\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt \\
&= -\frac{L}{n\pi}b_n,
\end{aligned}$$

en donde b_n es el coeficiente del seno en la serie de Fourier de f en $[-L, L]$. Análogamente,

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \\
&= \frac{1}{L}\left[F(t)\left(-\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right)\right]_{-L}^{L} - \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F'(t)\left(-\frac{L}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \\
&= \frac{1}{n\pi}\int_{-L}^{L}\left(f(t) - \frac{1}{2}a_0\right)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \\
&= \frac{1}{n\pi}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt - \frac{1}{2n\pi}a_0\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \\
&= \frac{L}{n\pi}a_n.
\end{aligned}$$

Por tanto, la serie de Fourier de F es

$$F(x) = \frac{1}{2}A_0 + \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\left(-b_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + a_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

para $-L \leq x \leq L$. Ahora debe determinar A_0. Pero

$$\begin{aligned}
F(L) = \frac{L}{2}a_0 &= \frac{1}{2}A_0 - \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right) b_n\cos(n\pi) \\
&= \frac{1}{2}A_0 - \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right) b_n(-1)^n.
\end{aligned}$$

Esto da

$$A_0 = La_0 + \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right) b_n(-1)^n.$$

Sustituyendo estas expresiones para A_0, A_n y B_n en la serie (2.18), obtiene la conclusión del teorema. ■

EJEMPLO 2.17

Sea $f(x) = x$ para $-\pi \leq x \leq \pi$. Esta función es continua en $[-\pi, \pi]$, y su serie de Fourier es

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\,\mathrm{sen}(nx).$$

Ha visto que si diferencia esta serie término a término, obtiene algo sin sentido. Sin embargo, puede integrarla término a término y obtener para cualquier x en $[-\pi, \pi]$,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{x} t\,dt &= \frac{1}{2}(x^2 - \pi^2) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\int_{-\pi}^{x}\mathrm{sen}(nt)\,dt
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx) + \frac{1}{n}\cos(n\pi)\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}(-1)^{n}\left[\cos(nx) - (-1)^{n}\right]. \blacksquare$$

Con condiciones más fuertes sobre *f*, puede obtener un resultado diferenciando término a término para la serie de Fourier.

TEOREMA 2.6 *Diferenciación de la serie de Fourier*

Sea f continua en $[-L, L]$ y suponga que $f(L) = f(-L)$. Sea f' continua a pedazos en $[-L, L]$. Entonces $f(x)$ es igual a su serie de Fourier para $-L \leq x \leq L$,

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

y, en cada punto en $(-L, L)$ donde $f''(x)$ existe,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L}\left(-na_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) + b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right). \blacksquare$$

Queda la prueba de este resultado al alumno. La idea es escribir la serie de Fourier de $f'(x)$, observando que esta serie de Fourier converge a $f'(x)$ siempre que $f''(x)$ exista. Use integración por partes, como en la prueba del teorema 2.5, para relacionar los coeficientes de Fourier de $f'(x)$ con aquellos de $f(x)$.

EJEMPLO 2.18

Sea $f(x) = x^2$ para $-2 \leq x \leq 2$. Se satisfacen las hipótesis del teorema 2.6. La serie de Fourier de f en $[-2, 2]$ es

$$f(x) = \frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right),$$

con la igualdad entre $f(x)$ y su serie de Fourier. Como $f'(x) = 2x$ es continua, y existe $f''(x) = 2$ en todo el intervalo, entonces para $-2 < x < 2$,

$$f'(x) = 2x = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Por ejemplo, poniendo $x = 1$, obtenemos

$$\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 2,$$

o

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Algunas veces se pueden manipular las series de Fourier para calcular sumas de series como ésta. ■

Éstas son las condiciones bajo las cuales puede diferenciar o integrar una serie de Fourier término a término. Ahora considere condiciones suficientes para que una serie de Fourier converja uniformemente. Primero, obtenga un conjunto de desigualdades importantes para los coeficientes de Fourier, llamadas desigualdades de Bessel.

TEOREMA 2.7 *Desigualdades de Bessel*

Sea f integrable en $[0, L]$. Entonces

1. Los coeficientes de la serie de Fourier en senos de f en $[0, L]$ satisfacen

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \leq \frac{2}{L} \int_{-L}^{L} f(x)^2\, dx.$$

2. Los coeficientes de la serie de Fourier en cosenos de f en $[0, L]$ satisfacen

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x)^2\, dx.$$

3. Si f es integrable en $[-L, L]$, entonces los coeficientes de Fourier de f en $[-L, L]$ satisfacen

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)^2\, dx. \quad ■$$

En particular, la suma de los cuadrados de los coeficientes (senos, cosenos o serie de Fourier) de f converge. Ahora se prueba (1), que es notablemente más sencilla que las otras dos desigualdades pero contiene la idea del argumento.

Prueba Como $\int_0^L f(x)dx$ existe, puede calcular los coeficientes de la serie de Fourier en senos y escribir la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

donde

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

La N-ésima suma parcial de esta serie es

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Ahora considere

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_0^L \left(f(x) - S_N(x)\right)^2\, dx \\
&= \int_0^L f(x)^2\, dx - 2\int_0^L f(x) S_N(x)\, dx + \int_0^L S_N(x)^2\, dx \\
&= \int_0^L f(x)^2\, dx - 2\int_0^L f(x) \left(\sum_{n=1}^{N} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) dx \\
&\quad + \int_0^L \left(\sum_{n=1}^{N} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)\left(\sum_{m=1}^{N} b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right) dx
\end{aligned}$$

$$= \int_0^L f(x)^2\,dx - 2\sum_{n=1}^{N} b_n \int_0^L f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} b_n b_m \int_0^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \int_0^L f(x)^2\,dx - \sum_{n=1}^{N} b_n(Lb_n) + \sum_{n=1}^{N} b_n b_n \frac{L}{2},$$

en la que ha usado el hecho que

$$\int_0^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ L/2 & \text{si } n = m \end{cases}.$$

Por tanto,

$$0 \leq \int_0^L f(x)^2\,dx - L\sum_{n=1}^{N} b_n^2 + \frac{L}{2}\sum_{n=1}^{N} b_n^2,$$

o

$$\sum_{n=1}^{N} b_n^2 \leq \frac{2}{L}\int_0^L f(x)^2\,dx.$$

Como el lado derecho es independiente de N, puede hacer $N \to \infty$ para obtener

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \leq \frac{2}{L}\int_0^L f(x)^2\,dx,$$

resultando la conclusión (1). Las conclusiones (2) y (3) tienen pruebas semejantes. ■

EJEMPLO 2.19

Use la desigualdad de Bessel para obtener una cota superior para una serie infinita. Sea $f(x) = x^2$ para $-\pi \leq x \leq \pi$. La serie de Fourier de f converge a $f(x)$ para todo x en $[-\pi, \pi]$:

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

Aquí $a_0 = 2\pi^2/3$, $a_n = 4(-1)^n/n^2$ y $b_n = 0$ (x^2 es una función par). Por la desigualdad de Bessel (3) del teorema 2.7,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^n}{n^2}\right)^2 \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4\,dx = \frac{2}{5}\pi^4.$$

Entonces

$$16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \leq \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{9}\right)\pi^4 = \frac{8\pi^4}{45},$$

así

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \leq \frac{\pi^4}{90},$$

lo que aproximadamente es 1.0823232. ■

Usando la desigualdad de Bessel para los coeficientes en el desarrollo de Fourier en $[-L, L]$, puede probar un resultado acerca de la convergencia uniforme de la serie de Fourier.

TEOREMA 2.8 *Convergencia uniforme y absoluta de la serie de Fourier*

Sea f continua en $[-L, L]$ y sea f' continua a pedazos. Suponga que $f(-L) = f(L)$. Entonces, la serie de Fourier de f en $[-L, L]$ converge absoluta y uniformemente a $f(x)$ en $[-L, L]$. ■

Prueba Denote los coeficientes de Fourier de f con letras minúsculas y aquellos de f' con mayúsculas. Entonces

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f'(\xi)\,d\xi = (f(L) - f(-L)) = 0.$$

Para enteros positivos n, integre por partes, como en la prueba del teorema 2.5, que

$$A_n = \frac{n\pi}{L}b_n \quad \text{y} \quad B_n = -\frac{n\pi}{L}a_n.$$

Ahora

$$0 \le \left(|A_n| - \frac{1}{n}\right)^2 = A_n^2 - \frac{2}{n}|A_n| + \frac{1}{n^2}$$

y análogamente,

$$0 \le B_n^2 - \frac{2}{n}|B_n| + \frac{1}{n^2}.$$

Entonces

$$\frac{1}{n}|A_n| + \frac{1}{n}|B_n| \le \frac{1}{2}\left(A_n^2 + B_n^2\right) + \frac{1}{n^2}.$$

Por tanto,

$$\frac{\pi}{L}|a_n| + \frac{\pi}{L}|b_n| \le \frac{1}{2}\left(A_n^2 + B_n^2\right) + \frac{1}{n^2};$$

de donde

$$|a_n| + |b_n| \le \frac{L}{2\pi}\left(A_n^2 + B_n^2\right) + \frac{L}{\pi}\frac{1}{n^2}.$$

Ahora $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ converge, y $\sum_{n=1}^{\infty}(A_n^2 + B_n^2)$ converge, debido a la aplicación de la desigualdad de Bessel a los coeficientes de Fourier de f'. Así, por comparación, $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$ también converge.

Pero, para $-L \le x \le L$,

$$\left|a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right| \le |a_n| + |b_n|\,.$$

Por un teorema de Weierstrass, éste implica que la serie de Fourier de f converge uniformemente en $[-L, L]$. Más aún, la convergencia es absoluta, ya que la serie de los valores absolutos de los términos de la serie, converge. Finalmente, por el teorema de convergencia de Fourier, la serie de Fourier de f converge a $f(x)$ en $[-L, L]$. Esto completa la prueba. ■

EJEMPLO 2.20

Sea $f(x) = e^{-|x|}$ para $-1 \leq x \leq 1$. Entonces

$$f(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{para } -1 \leq x < 0 \\ e^{-x} & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

f es continua en $[-1, 1]$, y

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{para } 0 < x \leq 1 \\ e^{x} & \text{para } -1 \leq x < 0 \end{cases}.$$

f no tiene derivada en $x = 0$, ya que es un pico de la gráfica (figura 2.29). Así f' es continua a pedazos en $[-1, 1]$. Finalmente, $f(1) = f(-1) = e^{-1}$. Por tanto, la serie de Fourier de f converge uniforme y absolutamente a $f(x)$ en $[-1, 1]$:

$$f(x) = 1 - e^{-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-1}(-1)^n}{1 + \pi^2 n^2} \cos(n\pi x)$$

para $-1 \leq x \leq 1$.

Puede integrar esta serie término a término. Por ejemplo,

$$\int_{-1}^{x} f(t)\,dt = \int_{-1}^{x} (1 - e^{-1})\,dt + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-1}(-1)^n}{1 + \pi^2 n^2} \int_{-1}^{x} \cos(n\pi t)\,dt$$

$$= (1 - e^{-1})(x + 1) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-1}(-1)^n}{1 + \pi^2 n^2} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x).$$

Ésta es una ecuación correcta, pero no es una serie de Fourier (el lado derecho del término polinomial en x). Algunas veces integrará una serie de Fourier término a término, y el resultado puede ser una serie convergente, pero no necesariamente una serie de Fourier.

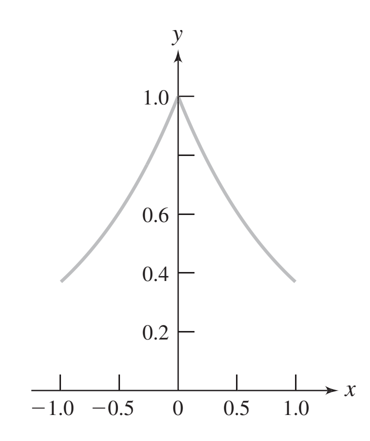


FIGURA 2.29 *Gráfica de*

$$f(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{para } -1 \leq x < 0 \\ e^{-x} & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

También puede diferenciar la serie de Fourier para $f(x)$ término a término en cualquier punto en $(-1, 1)$ en donde existe $f''(x)$. Así puede diferenciar término a término para $-1 < x < 0$ y para $0 < x < 1$. Para tales x,

$$f'(x) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-1}(-1)^n}{1 + \pi^2 n^2} n\pi \operatorname{sen}(n\pi x). \quad ■$$

Esta sección concluye con el teorema de Parseval. Recuerde que la desigualdad de Bessel para los coeficientes de Fourier en $[-L, L]$ requiere sólo del cálculo de dichos coeficientes. Si además impone condiciones de continuidad en la función, como en el teorema 2.8, entonces la desigualdad de Bessel se convierte en igualdad.

TEOREMA 2.9 *Parseval*

Sea f continua en $[-L, L]$ y sea f' continua a pedazos. Suponga que $f(-L) = f(L)$. Entonces los coeficientes de Fourier de f en $[-L, L]$ satisfacen

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)^2\, dx. \quad ■$$

Prueba La serie de Fourier de f en $[-L, L]$ converge a $f(x)$ en cada punto de este intervalo:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Entonces

$$f(x)^2 = \frac{1}{2}a_0 f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Puede integrar término a término esta serie de Fourier, y la multiplicación de la serie por la función continua $f(x)$ no cambia esto. Por tanto,

$$\int_{-L}^{L} f(x)^2\, dx = \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Recordando las fórmulas integrales para los coeficientes de Fourier, esta ecuación puede escribirse como

$$\int_{-L}^{L} f(x)^2\, dx = \frac{1}{2}a_0 L a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n L a_n + b_n L b_n),$$

y esto es equivalente a la conclusión del teorema. ■

EJEMPLO 2.21

El teorema de Parseval tiene varias aplicaciones en la deducción de otras propiedades de la serie de Fourier. Más tarde se enfrentará con ellas cuando estudie la completez de conjuntos de funciones propias. Sin embargo, una aplicación inmediata es la obtención de sumas de ciertas series infinitas. Para ilustrar, los coeficientes de Fourier de $\cos(x/2)$ en $[-\pi, \pi]$ son

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{4}{\pi}$$

y

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\,dx = -\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}.$$

Por el teorema de Parseval,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\right)^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)dx = 1.$$

Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2-8}{16}. \blacksquare$$

SECCIÓN 2.5 PROBLEMAS

1. Pruebe el teorema 2.6. Puede formularse un argumento usando la discusión que sigue al enunciado del teorema.

2. Sea $f(x) = |x|$ para $-1 \le x \le 1$.

(a) Escriba la serie de Fourier para $f(x)$ en $[-1, 1]$.

(b) Pruebe que esta serie puede diferenciarse término a término para llegar al desarrollo de Fourier de $f'(x)$ en $[-1, 1]$.

(c) Determine $f'(x)$ y escriba su serie de Fourier en $[-1, 1]$. Compare esta serie con la obtenida en (b).

3. Sea $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\pi \le x \le 0 \\ x & \text{para } 0 < x \le \pi. \end{cases}$

(a) Escriba la serie de Fourier de $f(x)$ en $[-\pi, \pi]$ y pruebe que esta serie converge a $f(x)$ en $(-\pi, \pi)$.

(b) Pruebe que esta serie se puede integrar término a término.

(c) Use los resultados de (a) y (b) para obtener un desarrollo en serie trigonométrica para $\int_{-\pi}^{x} f(t)dt$ en $[-\pi, \pi]$.

4. Sea $f(x) = x^2$ para $-3 \le x \le 3$.

(a) Escriba la serie de Fourier para $f(x)$ en $[-3, 3]$.

(b) Pruebe que esta serie se puede diferenciar término a término y utilice este hecho para obtener el desarrollo de Fourier de $2x$ en $[-3, 3]$.

(c) Escriba la serie de Fourier de $2x$ en $[-3, 3]$ calculando los coeficientes de Fourier y compare el resultado con el de (b).

5. Sea $f(x) = x\,\text{sen}(x)$ para $-\pi \le x \le \pi$.

(a) Escriba la serie de Fourier para $f(x)$ en $[-\pi, \pi]$.

(b) Pruebe que esta serie se puede diferenciar término a término y utilice este hecho para obtener el desarrollo de Fourier de $\text{sen}(x) + x\cos(x)$ en $[-\pi, \pi]$.

(c) Escriba la serie de Fourier de $\text{sen}(x) + x\cos(x)$ en $[-\pi, \pi]$ calculando los coeficientes de Fourier y compare el resultado con el de (b).

2.6 La forma de ángulo fase de la serie de Fourier

Una función es *periódica* con periodo p si $f(x+p) = f(x)$ para todo x real. Si una función tiene un periodo, dicha función tiene muchos periodos. Por ejemplo, $\cos(x)$ tiene periodos $2\pi, 4\pi, 6\pi, -2\pi, -4\pi$, y de hecho, $2n\pi$ para cualquier entero n. El periodo positivo mínimo de una función se llama *periodo fundamental*. El periodo fundamental de $\text{sen}(x)$ y $\cos(x)$ es 2π.

Si f tiene periodo p, entonces para cualquier x, y cualquier entero n,

$$f(x+np) = f(x).$$

Por ejemplo,

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + 4\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + 6\pi\right) = \cdots$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 4\pi\right) = \cdots .$$

La gráfica de $f(x)$ periódica se repite sobre todo intervalo de longitud p (figura 2.30). Esto significa que sólo necesita especificar $f(x)$ en un intervalo de longitud p, en $[-p/2, p/2)$, para determinar $f(x)$ para todo x. Estas especificaciones de los valores de la función pueden hacerse en cualquier intervalo $[\alpha, \alpha + p)$ de longitud p. Como $f(\alpha + p) = f(\alpha)$, la función debe tener el mismo valor en los extremos de este intervalo. Esta es la razón por la cual especifica los valores en el intervalo semiabierto $[\alpha, \alpha + p)$, ya que $f(\alpha + p)$ está determinada una vez que $f(\alpha)$ está definida.

EJEMPLO 2.22

Sea $g(x) = 2x$ para $-1 \le x < 1$, y suponga que g tiene periodo 2. Entonces, la gráfica de g en $[-1, 1)$ se repite para cubrir toda la recta real, como en la figura 2.31. Basta conocer el periodo y los valores de la función en $[-1, 1)$, para determinar la función para todo x.

Como un ejemplo específico, suponga que quiere conocer $g(\frac{7}{2})$. Como g tiene periodo 2, $g(x + 2n) = g(x)$ para cualquier x y cualquier entero n. Entonces

$$g\left(\frac{7}{2}\right) = g\left(-\frac{1}{2} + 4\right) = g\left(\frac{-1}{2}\right) = 2\left(\frac{-1}{2}\right) = -1.$$

Análogamente,

$$g(48.3) = g(0.3 + 2(24)) = g(0.3) = 0.6. \blacksquare$$

Si f tiene periodo p y es integrable, entonces calcule sus coeficientes de Fourier en $[-p/2, p/2]$ y escriba la serie de Fourier

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{p}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{p}\right)\right).$$

Aquí $L = p/2$, entonces $n\pi x/L = 2n\pi x/p$ en la discusión anterior de la serie de Fourier en $[-L, L]$. Los coeficientes de Fourier son

$$a_n = \frac{2}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{p}\right)dx \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

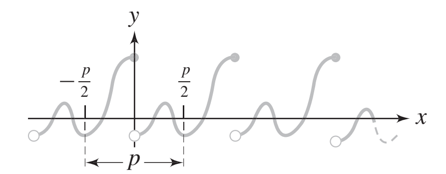


FIGURA 2.30 *Gráfica de una función periódica con periodo fundamental p.*

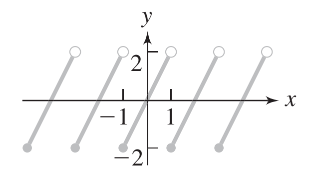


FIGURA 2.31

y

$$b_n = \frac{2}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(x)\,\text{sen}\left(\frac{2n\pi x}{p}\right)dx \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots.$$

De hecho, debido a la periodicidad, podría escoger cualquier número conveniente α y escribir

$$a_n = \frac{2}{p}\int_{\alpha}^{\alpha+p} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{p}\right)dx \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.19}$$

y

$$b_n = \frac{2}{p}\int_{\alpha}^{\alpha+p} f(x)\,\text{sen}\left(\frac{2n\pi x}{p}\right)dx \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots. \tag{2.20}$$

Una vez calculados los coeficientes, puede usar un teorema de convergencia para determinar en dónde esta serie representa $f(x)$.

EJEMPLO 2.23

La función f que se muestra en la figura 2.32 tiene periodo fundamental 6, y

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -3 \le x < 0 \\ 1 & \text{para } 0 \le x < 3 \end{cases}.$$

Esta función se llama *onda cuadrada*. Su serie de Fourier en $[-3, 3]$ es

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}(1-(-1)^n)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{3}\right).$$

Esta serie converge a 0 para $-3 < x < 0$, a 1 para $0 < x < 3$, y a $\frac{1}{2}$ en $x = 0$ y $x = \pm 3$. Debido a la periodicidad, esta serie también converge a $f(x)$ en $(-6,-3)$ y a $(3, 6)$, en $(-6,-9)$ y a $(6, 9)$, y así sucesivamente. ■

A veces

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{p}.$$

Ahora la serie de Fourier de f en $[-p/2, p/2]$ es

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega_0 x) + b_n\,\text{sen}(\omega_0 x)\right), \tag{2.21}$$

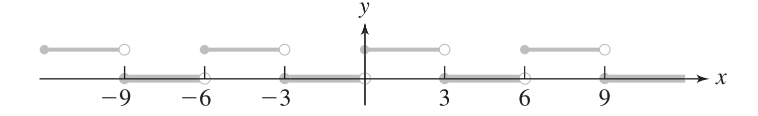


FIGURA 2.32 *Onda cuadrada:* $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -3 \le x < 0 \\ 1 & \text{para } 0 \le x < 3 \end{cases}$, *y f tiene periodo.*

donde

$$a_n = \frac{2}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(x)\cos(n\omega_0 x)\,dx \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

y

$$b_n = \frac{2}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(x)\,\text{sen}(n\omega_0 x)\,dx \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots.$$

Algunas veces es conveniente escribir la serie de Fourier (2.21) de una forma diferente. Busque números c_n y δ_n tales que

$$a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n\,\text{sen}(n\omega_0 x) = c_n \cos(n\omega_0 x + \delta_n).$$

Para resolver estas constantes, escriba la última ecuación como

$$a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n\,\text{sen}(n\omega_0 x) = c_n \cos(n\omega_0 x)\cos(\delta_n) - c_n\,\text{sen}(n\omega_0 x)\,\text{sen}(\delta_n).$$

Una manera de satisfacer esta ecuación es tener

$$c_n \cos(\delta_n) = a_n$$

y

$$c_n\,\text{sen}(\delta_n) = -b_n.$$

Resuelva ésta para c_n y δ_n. Primero eleve al cuadrado ambas ecuaciones y las suma para obtener

$$c_n^2 = a_n^2 + b_n^2,$$

entonces

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}. \tag{2.22}$$

Ahora, escriba

$$\frac{c_n\,\text{sen}(\delta_n)}{c_n\cos(\delta_n)} = \tan(\delta_n) = -\frac{b_n}{a_n},$$

así

$$\delta_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right),$$

suponiendo que $a_n \neq 0$. Los números c_n y δ_n permiten escribir la forma de ángulo fase de la serie de Fourier (2.21).

DEFINICIÓN 2.7 ***Forma de ángulo fase***

Sea f con periodo fundamental p. Entonces la forma de ángulo fase de la serie de Fourier (2.21) de f es

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 x + \delta_n),$$

en donde $\omega_0 = 2\pi/p$, $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, y $\delta_n = \tan^{-1}(-b_n/a_n)$ para $n = 1, 2, \ldots$

La forma de ángulo fase de la serie de Fourier también es llamada *forma armónica*. Esta expresión exhibe la composición de una función periódica (que satisface ciertas condiciones de continuidad) como una superposición de ondas coseno. El término $\cos(n\omega_0 x + \delta n)$ es la n-ésima *armónica de f*, c_n es la n-ésima *amplitud armónica*, y δ_n es el n-ésimo *ángulo fase de f*.

EJEMPLO 2.24

Suponga que f tiene periodo fundamental $p = 3$, y

$$f(x) = x^2 \quad \text{para } 0 \le x < 3.$$

Como f tiene periodo fundamental 3, definiendo $f(x)$ en cualquier intervalo $[a, b)$ de longitud 3 determina $f(x)$ para todo x. Por ejemplo,

$$f(-1) = f(-1+3) = f(2) = 4,$$
$$f(5) = f(2+3) = f(2) = 2^2 = 4,$$

(observe que $f(5) = f(-1 + 6) = f(-1 + (2 \cdot 3) = f(-1) = 4)$, y

$$f(7) = f(1+6) = f(1) = 1.$$

En la figura 2.33 se muestra la gráfica de f.

Hay que tener cuidado si quiere escribir una expresión algebraica para $f(x)$ en un intervalo diferente. Por ejemplo, en el intervalo simétrico $[\frac{-3}{2}, \frac{3}{2})$ alrededor del origen,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } 0 \le x < \frac{3}{2} \\ (x+3)^2 & \text{para } \frac{-3}{2} \le x < 0 \end{cases}$$

Para encontrar los coeficientes de Fourier de f, es conveniente usar las ecuaciones (2.19) y (2.20) con $\alpha = 0$, como f está dada explícitamente en $[0, 3)$. Calcule

$$a_0 = \frac{2}{3}\int_0^3 x^2\,dx = 6,$$

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 x^2 \cos\left(\frac{2n\pi x}{3}\right)dx = \frac{9}{n^2\pi^2}$$

y

$$b_n = \frac{2}{3}\int_0^3 x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{3}\right)dx = -\frac{9}{n\pi}.$$

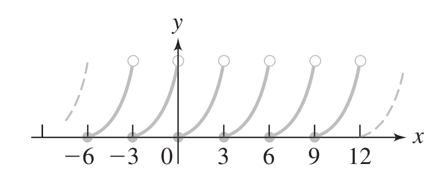


FIGURA 2.33 *Gráfica de $f(x) = x^2$ para $0 \le x < 3$, con $f(x + 3) = f(x)$ para todo x.*

La serie de Fourier de f es

$$3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{n\pi}\left(\frac{1}{n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi x}{3}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{3}\right)\right). \tag{2.23}$$

Puede pensar en ésta como la serie de Fourier de f en el intervalo simétrico $[\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}]$ alrededor del origen. Por el teorema de convergencia de Fourier, esta serie converge a

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}+\frac{9}{4}\right)=\frac{9}{4} & \text{para } x=\frac{\pm 3}{2} \\ \frac{9}{2} & \text{para } x=0 \\ (x+3)^2 & \text{para } -\frac{3}{2}<x<0 \\ x^2 & \text{para } 0<x<\frac{3}{2} \end{cases}$$

Para la forma de ángulo fase o forma armónica de esta serie de Fourier, calcule

$$c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}=\frac{9}{n^2\pi^2}\sqrt{1+n^2\pi^2} \quad \text{para } n=1,2,\ldots$$

y

$$\delta_n=\tan^{-1}\left(-\frac{-9/n\pi}{9/n^2\pi^2}\right)=\tan^{-1}(n\pi).$$

Como $\omega_0 = 2\pi/3$, la forma de ángulo fase de la serie (2.23) es

$$3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{n^2\pi^2}\sqrt{1+n^2\pi^2}\cos\left(\frac{2n\pi x}{3}+\tan^{-1}(n\pi)\right). \blacksquare$$

El *espectro de amplitud* de una función periódica f es una gráfica de los valores de $n\omega_0$ en el eje horizontal *versus* $c_n/2$ en el eje vertical, para $n = 1, 2, \ldots$ Así el espectro de amplitud consiste en los puntos $(n\omega_0, c_n/2)$ para $n = 1, 2, \ldots$ También es usual incluir el punto $(0, |a_0|)$ en el eje vertical. La figura 2.34 muestra el espectro de amplitud para la función del ejemplo 2.24, consiste en los puntos (0, 3) y, para $n = 1, 2, \ldots,$

$$\left(\frac{2n\pi}{3}, \frac{9}{2n^2\pi^2}\sqrt{1+n^2\pi^2}\right).$$

Esta gráfica permite visualizar la magnitud de las armónicas de las cuales está compuesta la función periódica y esclarecer cuáles armónicas dominan en la función. Esto es útil en el análisis de señales, en donde la función es la señal.

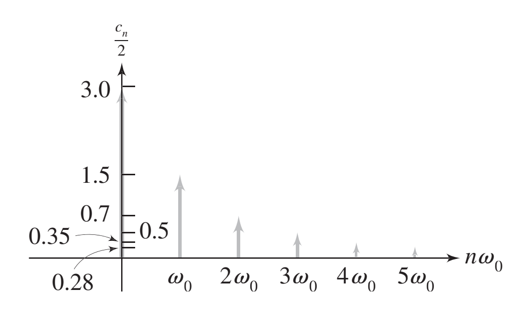


FIGURA 2.34 *Espectro de amplitud para la función de la figura 2.33.*

SECCIÓN 2.6 PROBLEMAS

1. Sean f y g con periodo p. Pruebe que $\alpha f + \beta g$ tiene periodo p para cualquier constante α y β.

2. Sea f con periodo p y sean α y β constantes positivas. Pruebe que $g(t) = f(\alpha t)$ tiene periodo p/α y que $h(t) = f(t/\beta)$ tiene periodo βp.

3. Sea $f(x)$ diferenciable y con periodo p. Pruebe que $f'(x)$ tiene periodo p.

4. Suponga que f tiene periodo p. Pruebe que, para cualquier número real α,

$$\int_{\alpha}^{\alpha+p} f(x)\,dx = \int_0^p f(x)\,dx = \int_{-p/2}^{p/2} f(x)\,dx.$$

En cada problema del 5 al 9, encuentre la forma del ángulo fase de la serie de Fourier de la función. Trace algunos puntos del espectro de amplitud de la función.

5. $f(x) = x$ para $0 \le x < 2$ y $f(x+2) = f(x)$ para todo x.

6. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{para } 1 \le x < 2 \\ f(x+2) & \text{para todo } x. \end{cases}$

7. $f(x) = 3x^2$ para $0 \le x < 4$ y $f(x+4) = f(x)$ para todo x.

8. $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{para } 0 \le x < 3 \\ 2 & \text{para } 3 \le x < 4 \\ f(x+4) & \text{para todo } x. \end{cases}$

9. $f(x) = \cos(\pi x)$ para $0 \le x < 1$ y $f(x) = f(x+1)$ para todo x.

En cada problema del 10 al 14, encuentre la forma del ángulo fase de la serie de Fourier de la función, se da una parte de su gráfica en el diagrama indicado. Trace algunos puntos del espectro de amplitud de la función.

10. Figura 2.35

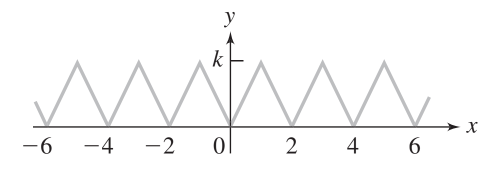


FIGURA 2.35

11. Figura 2.36

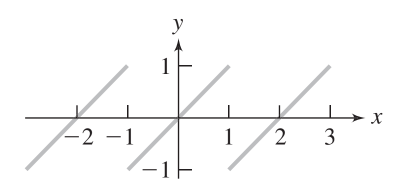


FIGURA 2.36

12. Figura 2.37

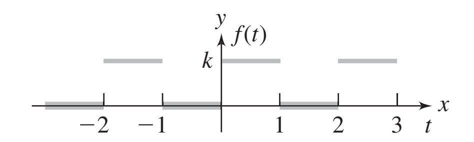


FIGURA 2.37

13. Figura 2.38

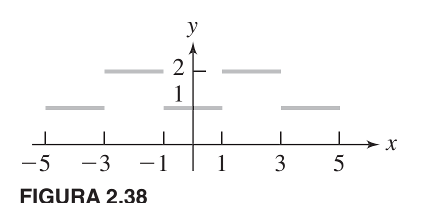


FIGURA 2.38

14. Figura 2.39

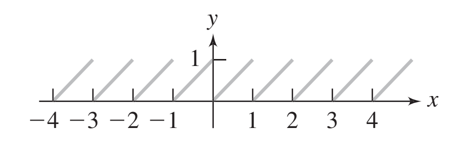


FIGURA 2.39

15. Determine la representación en serie de Fourier de la corriente en estado estacionario en el circuito de la figura 2.40 si

$$E(t) = \begin{cases} 100t(\pi^2 - t^2) & \text{para } -\pi \le t < \pi \\ E(t + 2\pi) & \text{para todo } t \end{cases}.$$

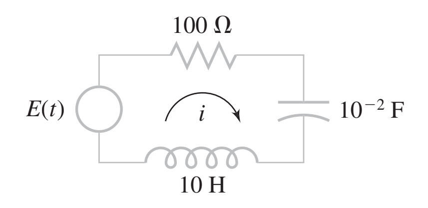


FIGURA 2.40

16. Determine la representación en serie de Fourier de la corriente en estado estacionario en el circuito que se muestra en la figura 2.41 si $E(t) = |10 \text{ sen}(800\pi t)|$. *Sugerencia:* primero muestre que

$$E(t) = \frac{20}{\pi}\left[1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(1600n\pi t)}{4n^2 - 1}\right].$$

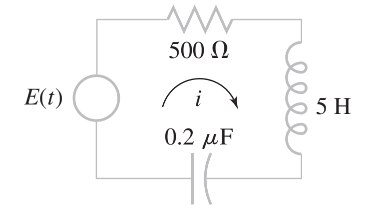


FIGURA 2.41

2.7 Serie de Fourier compleja y el espectro de frecuencia

Muchas veces es conveniente trabajar en términos de los números complejos, aunque las cantidades de interés sean reales. Por ejemplo, los ingenieros eléctricos con frecuencia usan ecuaciones que tienen cantidades complejas para calcular corrientes, teniendo presente al final que la corriente es la parte real de una cierta expresión compleja.

Estudie la serie de Fourier en este escenario. Más tarde, la serie de Fourier compleja y sus coeficientes darán un punto de partida natural para el desarrollo de la transformada de Fourier discreta.

2.7.1 Revisión de los números complejos

Dado un número complejo $a + bi$, su *conjugado* es $\overline{a + bi} = a - bi$. Si identifica $a + bi$ con el punto (a, b) en el plano, entonces $a - bi$ es $(a, -b)$, la reflexión de (a, b) a lo largo del eje horizontal (real) (figura 2.42).

El conjugado de un producto es el producto de los conjugados:

$$\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$$

para cualesquiera números complejos z y w.

La *magnitud*, o módulo, de $a + bi$ es $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$, la distancia del origen a (a, b). Es útil observar que

$$(a + bi)(\overline{a + bi}) = a^2 + b^2 = |a + bi|^2.$$

Si denota al número complejo como z, esta ecuación es

$$z\overline{z} = |z|^2.$$

Introduzca las coordenadas polares $x = r\cos(\theta)$, $y = r\text{ sen}(\theta)$ para escribir

$$z = x + iy = r[\cos(\theta) + i\text{ sen}(\theta)] = re^{i\theta},$$

por la fórmula de Euler. Entonces $r = |z|$ y θ es llamado un *argumento de z*. Es el ángulo entre la parte positiva del eje x y el punto (x, y), o $x + iy$, en el plano (figura 2.43). El argumento está determinado den-

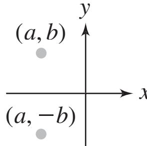


FIGURA 2.42 *Conjugado complejo como una reflexión a lo largo del eje horizontal.*

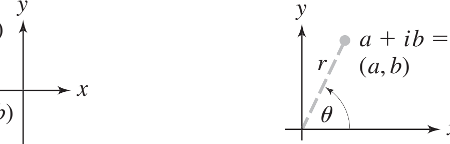


FIGURA 2.43 *Forma polar de un número complejo.*

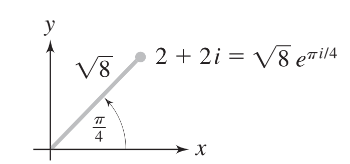


FIGURA 2.44 *Forma polar de* $2 + 2i$.

tro de múltiplos enteros de 2π. Por ejemplo, $|2 + 2i| = \sqrt{8}$ y los argumentos de $2 + 2i$ son los ángulos $\pi/4 + 2n\pi$, con n cualquier entero (figura 2.44). Así, escriba

$$2 + 2i = \sqrt{8}e^{i\pi/4}.$$

Esta es la *forma polar* de $2 + 2i$. De hecho puede escribir $2 + 2i = \sqrt{8}\, e^{i(\pi/4+2n\pi)}$, pero no contribuye en nada a la forma polar de $2 + 2i$, ya que

$$e^{i(\pi/4+2n\pi)} = e^{\pi i/4}e^{2n\pi i}$$

y

$$e^{2n\pi i} = \cos(2n\pi) + i\ \mathrm{sen}(2n\pi) = 1.$$

Si usa dos veces la fórmula de Euler, escriba

$$e^{ix} = \cos(x) + i\ \mathrm{sen}(x)$$

y

$$e^{-ix} = \cos(x) - i\ \mathrm{sen}(x).$$

Resuelva estas ecuaciones para sen(x) y cos(x) para escribir

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \quad \text{y} \quad \mathrm{sen}(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right). \tag{2.24}$$

Finalmente, use el hecho de que si x es un número real, entonces $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$. Esto es cierto porque

$$\overline{e^{ix}} = \overline{\cos(x) + i\ \mathrm{sen}(x)} = \cos(x) - i\ \mathrm{sen}(x) = e^{-ix}.$$

2.7.2 Serie de Fourier compleja

Use estas ideas para formular la serie de Fourier de una función en términos complejos. Sea f una función de variable real, periódica con periodo fundamental p. Suponga que f es integrable en $[-p/2, p/2]$. Como hizo con la forma del ángulo fase de una serie de Fourier, escriba la serie de Fourier de $f(x)$ en este intervalo como

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n\ \mathrm{sen}(n\omega_0 x)],$$

con $\omega_0 = 2\pi/p$. Use las ecuaciones (2.24) para escribir esta serie como

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\frac{1}{2}\left(e^{in\omega_0 x} + e^{-in\omega_0 x}\right) + b_n\frac{1}{2i}\left(e^{in\omega_0 x} - e^{-in\omega_0 x}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{in\omega_0 x} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-in\omega_0 x}\right].\end{aligned} \tag{2.25}$$

En la serie (2.25), sea

$$d_0 = \frac{1}{2}a_0$$

y para cada entero positivo n,

$$d_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n).$$

Entonces la serie (2.25) llega a ser

$$d_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[d_n e^{in\omega_0 x} + \overline{d_n}e^{-in\omega_0 x}] = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{in\omega_0 x} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{d_n}e^{-in\omega_0 x}. \tag{2.26}$$

Ahora considere los coeficientes. Primero,

$$d_0 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(t)\,dt.$$

Y, para $n = 1, 2, \ldots,$

$$\begin{aligned}d_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ &= \frac{1}{2}\frac{2}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt - \frac{i}{2}\frac{2}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(t)\,\text{sen}(n\omega_0 t)\,dt \\ &= \frac{1}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(t)[\cos(n\omega_0 t) - i\,\text{sen}(n\omega_0 t)]\,dt \\ &= \frac{1}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(t)e^{-in\omega_0 t}\,dt.\end{aligned}$$

Entonces

$$\overline{d_n} = \frac{1}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(t)\overline{e^{-in\omega_0 t}}\,dt = \frac{1}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(t)e^{in\omega_0 t}\,dt = d_{-n}.$$

Ponga estos resultados en la serie (2.26) para obtener

$$\begin{aligned}&d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{in\omega_0 x} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{d_n}e^{-in\omega_0 x} \\ &= \frac{1}{2}d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{in\omega_0 x} + \sum_{n=1}^{\infty} d_{-n}e^{-in\omega_0 x} \\ &= d_0 + \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} d_n e^{in\omega_0 x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\omega_0 x}.\end{aligned}$$

Ha encontrado esta expresión rearreglando los términos en la serie de Fourier de una función periódica f. Esto sugiere la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.8 *Serie de Fourier compleja*

Sea f con periodo fundamental p. Sea $\omega_0 = 2\pi/p$. Entonces la serie de Fourier compleja de f es

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\omega_0 x},$$

donde

$$d_n = \frac{1}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(t)e^{-in\omega_0 t}\,dt$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Los números d_n son los coeficientes de Fourier complejos de f.

En la fórmula para d_n, la integración se puede llevar a cabo sobre cualquier intervalo de longitud p, debido a la periodicidad de f. Así, para cualquier número real α,

$$d_n = \frac{1}{p}\int_{\alpha}^{\alpha+p} f(t)e^{-in\omega_0 t}\,dt.$$

Como la serie de Fourier compleja es sólo otra forma de escribir la serie de Fourier, los teoremas de convergencia (2.1) y (2.2) se aplican sin necesidad de ninguna adaptación.

TEOREMA 2.10

Sea f periódica con periodo fundamental p. Sea f suave a pedazos en $[-p/2, p/2]$. Entonces, en cada x la serie de Fourier compleja converge a $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$. ■

El *espectro de amplitud* de la serie de Fourier compleja de una función periódica es la gráfica de los puntos $(n\omega_0, |d_n|)$, en donde $|d_n|$ es la magnitud del coeficiente complejo d_n. Algunas veces este espectro de amplitud es llamado también *espectro de frecuencia*.

EJEMPLO 2.25

Calcule la serie de Fourier compleja de la rectificación de onda completa de E sen(λt), en donde E y λ son constantes positivas. Observe que aquí la variable es t y no x.

Esto significa que quiere la serie de Fourier compleja de $|E \operatorname{sen}(\lambda t)|$, cuya gráfica se muestra en la figura 2.45. Esta función tiene periodo fundamental π/λ (aunque E sen(λt) tiene periodo $2\pi/\lambda$). En este ejemplo, $\omega_0 = 2\pi/(\pi/\lambda) = 2\lambda$. Los coeficientes de Fourier complejos son

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{\lambda}{\pi}\int_0^{\pi/\lambda} |E \operatorname{sen}(\lambda t)|\, e^{-2n\lambda i t}\,dt \\ &= \frac{E\lambda}{\pi}\int_0^{\pi/\lambda} \operatorname{sen}(\lambda t)e^{-2n\lambda i t}\,dt. \end{aligned}$$

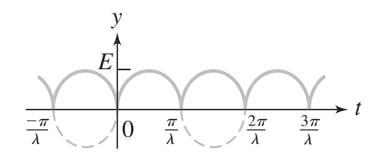


FIGURA 2.45 *Gráfica de* $|E\,\text{sen}(\lambda t)|$.

Cuando $n = 0$,

$$d_0 = \frac{E\lambda}{\pi}\int_0^{\pi/\lambda} \text{sen}(\lambda t)\,dt = \frac{2E}{\pi}.$$

Cuando $n \neq 0$, la integración se simplifica poniendo el término seno en forma exponencial:

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{E\lambda}{\pi}\int_0^{\pi/\lambda} \frac{1}{2i}\left(e^{\lambda it} - e^{-\lambda it}\right)e^{-2n\lambda it}\,dt \\ &= \frac{E\lambda}{2i\pi}\int_0^{\pi/\lambda} e^{(1-2n)\lambda it}\,dt - \frac{E\lambda}{2i\pi}\int_0^{\pi/\lambda} e^{-(1+2n)\lambda it}\,dt \\ &= \frac{E\lambda}{2i\pi}\left[\frac{1}{(1-2n)\lambda i}e^{(1-2n)\lambda it}\right]_0^{\pi/\lambda} + \frac{E\lambda}{2i\pi}\left[\frac{1}{(1+2n)\lambda i}e^{-(1+2n)\lambda it}\right]_0^{\pi/\lambda} \\ &= -\frac{E}{2\pi}\left[\frac{e^{(1-2n)\pi i}}{1-2n} - \frac{1}{1-2n} + \frac{e^{-(1+2n)\pi i}}{1+2n} - \frac{1}{1+2n}\right]. \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} e^{(1-2n)\pi i} &= \cos((1-2n)\pi) + i\,\text{sen}((1-2n)\pi) \\ &= (-1)^{1-2n} = -1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} e^{-(1+2n)\pi i} &= \cos((1+2n)\pi) - i\,\text{sen}((1+2n)\pi) \\ &= (-1)^{1+2n} = -1. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} d_n &= -\frac{E}{2\pi}\left[\frac{-1}{1-2n} - \frac{1}{1-2n} + \frac{-1}{1+2n} + \frac{-1}{1+2n}\right] \\ &= -\frac{2E}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}. \end{aligned}$$

Cuando $n = 0$, esto también da un valor correcto para d_0. La serie de Fourier compleja de $|E\,\text{sen}(\lambda t)|$ es

$$-2\frac{E}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}e^{2n\lambda it}.$$

El espectro de amplitud es un trazo de los puntos

$$\left(2n\lambda, \left|\frac{2E}{(4n^2-1)\pi}\right|\right).$$

En la figura 2.46 se muestra una parte de este trazo. ■

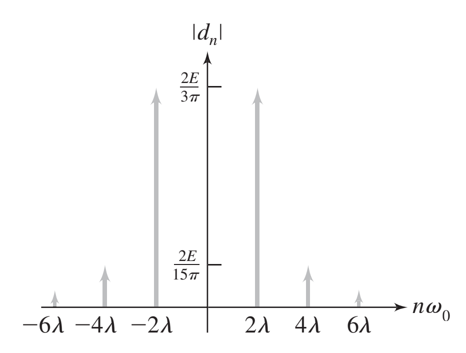


FIGURA 2.46 *Espectro de amplitud de* $|E\,\text{sen}(\lambda t)|$.

SECCIÓN 2.7 PROBLEMAS

En cada problema del 1 al 7 escriba la serie de Fourier compleja de f, determine a qué converge esta serie y trace algunos puntos del espectro de frecuencia. Tenga en mente que para especificar una función de periodo p, es suficiente definir $f(P)$ en cualquier intervalo de longitud p.

1. f tiene periodo 3 y $f(x) = 2x$ para $0 \le x < 3$

2. f tiene periodo 2 y $f(x) = x^2$ para $0 \le x < 2$

3. f tiene periodo 4 y $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{para } 1 \le x < 4 \end{cases}$

4. f tiene periodo 6 y $f(x) = 1 - x$ para $0 \le x < 6$

5. f tiene periodo 4 y $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } 0 \le x < 2 \\ 2 & \text{para } 2 \le x < 4 \end{cases}$

6. f tiene periodo 5 y $f(x) = e^{-x}$ para $0 \le x < 5$

7. f tiene periodo 2 y $f(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 \le x < 1 \\ 2 - x & \text{para } 1 \le x < 2 \end{cases}$

8. Sea f la función periódica, parte de cuya gráfica se muestra en la figura 2.47. Encuentre la serie de Fourier compleja de f y trace algunos puntos de su espectro de amplitud.

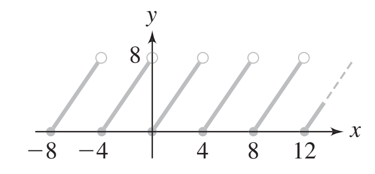


FIGURA 2.47

El siguiente problema involucra el *espectro de fase* de f, que es un trazo de los puntos $(\varphi_n, n\omega_0)$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Aquí $\varphi_n = \tan^{-1}(-b_n/a_n)$ es el n-ésimo ángulo fase de f.

9. Las gráficas de las figuras 2.48 y 2.49 definen dos funciones periódicas f y g, respectivamente. Calcule la serie de Fourier compleja de cada función. Determine una relación entre los espectros de amplitud de estas funciones y también entre sus espectros de fase.

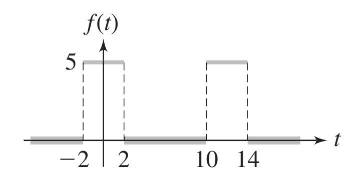


FIGURA 2.48

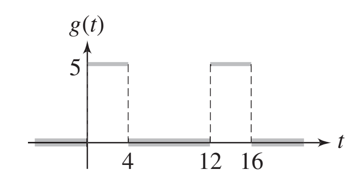


FIGURA 2.49

CAPÍTULO 3

La integral de Fourier y las transformadas de Fourier

3.1 La integral de Fourier

Si $f(x)$ está definida en un intervalo $[-L, L]$, puede representarla, al menos en la "mayoría" de los puntos en este intervalo por una serie de Fourier. Si f es periódica, entonces puede representarla por su serie de Fourier en intervalos a lo largo de toda la recta real.

Ahora suponga que $f(x)$ está definida para todo x pero no es periódica. Entonces, no es posible representar a $f(x)$ por una serie de Fourier sobre toda la recta. Sin embargo, sí puede escribir una representación en términos de senos y cosenos usando una integral en lugar de una sumatoria. Para ver cómo se hace esto, suponga que f es absolutamente integrable, lo que significa que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ converge y que f es suave a pedazos en todo intervalo $[-L, L]$. Escriba la serie de Fourier de f en un intervalo arbitrario $[-L, L]$, incluyendo las fórmulas integrales de los coeficientes:

$$\frac{1}{2}\int_{-L}^{L} f(\xi)\, d\xi + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right].$$

Quiere hacer que $L \to \infty$ para obtener una representación de $f(x)$ sobre toda la recta. Para ver a qué límite tiende esta serie de Fourier, si lo hay, sea

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}$$

y

$$\omega_n - \omega_{n-1} = \frac{\pi}{L} = \Delta\omega.$$

Entonces la serie de Fourier en $[-L, L]$ puede escribirse como

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-L}^{L} f(\xi)\,d\xi\right)\Delta\omega + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\cos(\omega_n\xi)\,d\xi\right)\cos(\omega_n x)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\operatorname{sen}(\omega_n\xi)\,d\xi\right)\operatorname{sen}(\omega_n x)\right]\Delta\omega. \tag{3.1}$$

Ahora $L \to \infty$, lo que implica que $\Delta\omega \to 0$. En la última expresión,

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-L}^{L} f(\xi)\,d\xi\right)\Delta\omega \to 0$$

debido a que, por hipótesis, $\int_{-L}^{L} f(\xi)d\xi$ converge. Los otros términos en la expresión (3.1) se parecen a una suma de Riemann para una integral definida, y asegura que cuando $L \to \infty$ y $\Delta\omega \to 0$, esta expresión tiende al límite

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\omega\xi)\,d\xi\right)\cos(\omega x)\right.$$
$$\left. + \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\operatorname{sen}(\omega\xi)\,d\xi\right)\operatorname{sen}(\omega x)\right]d\omega.$$

Esta es la *integral de Fourier* de f en la recta real. Bajo las hipótesis hechas acerca de f, esta integral converge a

$$\frac{1}{2}\left(f(x-) + f(x+)\right)$$

en cada x. En particular, si f es continua en x, entonces esta integral converge a $f(x)$.

Frecuentemente esta integral de Fourier se escribe

$$\int_{0}^{\infty}\left[A_\omega\cos(\omega x) + B_\omega\operatorname{sen}(\omega x)\right]d\omega, \tag{3.2}$$

en donde los coeficientes de la integral de Fourier de f son

$$A_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\omega\xi)\,d\xi$$

y

$$B_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\operatorname{sen}(\omega\xi)\,d\xi.$$

Esta representación en integral de Fourier de $f(x)$ es enteramente análoga a la serie de Fourier en un intervalo reemplazando con $\int_0^\infty \cdots d\omega$ a $\sum_{n=1}^{\infty}$ si se tienen coeficientes con fórmulas integrales. Estos coeficientes son funciones de ω, que es la variable de integración en la integral de Fourier (3.2).

EJEMPLO 3.1

Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{para } |x| > 1 \end{cases}$$

y

x

−1 1

FIGURA 3.1

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{para } |x| > 1 \end{cases}$$

La figura 3.1 es la gráfica de f. Por supuesto f es suave a pedazos y $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ converge. Los coeficientes de Fourier de f son

$$A_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \cos(\omega\xi)\,d\xi = \frac{2\,\text{sen}(\omega)}{\pi\omega}$$

y

$$B_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \text{sen}(\omega\xi)\,d\xi = 0.$$

La integral de Fourier de f es

$$\int_0^\infty \frac{2\,\text{sen}(\omega)}{\pi\omega}\cos(\omega x)\,d\omega.$$

Debido a que f es suave a pedazos, ésta converge a $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ para todo x. Más explícitamente,

$$\int_0^\infty \frac{2\,\text{sen}(\omega)}{\pi\omega}\cos(\omega x)\,d\omega = \begin{cases} 1 & \text{para } -1 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{para } x = \pm 1 \\ 0 & \text{para } |x| > 1 \end{cases}$$

Hay otra expresión para la integral de Fourier de una función que algunas veces resulta más conveniente. Escriba

$$\begin{aligned} \int_0^\infty [A_\omega \cos(\omega x) + B_\omega \,\text{sen}(\omega x)]\,d\omega &= \int_0^\infty \left[\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\omega\xi)\,d\xi\right)\cos(\omega x)\right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\text{sen}(\omega\xi)\,d\xi\right)\text{sen}(\omega x)\right]d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)[\cos(\omega\xi)\cos(\omega x) + \text{sen}(\omega\xi)\,\text{sen}(\omega x)]\,d\xi\,d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\omega(\xi - x))\,d\xi\,d\omega. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Por supuesto, esta integral tiene las mismas propiedades de convergencia que la expresión integral (3.2), ya que sólo es un rearreglo de esa integral.

SECCIÓN 3.1 PROBLEMAS

En cada problema del 1 al 10, desarrolle la función en una integral de Fourier y determine a qué converge esta integral.

1. $f(x) = \begin{cases} x & \text{para } -\pi \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{para } |x| > \pi \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} k & \text{para } -10 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{para } |x| > 10 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } -\pi \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{para } 0 < x \leq \pi \\ 0 & \text{para } |x| > \pi \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{para } -4 \leq x \leq 0 \\ \cos(x) & \text{para } 0 < x \leq 4 \\ 0 & \text{para } |x| > 4 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } -100 \leq x \leq 100 \\ 0 & \text{para } |x| > 100 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{para } -\pi \leq x \leq 2\pi \\ 0 & \text{para } x < -\pi \quad \text{y para } x > 2\pi \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{para } -3\pi \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{para } x < -3\pi \quad \text{y para } x > \pi \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{para } -5 \leq x < 1 \\ 1 & \text{para } 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{para } |x| > 5 \end{cases}$

9. $f(x) = e^{-|x|}$

10. $f(x) = xe^{-|4x|}$

11. Pruebe que la integral de Fourier de f puede escribirse como

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\operatorname{sen}(\omega(t-x))}{t-x}\, dt.$$

3.2 Integrales de Fourier en cosenos y senos

Si f es suave a pedazos en la semirecta $[0, \infty)$ y $\int_0^\infty |f(\xi)|\, d\xi$ converge, entonces puede escribir la integral de Fourier en cosenos o en senos para f que es completamente análoga a los desarrollos en senos y cosenos de una función en un intervalo $[0, L]$.

Para escribir una integral en cosenos, extienda f a una función par f_e definida en toda la recta real haciendo

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x) & \text{para } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

Esto refleja la gráfica para $x \geq 0$ en el eje vertical. Debido a que f_e es una función par, su integral de Fourier sólo tiene términos en cosenos. Como $f_e(x) = f(x)$ para $x \geq 0$, se puede definir esta integral en cosenos como la integral de Fourier en cosenos de f en $[0, \infty)$.

El coeficiente de f_e en su desarrollo integral de Fourier es

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_e(\xi) \cos(\omega\xi)\, d\xi$$

y esto es

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos(\omega\xi)\, d\xi.$$

Esto sugiere la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.1 Integral de Fourier en cosenos

Sea f definida en $[0, \infty)$ y $\int_0^\infty |f(\xi)|\, d\xi$ convergente. La integral de Fourier en cosenos de f es

$$\int_0^\infty A_\omega \cos(\omega x)\, d\omega,$$

en donde

$$A_\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\cos(\omega\xi)\, d\xi.$$

Al aplicar el teorema de convergencia del desarrollo integral de f_e, encuentre que si f es continua a pedazos en cada intervalo $[0, L]$, entonces su desarrollo integral en cosenos converge a $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ para cada $x > 0$ y a $f(0)$ para $x = 0$. En particular, en cualquier x positiva, en el cual f es continua, la integral en cosenos converge a $f(x)$.

Al extender f a una función impar f_o, de manera semejante a como lo hizo con las series, obtiene una integral de Fourier para f_o la cual sólo tiene términos en senos. Debido a que $f_o(x) = f(x)$ para $x \geq 0$, esto da una integral en senos para f en $[0, \infty)$.

DEFINICIÓN 3.2 Integral de Fourier en senos

Sea f definida en $[0, \infty)$ y $\int_0^\infty |f(\xi)|\, d\xi$ convergente. La integral de Fourier en senos de f es

$$\int_0^\infty A_\omega \operatorname{sen}(\omega x)\, d\omega,$$

en donde,

$$A_\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\operatorname{sen}(\omega\xi)\, d\xi.$$

Si f es suave a pedazos en todo intervalo $[0, L]$, entonces esta integral converge a $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ en $(0, \infty)$. Así como con la serie de Fourier en senos en un intervalo acotado, esta integral de Fourier en senos converge a 0 en $x = 0$.

EJEMPLO 3.2 Integrales de Laplace

Sea $f(x) = e^{-kx}$ para $x \geq 0$, con k una constante positiva. Entonces f es continuamente diferenciable en cualquier intervalo $[0, L]$, y

$$\int_0^\infty e^{-kx}\, dx = \frac{1}{k}.$$

Para la integral de Fourier en cosenos, calcule los coeficientes

$$A_\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-k\xi}\cos(\omega\xi)\, d\xi = \frac{2}{\pi}\frac{k}{k^2 + \omega^2}.$$

La representación de la integral de Fourier en cosenos de f converge a e^{-kx} para $x \geq 0$:

$$e^{-kx} = \frac{2k}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{k^2+\omega^2}\cos(\omega x)\,d\omega.$$

Para la integral en senos, calcule

$$B_\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-k\xi}\,\mathrm{sen}(k\xi)\,d\xi = \frac{2}{\pi}\frac{\omega}{k^2+\omega^2}.$$

La integral en senos converge a e^{-kx} para $x > 0$ y a 0 para $x = 0$:

$$e^{-kx} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega}{k^2+\omega^2}\,\mathrm{sen}(\omega x)\,d\omega \quad \text{para } x > 0.$$

A estas representaciones en integrales se les llama las *integrales de Laplace* ya que A_ω es $2/\pi$ veces la transformada de Laplace de sen(kx), mientras B_ω es $2/\pi$ veces la transformada de Laplace de cos(kx). ■

SECCIÓN 3.2 PROBLEMAS

En cada problema del 1 al 10, encuentre las representaciones en integral de Fourier en senos y en integral de Fourier en cosenos de la función. Determine a qué converge cada integral.

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{para } x > 10 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \mathrm{sen}(x) & \text{para } 0 \leq x \leq 2\pi \\ 0 & \text{para } x > 2\pi \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{para } 1 < x \leq 4 \\ 0 & \text{para } x > 4 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \cosh(x) & \text{para } 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{para } x > 5 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{para } 0 \leq x \leq \pi \\ 2 & \text{para } \pi < x \leq 3\pi \\ 0 & \text{para } x > 3\pi \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ x+1 & \text{para } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{para } x > 2 \end{cases}$

7. $f(x) = e^{-x}\cos(x) \quad \text{para } x \geq 0$

8. $f(x) = xe^{-3x} \quad \text{para } x \geq 0$

9. $f(x) = \begin{cases} k & \text{para } 0 \leq x \leq c \\ 0 & \text{para } x > c \end{cases}$

en donde k es constante y c es una constante positiva.

10. $f(x) = e^{-2x}\cos(x) \quad \text{para } x \geq 0$

11. Use las integrales de Laplace para calcular la integral de Fourier en cosenos de $f(x) = 1/(1 + x^2)$ y la integral de Fourier en senos de $g(x) = x/(1 + x^2)$.

3.3 La integral de Fourier compleja y la transformada de Fourier

Algunas veces es conveniente tener una forma compleja de la integral de Fourier. Esta situación compleja proveerá una plataforma natural a partir de la cual se desarrollará la transformada de Fourier.

Suponga que f es suave a pedazos en cada intervalo $[-L, L]$, y que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ converge. Entonces, en cualquier x,

$$\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\omega(\xi - x))\,d\xi\,d\omega,$$

por la expresión (3.3). Introduzca la forma exponencial compleja de la función coseno en esta expresión para escribir

$$\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-)) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi)\frac{1}{2}\left(e^{i\omega(\xi-x)}+e^{-i\omega(\xi-x)}\right)d\xi\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi)e^{i\omega(\xi-x)}\,d\xi\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi)e^{-i\omega(\xi-x)}\,d\xi\, d\omega.$$

En la primera integral de la última línea, reemplace $\omega = -w$ para obtener

$$\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-))$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^\infty f(\xi)e^{-iw(\xi-x)}\,d\xi\, dw + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi)e^{-i\omega(\xi-x)}\,d\xi\, d\omega.$$

Ahora escriba nuevamente la variable de integración en la última integral como ω y combine estas dos integrales para escribir

$$\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi)e^{-i\omega(\xi-x)}\,d\xi\, d\omega. \tag{3.4}$$

Esta es la *representación en integral de Fourier compleja de f* en la recta real. Si hace $C_\omega = \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-i\omega t}\,dt$, entonces esta integral es

$$\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty C_\omega e^{i\omega x}\,d\omega.$$

Llame C_ω al *coeficiente de la integral de Fourier compleja de f*.

EJEMPLO 3.3

Sea $f(x) = e^{-a|x|}$ para todo real x, con a una constante positiva. Calcule la representación en integral de Fourier compleja de f. Primero, tiene

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{para } x \geq 0 \\ e^{ax} & \text{para } x < 0 \end{cases}.$$

Más aún,

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 e^{ax}\,dx + \int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{2}{a}.$$

Ahora calcule

$$C_\omega = \int_{-\infty}^\infty e^{-a|t|}e^{-i\omega t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^0 e^{at}e^{-i\omega t}\,dt + \int_0^\infty e^{-at}e^{-i\omega t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^0 e^{(a-i\omega)t}\,dt + \int_0^\infty e^{-(a+i\omega)t}\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{a-i\omega}e^{(a-i\omega)t}\right]_{-\infty}^0 + \left[\frac{-1}{a+i\omega}e^{-(a+i\omega)t}\right]_0^\infty$$

$$= \left(\frac{1}{a+i\omega}+\frac{1}{a-i\omega}\right) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}.$$

La representación en integral de Fourier compleja de f es

$$e^{-a|x|} = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2+\omega^2} e^{i\omega x}\,d\omega. \blacksquare$$

La expresión de la derecha de la ecuación (3.4) conduce de forma natural a la transformada de Fourier. Para enfatizar cierto término, escriba la ecuación (3.4) como

$$\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\omega\xi}\,d\xi\right)e^{i\omega x}\,d\omega. \tag{3.5}$$

El término dentro del paréntesis es la *transformada de Fourier de f*.

DEFINICIÓN 3.3 Transformada de Fourier

Suponga que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ converge. Entonces la transformada de Fourier de f se define como la función

$$\mathfrak{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt.$$

Así la transformada de Fourier de f es el coeficiente C_ω en la representación en integral de Fourier compleja de f.

$\mathfrak{F}$ convierte una función f en una nueva función llamada $\mathfrak{F}[f]$. Debido a que la transformada se usa en el análisis de señales, se usa t (para denotar el tiempo) como la variable de f, y ω como la variable de la función transformada $\mathfrak{F}[f]$. El valor de la función $\mathfrak{F}[f]$ en ω es $\mathfrak{F}[f](\omega)$, y este número se calcula para una ω dada, evaluando la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$. Si quiere mantener la atención sobre la variable t, algunas veces escribirá $\mathfrak{F}[f]$ como $\mathfrak{F}[f(t)]$.

Los ingenieros se refieren a la variable ω en la función transformada como la *frecuencia* de la señal f. Más adelante se discute cómo se usan la transformada de Fourier y la versión truncada llamada la *transformada de Fourier ventaneada*, para determinar la información del contenido de la frecuencia de una señal.

Como puede ser incómodo usar el símbolo $\mathfrak{F}[f(t)]$ en los cálculos, algunas veces se escribe la transformada de Fourier de f como $\hat{f}$. En esta notación,

$$\mathfrak{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega).$$

EJEMPLO 3.4

Sea a una constante positiva. Entonces

$$\mathfrak{F}\left[e^{-a|t|}\right](\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}.$$

Esto se sigue inmediatamente del ejemplo 3.3, donde calculó el coeficiente integral de Fourier C_ω de $e^{-a|t|}$. Este coeficiente es la transformada de Fourier de f. $\blacksquare$

EJEMPLO 3.5

Sean a y k números positivos, y sea

$$f(t) = \begin{cases} k & \text{para } -a \le t < a \\ 0 & \text{para } t < -a \quad \text{y para } t \ge a \end{cases}$$

Esta función pulso puede escribirse en términos de la función de Heaviside como

$$f(t) = k[H(t+a) - H(t-a)],$$

y en la figura 3.2 aparece su gráfica. La transformada de Fourier de f es

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \\ &= \int_{-a}^{a} ke^{-i\omega t}\,dt = \left[\frac{-k}{i\omega}e^{-i\omega t}\right]_{-a}^{a} \\ &= -\frac{k}{i\omega}\left[e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}\right] = \frac{2k}{\omega}\operatorname{sen}(a\omega).\end{aligned}$$

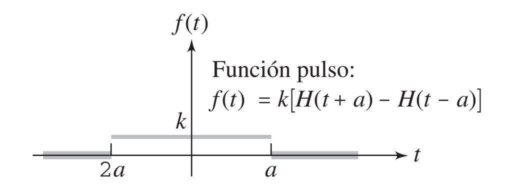


FIGURA 3.2

De nuevo también puede escribir

$$\mathfrak{F}[f](\omega) = \frac{2k}{\omega}\operatorname{sen}(a\omega),$$

o

$$\mathfrak{F}[f(t)](\omega) = \frac{2k}{\omega}\operatorname{sen}(a\omega). \blacksquare$$

Debido a la ecuación (3.5), la representación en integral de Fourier de f es

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega.$$

Si f es continua, y f' es continua a pedazos en todo el intervalo $[-L, L]$, entonces la integral de Fourier de f representa a f:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega. \tag{3.6}$$

Por tanto, puede usar la ecuación (3.6) como una transformada inversa de Fourier, recuperando a f a partir de $\hat{f}$. Esto es importante porque, en las aplicaciones, se usa la transformada de Fourier para cambiar un problema que involucra a f de una forma a otra supuestamente más fácil, que se resuelve para $\hat{f}(\omega)$. Debe tener alguna manera de recuperar la $f(t)$ que quiere, y la ecuación (3.6) es el vehículo que se usa frecuentemente. Escriba $\mathfrak{F}^{-1}[\hat{f}] = f$ si $\mathfrak{F}[f] = \hat{f}$.

Como es de esperarse de cualquier transformada integral, $\mathfrak{F}$ es lineal:

$$\mathfrak{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha\mathfrak{F}[f] + \beta\mathfrak{F}[g].$$

Se dice que la integral que define la transformada y la integral (3.6) que da su inversa, constituyen un *par de transformadas* para la transformada de Fourier. Bajo ciertas condiciones de f,

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \quad \text{y} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,dt.$$

EJEMPLO 3.6

Sea

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{para } -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{para } t > 1 \quad \text{y para } t < -1 \end{cases}$$

Entonces f es continua y absolutamente integrable y f' es continua a pedazos. Calcule

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} (1 - |t|)e^{-i\omega t}\,dt = \frac{2(1-\cos(\omega))}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Este es el coeficiente de Fourier C_ω en el desarrollo de Fourier complejo de $f(t)$.

Si quiere regresar, entonces por la ecuación (3.6),

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\cos(\omega))}{\omega^2}e^{i\omega t}\,d\omega. \end{aligned}$$

Puede verificar esto integrando explícitamente. Use un paquete de software para obtener

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\cos(\omega))}{\omega^2}e^{i\omega t}\,d\omega \\ &= \pi t \operatorname{signo}(t+1) + \pi \operatorname{signo}(t+1) + \pi t \operatorname{signo}(t-1) \\ &\quad -\pi \operatorname{signo}(t-1) - 2\operatorname{signo}(t), \end{aligned}$$

en donde

$$\operatorname{signo}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{para } \omega > 0 \\ 0 & \text{para } \omega = 0 \\ -1 & \text{para } \omega < 0 \end{cases}$$

Esta expresión es igual a $1 - |t|$ para $-1 \le t \le 1$ y 0 para $t > 1$ y para $t < -1$ verificando el resultado. ■

En el contexto de la transformada de Fourier, el *espectro de amplitud* frecuentemente se interpreta como la gráfica de $|\hat{f}(\omega)|$. Esto es en la misma forma en la que se usó este término en relación con la serie de Fourier.

EJEMPLO 3.7

Si $f(t) = H(t)e^{-at}$ entonces $\hat{f}(\omega) = 1/(a + i\omega)$, de donde

$$\left|\hat{f}(\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}.$$

La figura 3.3 muestra la gráfica de $|\hat{f}(\omega)|$. Esta gráfica es el espectro de amplitud de f. ■

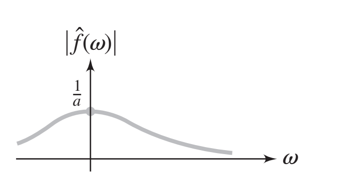


FIGURA 3.3 *Gráfica de* $|\hat{f}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$, *con* $f(t) = H(t)e^{-\alpha t}$.

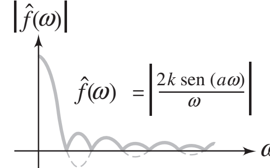


FIGURA 3.4

EJEMPLO 3.8

El espectro de amplitud de la función f del ejemplo 3.5 es la gráfica de

$$\left|\hat{f}(\omega)\right| = 2k\left|\frac{\operatorname{sen}(a\omega)}{\omega}\right|,$$

que se muestra en la figura 3.4. ■

Ahora algunas de las propiedades importantes y reglas computacionales para la transformada de Fourier. Para cada regla también se establece la versión para la transformada inversa. En lo que sigue, suponga que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ converge y para la versión de la inversa, que f es continua y f' continua a pedazos en cada $[-L, L]$.

TEOREMA 3.1 *Corrimiento del tiempo*

Si t_0 es un número real entonces

$$\mathfrak{F}[f(t - t_0)](\omega) = e^{-i\omega t_0}\hat{f}(\omega). \quad ■$$

Esto es, si corre el tiempo hacia atrás t_0 unidades y reemplaza $f(t)$ por $f(t - t_0)$, entonces la transformada de Fourier de esta función recorrida es la transformada de Fourier de f, multiplicada por el factor exponencial $e^{-i\omega t_0}$.

Prueba

$$\mathfrak{F}[f(t - t_0)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= e^{-i\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-i\omega(t-t_0)}\, dt.$$

Sea $u = t - t_0$ para escribir

$$\mathfrak{F}[f(t-t_0)](\omega) = e^{-i\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}\,du = e^{-i\omega t_0}\hat{f}(\omega).\ ■$$

EJEMPLO 3.9

Suponga que quiere la transformada de Fourier del pulso de amplitud 6 que se enciende en el tiempo 3 y se apaga en el tiempo 7. Esta es la función

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 3 \quad \text{y para } t \geq 7 \\ 6 & \text{para } 3 \leq t < 7 \end{cases},$$

que se muestra en la figura 3.5. Por supuesto, puede calcular $\hat{g}(\omega)$ integrando. Pero también observe que el punto medio del pulso (esto es, de la parte distinta de cero) ocurre cuando $t = 5$. Corra la gráfica 5 unidades a la izquierda para centrar el pulso en cero (figura 3.6). Si llama f a este pulso recorrido, entonces $f(t) = g(t+5)$. Corriendo f cinco unidades a la derecha regresa a g:

$$g(t) = f(t-5).$$

La clave de esto, es que por el ejemplo 3.5 ya conocía que la transformada de Fourier de f:

$$\mathfrak{F}[f(t)](\omega) = 12\frac{\operatorname{sen}(2\omega)}{\omega}.$$

Por el teorema del corrimiento del tiempo,

$$\mathfrak{F}[g(t)](\omega) = \mathfrak{F}[f(t-5)](\omega) = 12e^{-5i\omega}\frac{\operatorname{sen}(2\omega)}{\omega}.\ ■$$

La versión inversa del teorema del corrimiento del tiempo es

$$\mathfrak{F}^{-1}[e^{-i\omega t_0}F(\omega)](t) = f(t-t_0). \tag{3.7}$$

EJEMPLO 3.10

Suponga que quiere

$$\mathfrak{F}^{-1}\left[\frac{e^{2i\omega}}{5+i\omega}\right].$$

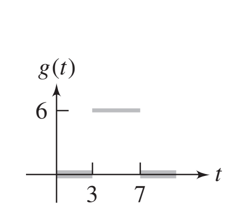


FIGURA 3.5

$$g(x) = \begin{cases} 6 & \text{para } 3 \leq t < 7 \\ 0 & \text{para } t < 3 \\ & \text{y para } t \geq 7 \end{cases}$$

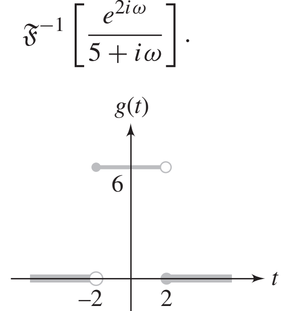


FIGURA 3.6 *La función de la figura 3.5 corre cinco unidades a la izquierda.*

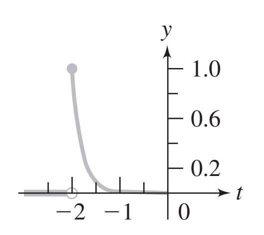


FIGURA 3.7 *Gráfica de* $H(t+2)e^{-5(t+2)}$.

La presencia del factor exponencial sugiere la versión inversa del teorema del corrimiento del tiempo. En la ecuación (3.7), ponga $t_0 = -2$ para escribir

$$\mathfrak{F}^{-1}\left[\frac{e^{2i\omega}}{5+i\omega}\right] = f(t-(-2)) = f(t+2),$$

donde

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}\left[\frac{1}{5+i\omega}\right] = H(t)e^{-5t}.$$

Por tanto,

$$\mathfrak{F}^{-1}\left[\frac{e^{2i\omega}}{5+i\omega}\right] = f(t+2) = H(t+2)e^{-5(t+2)}.$$

En la figura 3.7 se muestra la gráfica de la función. ■

El siguiente resultado recuerda al teorema del primer corrimiento para la transformada de Laplace.

TEOREMA 3.2 *Corrimiento de frecuencia*

Si ω_0 es cualquier número real, entonces

$$\mathfrak{F}[e^{i\omega t} f(t)] = \hat{f}(\omega - \omega_0). \blacksquare$$

Prueba

$$\mathfrak{F}[e^{i\omega t} f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t} f(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(\omega-\omega_0)t}\, dt = \hat{f}(\omega - \omega_0). \blacksquare$$

La versión inversa del teorema del corrimiento de frecuencia es

$$\mathfrak{F}^{-1}[\hat{f}(\omega - \omega_0)(t) = e^{i\omega_0 t} f(t).$$

TEOREMA 3.3 *Escala*

Si a es un número real distinto de cero, entonces

$$\mathfrak{F}[f(at)](\omega)] = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right). \blacksquare$$

Esto se puede probar calculando directamente a partir de la definición. La versión para la transformada inversa de este resultado es

$$\mathfrak{F}^{-1}\left[\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)\right](t) = |a|\, f(at).$$

Esta conclusión se conoce como el *teorema de escala* debido a que no queremos la transformada de $f(t)$, si no de $f(at)$, en donde a puede pensarse como un factor de escala. El teorema dice que podemos calcular la transformada de la función escalada reemplazando ω por ω/a en la transformada de la función original, y dividiendo entre la magnitud del factor de escala.

EJEMPLO 3.11

Sabe del ejemplo 3.6 que si

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{para } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{para } t > 1 \quad \text{y para } t < -1 \end{cases}$$

entonces

$$\hat{f}(\omega) = 2\frac{1 - \cos(\omega)}{\omega^2}.$$

Sea

$$g(t) = f(7t) = \begin{cases} 1 - |7t| & \text{para } -\frac{1}{7} \leq t \leq \frac{1}{7} \\ 0 & \text{para } t > \frac{1}{7} \quad \text{y para } t < \frac{-1}{7} \end{cases}$$

Entonces

$$\hat{g}(\omega) = \mathfrak{F}[f(7t)](\omega) = \frac{1}{7}\hat{f}\left(\frac{\omega}{7}\right)$$

$$= \frac{2}{7}\frac{1 - \cos(\omega/7)}{(\omega/7)^2} = 14\frac{1 - \cos(\omega/7)}{\omega^2}. \blacksquare$$

TEOREMA 3.4 *Inversión del tiempo*

$$\mathfrak{F}[f(-t)](\omega) = \hat{f}(-\omega). \blacksquare$$

Este resultado es llamado inversión del tiempo porque reemplaza t por $-t$ en $f(t)$ para obtener $f(-t)$. La transformada de esta nueva función se obtiene simplemente reemplazando ω por $-\omega$ en la transformada de $f(t)$. Esta conclusión se sigue inmediatamente del teorema de escala, poniendo $a = -1$. La versión inversa de la inversión del tiempo es

$$\mathfrak{F}^{-1}[\hat{f}(-\omega)](t) = f(-t).$$

TEOREMA 3.5 *Simetría*

$$\mathfrak{F}[\hat{f}(t)](\omega) = 2\pi f(-\omega). \blacksquare$$

Para entender esta conclusión empiece con $f(t)$ y tome su transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$. Reemplace ω por t y tome la transformada de la función $\hat{f}(t)$. La propiedad de simetría de la transformada de Fourier establece que la transformada de $\hat{f}(t)$ es sólo la función original $f(t)$ con $-\omega$ en lugar de t, y después esta nueva función multiplicada por 2π.

EJEMPLO 3.12

Sea

$$f(t) = \begin{cases} 4 - t^2 & \text{para } -2 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{para } t > 2 \quad \text{y para } t < -2 \end{cases}$$

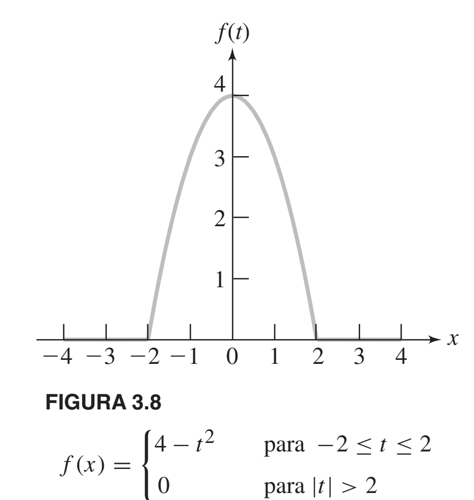


FIGURA 3.8

$$f(x) = \begin{cases} 4 - t^2 & \text{para } -2 \le t \le 2 \\ 0 & \text{para } |t| > 2 \end{cases}$$

En la figura 3.8 se muestra la gráfica de f. La transformada de Fourier de f es

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, d\omega = \int_{-2}^{2} (4 - t^2)e^{-i\omega t}\, dt \\ &= 4\frac{\operatorname{sen}(2\omega) - 2\omega\cos(2\omega)}{\omega^3}.\end{aligned}$$

En este ejemplo, $f(-t) = f(t)$, así que intercambiando $-\omega$ por ω no habrá ninguna diferencia en $\hat{f}(\omega)$, y puede ver que éste es el caso. ■

TEOREMA 3.6 *Modulación*

Si ω_0 es un número real, entonces

$$\mathfrak{F}[f(t)\cos(\omega_0 t)](\omega) = \frac{1}{2}\left[\hat{f}(\omega + \omega_0) + \hat{f}(\omega - \omega_0)\right]$$

y

$$\mathfrak{F}[f(t)\operatorname{sen}(\omega_0 t)](\omega) = \frac{1}{2}i\left[\hat{f}(\omega + \omega_0) - \hat{f}(\omega - \omega_0)\right]. \quad ■$$

Prueba Ponga $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$ y use la linealidad de $\mathfrak{F}$ y el teorema del corrimiento de frecuencia para obtener

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[f(t)\cos(\omega_0 t)](\omega) &= \mathfrak{F}\left[\frac{1}{2}e^{i\omega_0 t}f(t) + \frac{1}{2}e^{-i\omega_0 t}f(t)\right](\omega) \\ &= \frac{1}{2}\mathfrak{F}[e^{i\omega_0 t}f(t)](\omega) + \frac{1}{2}\mathfrak{F}[e^{-i\omega_0 t}f(t)](\omega) \\ &= \frac{1}{2}\hat{f}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\hat{f}(\omega + \omega_0).\end{aligned}$$

De manera semejante se obtiene la segunda conclusión, usando $\operatorname{sen}(\omega_0 t) = (1/2i)(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t})$. ■

SECCIÓN 3.3 PROBLEMAS

En cada problema del 1 al 8, encuentre la integral de Fourier compleja de la función y determine a qué converge esta integral.

1. $f(x) = xe^{-|x|}$

2. $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{para } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{para } |x| > 1 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi x) & \text{para } -5 \le x \le 5 \\ 0 & \text{para } |x| > 5 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{para } -2 \le x \le 2 \\ 0 & \text{para } |x| > 2 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} x & \text{para } -1 \le x \le 1 \\ e^{-|x|} & \text{para } |x| > 1 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \le x \le k \\ -1 & \text{para } -k \le x < 0 \\ 0 & \text{para } |x| > k, \end{cases}$

   en donde k es una constante positiva.

7. $f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{para } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen}(x) & \text{para } -\dfrac{\pi}{2} \le x < 0 \\ 0 & \text{para } |x| > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

8. $f(x) = x^2 e^{-3|x|}$

En cada problema del 9 al 18, encuentre la transformada de Fourier de la función y dibuje el espectro de amplitud. Siempre que aparezca k es una constante positiva. Para algunos de los problemas se usarán uno o más de los teoremas de esta sección junto con las siguientes transformadas, que puede aceptar:

$$\mathfrak{F}[e^{-a|t|}](\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}, \quad \mathfrak{F}[e^{-at^2}](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\omega^2/4a},$$

y

$$\mathfrak{F}\left[\frac{1}{a^2+t^2}\right](\omega) = \frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}.$$

9. $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \le t \le 1 \\ -1 & \text{para } -1 \le t < 0 \\ 0 & \text{para } |t| > 1 \end{cases}$

10. $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(t) & \text{para } -k \le t \le k \\ 0 & \text{para } |t| > k, \end{cases}$

11. $f(t) = 5[H(t-3) - H(t-11)]$

12. $f(t) = 5e^{-3(t-5)2}$

13. $f(t) = H(t-k)e^{-t/4}$

14. $f(t) = H(t-k)t^2$

15. $f(t) = 1/(1+t^2)$

16. $f(t) = 3H(t-2)e^{-3t}$

17. $f(t) = 3e^{-4|t+2|}$

18. $f(t) = H(t-3)e^{-2t}$

En cada problema del 19 al 24, encuentre la transformada inversa de Fourier de la función.

19. $9e^{-(\omega+4)^2/32}$

20. $\dfrac{e^{(20-4\omega)i}}{3-(5-\omega)i}$

21. $\dfrac{e^{(2\omega-6)i}}{5-(3-\omega)i}$

22. $\dfrac{10\operatorname{sen}(3\omega)}{\omega+\pi}$

23. $\dfrac{1+i\omega}{6-\omega^2+5i\omega}$

    Sugerencia: Factorice el denominador y use fracciones parciales.

24. $\dfrac{10(4+i\omega)}{9-\omega^2+8i\omega}$

3.4 Propiedades adicionales y aplicaciones de la transformada de Fourier

3.4.1 La transformada de Fourier de una derivada

Para usar la transformada de Fourier en la solución de ecuaciones diferenciales, es necesaria una expresión que nos relacione la transformada de f' con la de f. El siguiente teorema proporciona dicha relación para derivadas de cualquier orden y se llama la *regla operacional* para la transformada de Fourier. Algo similar surge para cualquier transformada integral cuando se piensa usar en conexión con ecuaciones diferenciales.

Recuerde que la k-ésima derivada de f se denota como $f^{(k)}$. Como una conveniencia use $k = 0$ en este símbolo, bajo el entendido que $f^{(0)} = f$.

TEOREMA 3.7 *Diferenciación respecto a la variable tiempo*

Sea n un entero positivo. Suponga que $f^{(n-1)}$ es continua y $f^{(n)}$ es continua a pedazos en cada intervalo $[-L, L]$. Considere que $\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(n-1)}(t)\, dt$ converge. Asuma

$$\lim_{t\to\infty} f^{(k)}(t) = \lim_{t\to-\infty} f^{(k)}(t) = 0$$

para $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Entonces

$$\mathfrak{F}[f^{(n)}(t)](\omega) = (i\omega)^n \hat{f}(\omega). \quad ■$$

Prueba Empiece con la primera derivada. Integrando por partes, tiene

$$\mathfrak{F}[f'](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \left[f(t)e^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-i\omega)e^{-i\omega t}\, dt.$$

Ahora $e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i \operatorname{sen}(\omega t)$ tiene magnitud 1, y por hipótesis,

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to-\infty} f(t) = 0.$$

Por tanto,

$$\mathfrak{F}[f^{(n)}(t)](\omega) = i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, dt = i\omega \hat{f}(\omega).$$

La conclusión para derivadas de orden superior se obtiene por inducción sobre n y el hecho de que

$$f'(t) = \frac{d}{dt} f^{(n-1)}(t). \quad ■$$

La hipótesis de que f sea continua en la regla operacional puede relajarse para permitir un número finito de saltos de discontinuidad, si añade términos apropiados en la conclusión. Enseguida se enuncia este resultado para la transformada de f'.

TEOREMA 3.8

Suponga que f es continua en la recta real, excepto para las discontinuidades de salto en $t_1, \ldots, t_M$. Sea f' continua a pedazos en todo $[-L, L]$. Asuma que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ converge, y que

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to-\infty} f(t) = 0.$$

Entonces

$$\mathfrak{F}[f'](\omega) = i\omega\hat{f}(\omega) - \sum_{j=1}^{M} [f(t_j+) - f(t_j-)]e^{-it_j\omega}. \quad ■$$

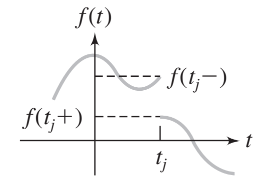


FIGURA 3.9 *La función f tiene una discontinuidad de salto en t_j.*

Cada término $f(t_j+) - f(t_j-)$ es la diferencia entre los límites laterales de $f(t)$ en la discontinuidad de salto t_j. En la figura 3.9 se muestra el tamaño del salto entre los límites de la gráfica y este punto.

Prueba Primero suponga que f tiene una sola discontinuidad de salto en t_1. En el caso de más discontinuidades, el argumento sigue la misma línea pero incluye más cálculos de los que aparecen enseguida.

Integrando por partes:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}[f'](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{t_1} f'(t)e^{-i\omega t}\,dt + \int_{t_1}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \left[f(t)e^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{t_1} - \int_{-\infty}^{t_1} f(t)(-i\omega)e^{-i\omega t}\,dt \\
&\quad + \left[f(t)e^{-i\omega t}\right]_{t_1}^{\infty} - (-i\omega)\int_{t_1}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \\
&= f(t_1-)e^{-it_1\omega} - f(t_1+)e^{-it_1\omega} + i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \\
&= i\omega\hat{f}(\omega) - [f(t_1+) - f(t_1-)]e^{-it_1\omega}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Aquí hay un ejemplo del uso de la regla operacional en la resolución de una ecuación diferencial.

EJEMPLO 3.13

Resolver

$$y' - 4y = H(t)e^{-4t},$$

en donde H es la función de Heaviside. Así, la ecuación diferencial es

$$y' - 4y = \begin{cases} e^{-4t} & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

Aplique la transformada de Fourier a la ecuación diferencial para obtener

$$\mathfrak{F}[y'](\omega) - 4\hat{y}(\omega) = \mathfrak{F}[H(t)e^{-4t}](\omega).$$

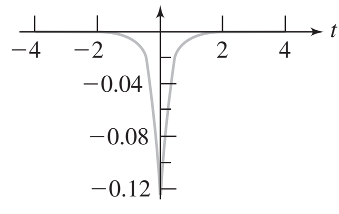


FIGURA 3.10
$y(t) = -\frac{1}{8}e^{-4|t|}$.

Use el teorema 3.7 y que $F[H(t)e^{-4t}](\omega) = \frac{1}{4+i\omega}$ para escribir esta ecuación como

$$i\omega\hat{y}(\omega) - 4\hat{y}(\omega) = \frac{1}{4+i\omega}.$$

Resuelva para $\hat{y}(\omega)$ para obtener

$$\hat{y}(\omega) = \frac{-1}{16+\omega^2}.$$

La solución es

$$y(t) = \mathfrak{F}^{-1}\left[\frac{-1}{16+\omega^2}\right](t) = -\frac{1}{8}e^{-4|t|},$$

cuya gráfica aparece en la figura 3.10.

La transformada inversa que acaba de obtener puede deducirse de varias maneras. Puede usar una tabla de transformadas de Fourier o un paquete de software que contenga esta transformada. También se sigue del ejemplo 3.4 que

$$\mathfrak{F}\left[e^{-a|t|}\right](\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

y elija $a = 4$. ■

En esta solución no hay constante arbitraria debido a que la transformada de Fourier regresó la única solución que es continua y acotada para todo t real. El acotamiento se supuso cuando usamos la transformada debido al requerimiento de convergencia de $\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|\, dt$.

3.4.2 Diferenciación respecto a la variable de frecuencia

La variable ω usada para la transformada de Fourier es la frecuencia de $f(t)$, ya que aparece en la exponencial compleja $e^{i\omega t}$, que es $\cos(\omega t)+i\ \mathrm{sen}(\omega t)$. En este contexto, la diferenciación de $\hat{f}(\omega)$ respecto a ω es llamada *diferenciación respecto a la variable de frecuencia*. Ahora se relacionan las derivadas de $\hat{f}(\omega)$ y $f(t)$.

TEOREMA 3.9 *Diferenciación respecto a la variable de frecuencia*

Sea n un entero positivo. Sea f continua a pedazos en $[-L, L]$ para todo número positivo L, y suponga que $\int_{-\infty}^{\infty} |t^n f(t)|\, dt$ converge. Entonces

$$\mathfrak{F}[t^n f(t)](\omega) = i^n \frac{d^n}{d\omega^n}\hat{f}(\omega). \quad ■$$

En particular, bajo las condiciones del teorema,

$$\mathfrak{F}[tf(t)](\omega) = i\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) \quad \text{y} \quad \mathfrak{F}[t^2 f(t)](\omega) = -\frac{d^2}{d\omega^2}\hat{f}(\omega).$$

Prueba Pruebe el teorema para $n = 1$. El argumento para n mayor es similar. Aplique la regla de Leibniz para la diferenciación bajo la integral para escribir

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) &= \frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\omega}\left[f(t)e^{-i\omega t}\right]dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-it)e^{-i\omega t}\,dt = -i\int_{-\infty}^{\infty}[tf(t)]e^{-i\omega t}\,dt \\ &= -i\mathfrak{F}[tf(t)](\omega). \ \blacksquare\end{aligned}$$

EJEMPLO 3.14

Suponga que quiere calcular $\mathfrak{F}[t^2e^{-5|t|}]$. Del ejemplo 3.4 recuerde que

$$\mathfrak{F}[e^{-5|t|}](\omega) = \frac{10}{25+\omega^2}.$$

Por el teorema de diferenciación respecto a la variable de frecuencia,

$$\mathfrak{F}[t^2e^{-5|t|}](\omega) = i^2\frac{d^2}{d\omega^2}\left[\frac{10}{25+\omega^2}\right] = 20\frac{25-3\omega^2}{(25+\omega^2)^3}. \ \blacksquare$$

3.4.3 La transformada de Fourier de una integral

Lo siguiente permite aplicar la transformada a una función definida mediante una integral.

TEOREMA 3.10

Sea f continua a pedazos en todo intervalo $[-L, L]$. Suponga que $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt$ converge. Admita que $\hat{f}(0) = 0$. Entonces

$$\mathfrak{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau\right](\omega) = \frac{1}{i\omega}\hat{f}(\omega). \ \blacksquare$$

Prueba Sea $g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$. Entonces $g'(t) = f(t)$ para cualquier t en donde f es continua, y $g(t) \to 0$ conforme $t \to -\infty$. Más aún,

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,d\tau = \hat{f}(0) = 0.$$

Por tanto, aplique el teorema 3.7 a g para obtener

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \mathfrak{F}[f(t)](\omega) = \mathfrak{F}[g'(t)](\omega) \\ &= i\omega\mathfrak{F}[g(t)](\omega) = i\omega\mathfrak{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau\right](\omega).\end{aligned}$$

Esto es equivalente a la conclusión a probar. $\blacksquare$

3.4.4 Convolución

Hay muchas transformadas definidas por integrales y es común tener una operación de convolución para tal transformación. Enseguida se analiza la convolución para la transformada de Fourier.

DEFINICIÓN 3.4 Convolución

Sean f y g funciones definidas en la recta real. Entonces f tiene una convolución con g si

1. $\int_a^b f(t)dt$ y $\int_a^b g(t)\,dt$ existen para todo intervalo $[a, b]$.
2. Para todo número t real,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t-\tau)g(\tau)|\,d\tau$$

converge. En este caso, la convolución $f * g$ de f con g es la función dada por

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau.$$

En esta definición, se escribió $(f * g)(t)$ para enfatizar. Sin embargo, la convolución es una función denotada como $f * g$, de manera que puede escribir $f * g(t)$ para indicar $f * g$ evaluada en t.

TEOREMA 3.11

Suponga que f tiene una convolución con g. Entonces,

1. *Conmutatividad de la convolución*. g tiene una convolución con f, y $f * g = g * f$.
2. *Linealidad*. Si f y g tienen convoluciones con h, y α y β son números reales, entonces $\alpha f + \beta g$ también tiene una convolución con h, y

$$(\alpha f + \beta g) * h = \alpha(f * h) + \beta(g * h).$$

Prueba Para (1), sea $z = t - \tau$ y se escribe

$$\begin{aligned} f * g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \\ &= \int_{\infty}^{-\infty} f(z)g(t-z)(-1)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-z)f(z)\,dz = g * f(t). \end{aligned}$$

La conclusión (2) se sigue de las propiedades elementales de las integrales, debido a que las integrales involucradas convergen. ■

Ahora está listo para los resultados principales en convolución.

TEOREMA 3.12

Suponga que f y g son acotadas y continuas en la recta real y que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$ y $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\,dt$ convergen. Entonces,

1.
$$\int_{-\infty}^{\infty} f * g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt.$$

2. *Convolución en el tiempo*
$$\widehat{f * g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).$$

3. *Convolución en la frecuencia*
$$\widehat{f(t)g(t)}(\omega) = \frac{1}{2\pi}(\hat{f} * \hat{g})(\omega). \quad ■$$

La primera conclusión es que la integral, sobre la recta real, de la convolución de f con g, es igual al producto de las integrales de f y de g sobre la recta.

La convolución en el tiempo establece que la transformada de Fourier de una convolución es el producto de las transformadas de las funciones. Se puede expresar esta fórmula como

$$\mathfrak{F}[f * g](\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).$$

Esto es, la transformada de Fourier de la convolución en el tiempo de f con g, es igual al producto de la transformada de f por la transformada de g. Esto tiene la versión inversa importante

$$\mathfrak{F}^{-1}\left[\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)\right](t) = f * g(t).$$

La transformada inversa de Fourier del producto de dos funciones transformadas es igual a la convolución de estas funciones. Algunas veces esto es útil para evaluar una transformada inversa de Fourier. Si quiere $\mathfrak{F}^{-1}[h(\omega)]$ y puede factorizar $h(\omega)$ en $\hat{f}(\omega)\ \hat{g}(\omega)$, un producto de transformadas de dos funciones conocidas, entonces la transformada inversa de h es la convolución de estas funciones conocidas.

Se puede expresar la convolución en la frecuencia como

$$\mathfrak{F}[f(t)g(t)](\omega) = \frac{1}{2\pi}(\hat{f} * \hat{g})(\omega).$$

La transformada de Fourier del producto de dos funciones es igual a $(\frac{1}{2\pi})$ veces la convolución de la transformada de estas funciones.

La versión inversa de la convolución en la frecuencia es

$$\mathfrak{F}^{-1}[\hat{f}(\omega) * \hat{g}(\omega)](t) = 2\pi f(t)g(t).$$

Prueba Para (1), escriba

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f * g(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\right)dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,dt\right)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\,dt\right)g(\tau)\,d\tau,\end{aligned}$$

suponiendo que es válido el intercambio en el orden de integración. Ahora

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$$

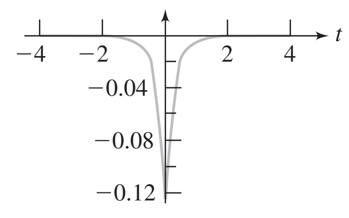


FIGURA 3.10
$y(t) = -\frac{1}{8}e^{-4|t|}$.

Use el teorema 3.7 y que $F[H(t)e^{-4t}](\omega) = \frac{1}{4 + i\omega}$ para escribir esta ecuación como

$$i\omega\hat{y}(\omega) - 4\hat{y}(\omega) = \frac{1}{4 + i\omega}.$$

Resuelva para $\hat{y}(\omega)$ para obtener

$$\hat{y}(\omega) = \frac{-1}{16 + \omega^2}.$$

La solución es

$$y(t) = \mathfrak{F}^{-1}\left[\frac{-1}{16 + \omega^2}\right](t) = -\frac{1}{8}e^{-4|t|},$$

cuya gráfica aparece en la figura 3.10.

La transformada inversa que acaba de obtener puede deducirse de varias maneras. Puede usar una tabla de transformadas de Fourier o un paquete de software que contenga esta transformada. También se sigue del ejemplo 3.4 que

$$\mathfrak{F}\left[e^{-a|t|}\right](\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

y elija $a = 4$. ■

En esta solución no hay constante arbitraria debido a que la transformada de Fourier regresó la única solución que es continua y acotada para todo t real. El acotamiento se supuso cuando usamos la transformada debido al requerimiento de convergencia de $\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|\, dt$.

3.4.2 Diferenciación respecto a la variable de frecuencia

La variable ω usada para la transformada de Fourier es la frecuencia de $f(t)$, ya que aparece en la exponencial compleja $e^{i\omega t}$, que es $\cos(\omega t) + i\ \text{sen}(\omega t)$. En este contexto, la diferenciación de $\hat{f}(\omega)$ respecto a ω es llamada *diferenciación respecto a la variable de frecuencia*. Ahora se relacionan las derivadas de $\hat{f}(\omega)$ y $f(t)$.

TEOREMA 3.9 *Diferenciación respecto a la variable de frecuencia*

Sea n un entero positivo. Sea f continua a pedazos en $[-L, L]$ para todo número positivo L, y suponga que $\int_{-\infty}^{\infty} |t^n f(t)|\, dt$ converge. Entonces

$$\mathfrak{F}[t^n f(t)](\omega) = i^n \frac{d^n}{d\omega^n} \hat{f}(\omega).$$ ■

Debe tener cuidado al evaluar esta integral debido al valor absoluto en los exponentes. Primero, si $t > 0$, entonces

$$\begin{aligned}24[f * g(t)] &= \int_{-\infty}^{0} e^{-2|t-\tau|}e^{-3|\tau|}\,d\tau + \int_{0}^{t} e^{-2|t-\tau|}e^{-3|\tau|}\,d\tau + \int_{t}^{\infty} e^{-2|t-\tau|}e^{-3|\tau|}\,d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{-2(t-\tau)}e^{3\tau}\,d\tau + \int_{0}^{t} e^{-2(t-\tau)}e^{-3\tau}\,d\tau + \int_{t}^{\infty} e^{-2(\tau-t)}e^{-3\tau}\,d\tau \\ &= \frac{6}{5}e^{-2t} - \frac{4}{5}e^{-3t}.\end{aligned}$$

Si $t < 0$, entonces

$$\begin{aligned}24[f * g(t)] &= \int_{-\infty}^{t} e^{-2|t-\tau|}e^{-3|\tau|}\,d\tau + \int_{t}^{0} e^{-2|t-\tau|}e^{-3|\tau|}\,d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-2|t-\tau|}e^{-3|\tau|}\,d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)}e^{3\tau}\,d\tau + \int_{t}^{0} e^{2(t-\tau)}e^{3\tau}\,d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{2(t-\tau)}e^{-3\tau}\,d\tau \\ &= -\frac{4}{5}e^{3t} + \frac{6}{5}e^{2t}.\end{aligned}$$

Finalmente, calcule

$$24[f * g](0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|\tau|}e^{-3|\tau|}\,d\tau = \frac{2}{5}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}^{-1}\left[\frac{1}{(4+\omega^2)(9+\omega^2)}\right](t) &= \frac{1}{24}\left(\frac{6}{5}e^{-2|t|} - \frac{4}{5}e^{-3|t|}\right) \\ &= \frac{1}{20}e^{-2|t|} - \frac{1}{30}e^{-3|t|}. \quad ■\end{aligned}$$

3.4.5 Filtrado y la función delta de Dirac

La función delta de Dirac es un pulso de magnitud infinita que tiene duración infinitamente corta. Una manera de describir matemáticamente tal objeto es formar un pulso corto

$$\frac{1}{2a}[H(t+a) - H(t-a)],$$

como se muestra en la figura 3.11, y tomar el límite conforme el ancho del pulso tiende a cero:

$$\delta(t) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{2a}[H(t+a) - H(t-a)].$$

En el sentido estándar, ésta no es una función, sino que es un objeto llamado distribución. Las distribuciones son generalizaciones del concepto de función. Por esta razón, muchos teoremas no pueden aplicarse a $\delta(t)$.

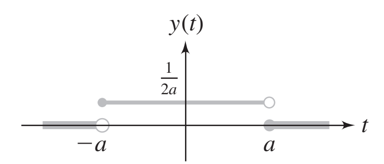


FIGURA 3.11
$y = \frac{1}{2a}[H(t+a) - H(t-a)]$.

Sin embargo, hay algunas manipulaciones formales que producen resultados útiles. Primero, si calcula la transformada de Fourier del pulso, obtiene

$$\mathfrak{F}[H(t+a) - H(t-a)] = \int_{-a}^{a} e^{-i\omega t}\,dt = -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t}\Big]_{-a}^{a}$$

$$= \frac{1}{i\omega}\left(e^{ia\omega} - e^{-ia\omega}\right) = 2\frac{\operatorname{sen}(a\omega)}{\omega}.$$

Intercambiando el límite con la transformada, resulta

$$\mathfrak{F}[\delta(t)](\omega) = \mathfrak{F}\left[\lim_{a\to 0}\frac{1}{2a}[H(t+a) - H(t-a)]\right](\omega)$$

$$= \lim_{a\to 0}\frac{1}{2a}\mathfrak{F}[H(t+a) - H(t-a)](\omega)$$

$$= \lim_{a\to 0}\frac{\operatorname{sen}(a\omega)}{a\omega} = 1.$$

Esto lo lleva a considerar que la transformada de Fourier de la función delta es la función que es idénticamente 1.

Más aún, poniendo $\delta(t)$ formalmente en una convolución, resulta

$$\mathfrak{F}[\delta * f] = \mathfrak{F}[\delta]\mathfrak{F}[f] = \mathfrak{F}[f]$$

y

$$\mathfrak{F}[f * \delta] = \mathfrak{F}[f]\mathfrak{F}[\delta] = \mathfrak{F}[f],$$

lo que siguiere que

$$\delta * f = f * \delta = f.$$

La función delta se comporta como la identidad bajo la convolución.

La siguiente propiedad de filtrado permite recuperar el valor de una función "sumando" sus valores cuando le pega con una función delta trasladada.

TEOREMA 3.13 *Filtrado*

Si f tiene una transformada de Fourier y es continua en t_0, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0). \quad \blacksquare$$

Este resultado puede ser modificado para permitir un salto de discontinuidad de f en t_0. En este caso tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,dt = \frac{1}{2}(f(t_0+) + f(t_0-)).$$

3.4.6 La transformada de Fourier ventaneada

Suponga que f es una señal. Esto significa que f es una función definida sobre la recta real y tiene energía finita $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt$.

Al analizar $f(t)$, algunas veces querrá localizar su contenido de frecuencia respecto a la variable tiempo. Ya se ha mencionado que $\hat{f}(\omega)$ contiene información acerca de las frecuencias de la señal. Sin embargo, $\hat{f}(\omega)$ no particulariza la información para intervalos de tiempo específicos, ya que

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

y esta integración es sobre todo tiempo. Así, la imagen obtenida no contiene información sobre tiempos específicos, sino que sólo permite calcular el espectro de amplitud total $|\hat{f}(\omega)|$. Si piensa en $f(t)$ como una pieza de música tocada en cierto tiempo, tendrá que esperar hasta que toda la pieza sea interpretada antes de calcular este espectro de amplitud. Sin embargo, puede obtener una imagen del contenido de frecuencia de $f(t)$ dentro de intervalos de tiempo dados ventaneando la función antes de aplicar la transformada de Fourier.

Para hacer esto, primero necesita una *función ventana* g, que es una función que toma valores distintos de cero sólo en algún intervalo cerrado, usualmente en $[0, T]$ o en $[-T, T]$. Las figuras 3.12 y 3.13 muestran gráficas típicas de tales funciones, una en $[0, T]$ y la otra en $[-T, T]$. El intervalo se llama el *soporte* de g, y en este caso en el que estamos trabajando con intervalos cerrados, decimos que g tiene *soporte compacto*. La función g vale cero fuera de este intervalo soporte. Ventaneamos una función f con g haciendo el producto $g(t)f(t)$, el cual vale cero fuera de $[-T, T]$.

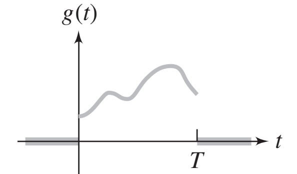


FIGURA 3.12 *Función ventana típica con soporte compacto* $[0, T]$.

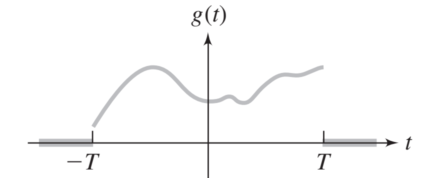


FIGURA 3.13 *Función ventana típica con soporte compacto* $[-T, T]$.

EJEMPLO 3.16

Considere la función ventana

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } -4 \le t \le 4 \\ 0 & \text{para } |t| > 4 \end{cases},$$

con soporte compacto $[-4, 4]$. En la figura 3.14(a) aparece la gráfica de esta función, incluyendo los segmentos verticales en $t = \pm 4$ para resaltar este intervalo. En la figura 3.14(b) se muestra $f(t) = t\,\text{sen}(t)$. Para ventanear f con g, forme el producto $g(t)f(t)$, que se muestra en la figura 3.14(c). Esta función ventaneada vale cero fuera del soporte de g. Para esta elección de g, la ventana tiene el efecto de prender la señal $f(t)$ en el tiempo -4 y apagarla en $t = 4$. ■

La *transformada de Fourier ventaneada* (respecto a la elección de g) es

$$\mathfrak{F}_{ven}[f](\omega) = \widehat{f_{ven}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

$$= \int_{-T}^{T} f(t)g(t)e^{-i\omega t}\,dt.$$

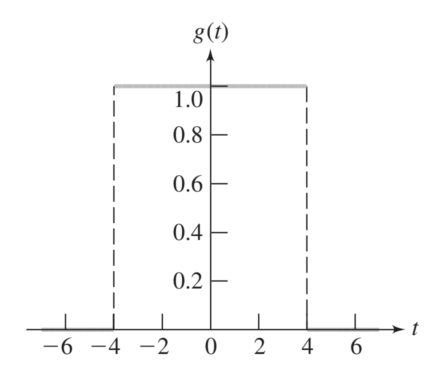


FIGURA 3.14(a) *Función ventana*

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } |t| \leq 4 \\ 0 & \text{para } |t| > 4. \end{cases}$$

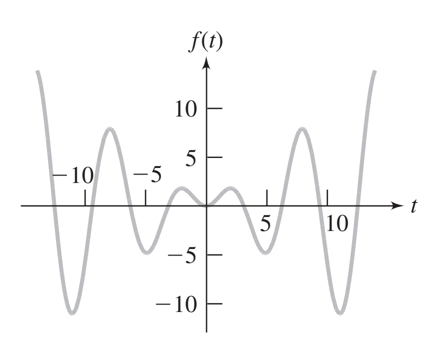


FIGURA 3.14(b) $f(t) = t\,\mathrm{sen}(t)$.

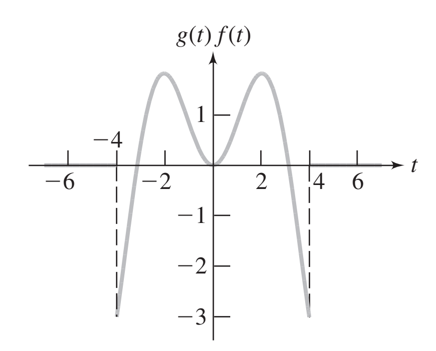


FIGURA 3.14(c) *f ventana con g.*

EJEMPLO 3.17

Sea $f(t) = 6e^{-|t|}$. Entonces,

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} 6e^{-|t|}e^{-i\omega t}\,dt = \frac{12}{1+\omega^2}.$$

Usar la función ventana

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } -2 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{para } |t| > 2. \end{cases}$$

La figura 3.15 muestra la gráfica de la función ventaneada $g(t)f(t)$. La transformada de Fourier ventaneada de f es

$$\begin{aligned}\widehat{f_{ven}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} 6e^{-|t|}g(t)e^{-i\omega t}\,dt \\ &= \int_{-2}^{2} 6e^{-|t|}e^{-i\omega t}\,dt \\ &= 12\frac{-2e^{-2}\cos^2(\omega) + e^{-2} + e^{-2}\omega\,\mathrm{sen}(2\omega) + 1}{1+\omega^2}.\end{aligned}$$

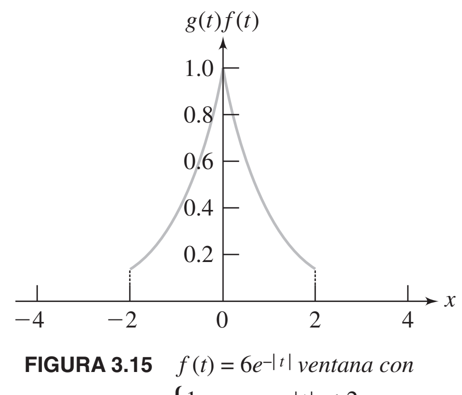


FIGURA 3.15 $f(t) = 6e^{-|t|}$ *ventana con*

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } |t| \leq 2 \\ 0 & \text{para } |t| > 2. \end{cases}$$

Esto da el contenido de frecuencia de la señal f en el intervalo de tiempo $-2 \leq t \leq 2$. ■

Con frecuencia usamos una función ventana recorrida. Suponga que el soporte de g es $[-T, T]$. Si $t_0 > 0$, entonces la gráfica de $g(t - t_0)$ es la gráfica de $g(t)$ recorrida a la derecha t_0 unidades. Ahora

$$f(t)g(t-t_0) = \begin{cases} f(t)g(t-t_0) & \text{para } t_0 - T \leq t \leq t_0 + T \\ 0 & \text{para } t < t_0 - T \quad \text{y para } t > t_0 + T \end{cases}.$$

Las figuras 3.16(a) hasta (d) ilustran este proceso. En este caso, tome la transformada de Fourier de la señal ventaneada recorrida

$$\begin{aligned} \widehat{f_{ven,t_0}}(\omega) &= \mathfrak{F}[f(t)g(t-t_0)](\omega) \\ &= \int_{t_0-T}^{t_0+T} f(t)g(t-t_0)e^{-i\omega t}\,dt. \end{aligned}$$

Esto da el contenido de frecuencia de la señal en el intervalo de tiempo $[t_0 - T, t_0 + T]$.

Algunas veces, los ingenieros se refieren al proceso de ventanear como la *localización de tiempo-frecuencia*. Si g es la función ventana, el *centro* de g se define como el punto

$$t_C = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t\,|g(t)|^2\,dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2\,dt}.$$

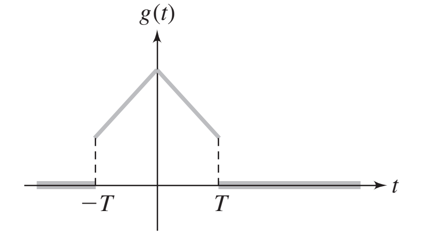


FIGURA 3.16(a) *Una función ventana g en $[-T, T]$.*

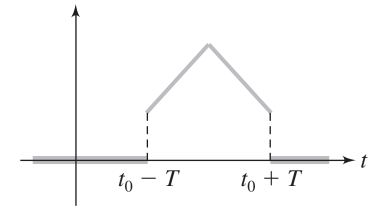


FIGURA 3.16(b) *Función ventana recorrida $g(t - t_0)$.*

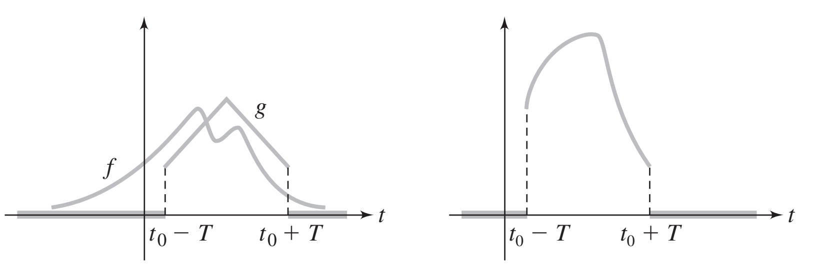


FIGURA 3.16(c) *Señal típica $f(t)$.* **FIGURA 3.16(d)** $g(t - t_0)f(t)$.

El número

$$t_R = \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_C)^2 \, |g(t)|^2 \, dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 \, dt} \right)^{1/2}$$

es el *radio* de la función ventana. El ancho de la función ventana es $2t_R$ y se conoce como la *duración RMS de la ventana*. En esta terminología se supone que todas las integrales involucradas convergen.

Cuando trabaja con la transformada de Fourier de la función ventana, entonces se aplica la terminología similar:

$$\text{centro de } \hat{g} = \omega_C = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega \, |\hat{g}(\omega)|^2 \, d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\omega)|^2 \, d\omega}$$

y

$$\text{radio de } \hat{g} = \omega_R = \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_C)^2 \, |\hat{g}(\omega)|^2 \, d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\omega)|^2 \, d\omega} \right)^{1/2}.$$

El ancho de $\hat{g}$ es $2\omega_R$, un número conocido como el *ancho de banda RMS* de la función ventana.

3.4.7 El teorema de muestreo de Shannon

La enunciación del teorema de muestreo de Shannon afirma que una señal de banda limitada puede reconstruirse a partir de ciertos valores muestrales.

Una señal *f* es de *banda limitada* si su transformada de Fourier $\hat{f}$ tiene soporte compacto (tiene valores distintos de cero sólo en un intervalo cerrado de longitud finita). Esto significa que, para algún *L*,

$$\hat{f}(\omega) = 0 \quad \text{si } |\omega| > L.$$

Usualmente se elige *L* de manera que sea el menor número que cumple con esta condición. En este caso, *L* es el *ancho de banda* de la señal. El contenido total de frecuencia de dicha señal *f* está en la banda $[-L, L]$.

Ahora hay que probar que se puede reconstruir una señal de banda limitada a partir de valores muestrales tomados en tiempos apropiados. Empiece con la integral para la transformada inversa de Fourier, suponiendo que recupera $f(t)$ para todo *t* real a partir de su transformada:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega.$$

Debido a que f es de banda limitada,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega. \tag{3.8}$$

Por el momento deje esto en espera y escriba la serie de Fourier compleja para $\hat{f}(\omega)$ en $[-L, L]$:

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{n\pi i\omega/L} \tag{3.9}$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} \hat{f}(\omega) e^{-n\pi i\omega/L}\, d\omega.$$

Comparando c_n con $f(t)$ en la ecuación (3.8), concluye que

$$c_n = \frac{\pi}{L} f\left(\frac{-n\pi}{L}\right).$$

Sustituya en la ecuación (3.9) para obtener

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{L} f\left(-\frac{n\pi}{L}\right) e^{n\pi i\omega/L}.$$

Como n toma todos los valores enteros en esta sumatoria, puede reemplazar n con $-n$ para escribir

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\pi}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) e^{-n\pi i\omega/L}.$$

Ahora sustituya esta serie por $\hat{f}(\omega)$ en la ecuación (3.8) para obtener

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{L} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) e^{-n\pi i\omega/L} e^{i\omega t}\, d\omega.$$

Intercambie la sumatoria y la integral para obtener

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \int_{-L}^{L} e^{i\omega(t-n\pi/L)}\, d\omega \\
&= \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \frac{1}{i(t-n\pi/L)} \left[e^{i\omega(t-n\pi/L)}\right]_{-L}^{L} \\
&= \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \frac{1}{i(t-n\pi/L)} \left(e^{i(Lt-n\pi)} - e^{-i(Lt-n\pi)}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \frac{1}{Lt-n\pi} \frac{1}{2i} \left(e^{i(Lt-n\pi)} - e^{-i(Lt-n\pi)}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \frac{\operatorname{sen}(Lt-n\pi)}{Lt-n\pi}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Esto significa que se conoce $f(t)$ para todo tiempo t si sólo los valores de la función $f(n\pi/L)$ están determinados para todo valor entero de n. Un ingeniero puede reconstruir una señal $f(t)$ mediante el muestreo en los tiempos $0, \pm\pi/L, \pm 2\pi/L, \ldots$ Una vez conocidos los valores de $f(t)$ para esos tiempos, entonces la ecuación (3.10) reconstruye toda la señal. Esta es la manera en la que los ingenieros convierten señales digitales en señales analógicas, con aplicaciones en la tecnología tales como la utilizada en los discos compactos.

La ecuación (3.10) se conoce como el *teorema de muestreo de Shannon*. Lo volverá a encontrar cuando estudie onduletas. En el caso $L = \pi$, el teorema de muestreo tiene la forma simple

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\operatorname{sen}(\pi(t-n))}{\pi(t-n)} \tag{3.11}$$

3.4.8 Filtros de paso bajo y ancho de banda

Considere una señal f, no necesariamente de banda limitada. Sin embargo, suponga que la señal tiene energía limitada, así

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt$$

es finita. Tales funciones son llamadas *cuadrados integrables*, y también las encontrará más adelante con los desarrollos en onduletas.

El espectro de f está dado por su transformada de Fourier

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt.$$

Si f no es de banda limitada, reemplace f con una señal de banda limitada f_{ω_0} con ancho de banda que no exceda un número positivo ω_0 aplicando un filtro de paso bajo que elimina de $\hat{f}(\omega)$ las frecuencias fuera del rango $[-\omega_0, \omega_0]$. Esto es, sea

$$\widehat{f_{\omega_0}}(\omega) = \begin{cases} \hat{f}(\omega) & \text{para } -\omega_0 \le \omega \le \omega_0 \\ 0 & \text{para } |\omega| > \omega_0 \end{cases}$$

Esto define la transformada de la función f_{ω_0} a partir de la cual se recupera f_{ω_0} mediante la transformada inversa de Fourier:

$$f_{\omega_0}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f_{\omega_0}}(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \widehat{f_{\omega_0}}(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega.$$

El proceso de aplicar un filtro de paso bajo se traduce matemáticamente al multiplicar por una función apropiada (esencialmente del tipo ventana). Defina la función característica χ_I de un intervalo I por

$$\chi_I(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \text{ está en } I \\ 0 & \text{si } t \text{ es un número real que no está en } I \end{cases}$$

Ahora observe que

$$\widehat{f_{\omega_0}}(\omega) = \chi_{[-\omega_0, \omega_0]}(\omega) \hat{f}(\omega), \tag{3.12}$$

o, más brevemente,

$$\widehat{f_{\omega_0}} = \chi_{[-\omega_0, \omega_0]} \hat{f}.$$

En este contexto, $\chi_{[-\omega_0, \omega_0]}$ es llamada la *función de transferencia*. Se muestra su gráfica en la figura 3.17. La transformada inversa de Fourier de la función de transferencia es

$$\mathfrak{F}^{-1}[\chi_{[-\omega_0, \omega_0]}](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{i\omega t} \, d\omega = \frac{\operatorname{sen}(\omega_0 t)}{\pi t},$$

cuya gráfica aparece en la figura 3.18. En el caso en que $\omega_0 = \pi$, esta es la función, que evaluada en $t - n$ en lugar de en t, aparece en la fórmula de muestreo de Shannon (3.11) que reconstruye $f(t)$ a partir de los valores de muestreo $f(n)$ en los enteros. Por esta razón $\operatorname{sen}(\omega_0 t)/\pi t$ es llamada la *función de muestreo de Shannon*.

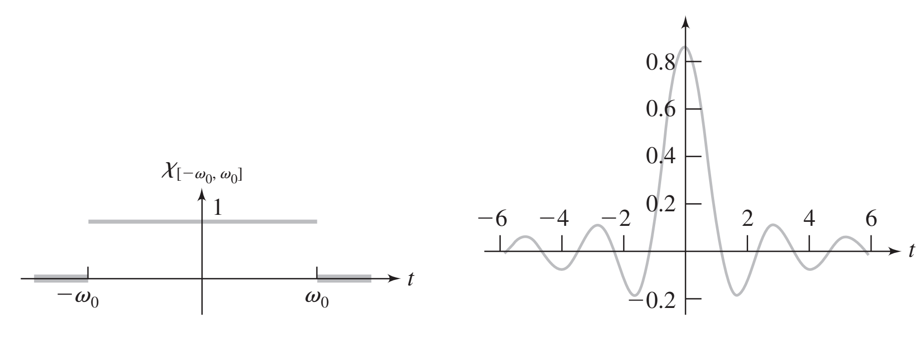


FIGURA 3.17 *Gráfica de* $\chi_{[-\omega_0,\omega_0]}$.

FIGURA 3.18 *Gráfica de* $\text{sen}(\omega_0 t)/\pi t$ *para* $\omega_0 = 2.7$.

Ahora recuerde el teorema 3.12 (2) y (3) de la sección 3.4.4, el filtrado analógico en la variable de tiempo t se hace por convolución. Si $\varphi(t)$ es la función filtro, entonces el efecto de filtrar una función f por φ es una nueva función g definida por

$$g(t) = (\varphi * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) f(t - \xi)\, d\xi.$$

Aplicando la transformada de Fourier de esta ecuación, tiene

$$\hat{g}(\omega) = \hat{\varphi}(\omega) \hat{f}(\omega).$$

Por tanto, filtra en la variable de frecuencia tomando el producto de la transformada de Fourier de la función filtro con la transformada de la función filtrada.

Ahora formule la ecuación (3.12) como

$$f_{\omega_0}(t) = \left(\frac{\text{sen}(\omega_0 t)}{\pi t} * f(t) \right).$$

Esto da el filtrado de paso bajo de f como la convolución de la función de muestreo de Shannon con f.

En el filtrado de paso bajo, produce, a partir de la señal f, una nueva señal f_{ω_0}, que es de banda limitada. Esto es, filtre las frecuencias de la señal fuera de $[-\omega_0, \omega_0]$. En una clase de filtrado semejante, llamado *filtrado en paso de banda*, se busca filtrar los efectos de la señal fuera de un ancho de banda dado. Una señal de banda limitada f puede descomponerse en una suma de señales, cada una de las cuales lleva el contenido de información de f dentro de cierta banda de frecuencia dada. Para ver cómo se hace esto, sea f una señal de banda limitada con ancho de banda Ω. Considere una sucesión finita de frecuencias crecientes

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_N = \Omega.$$

Para $j = 1, \ldots, N$, defina una función filtro de ancho de banda β_j por medio de su función de transferencia:

$$\hat{\beta}_j = \chi_{[-\omega_j, -\omega_{j-1}]} + \chi_{[\omega_{j-1}, \omega_j]}.$$

La gráfica de esta función de transferencia, que es una suma de funciones características de intervalos de frecuencia, se muestra en la figura 3.19. La función filtro de ancho de banda $\beta_j(t)$, que filtra el contenido

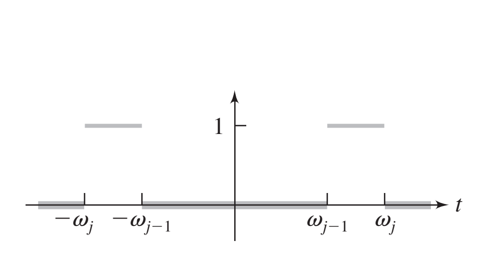


FIGURA 3.19 $\chi_{[-\omega_j,-\omega_j-1]} + \chi_{[\omega_j-1,\,\omega_j]}$.

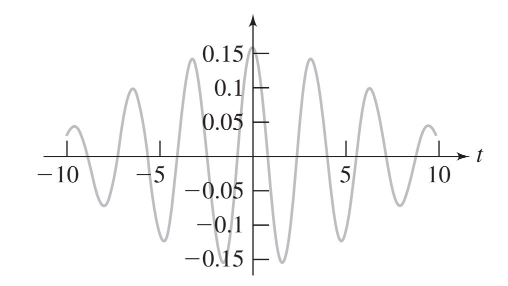


FIGURA 3.20 $\beta_j(t) = \frac{\text{sen}(\omega_j t)-\text{sen}(\omega_{j-1}t)}{\pi t}$ *con* $\omega_j = 2.2$ *y* $\omega_{j-1} = 1.7$.

de frecuencia de $f(t)$ fuera del rango de frecuencia $[\omega_{j-1}, \omega_j]$, se obtiene aplicando la transformada de Fourier inversa de $\hat{\beta}_j(\omega)$. Obtenga

$$\beta_j(t) = \frac{\text{sen}(\omega_j t) - \text{sen}(\omega_{j-1}t)}{\pi t},$$

cuya gráfica se muestra en la figura 3.20.

Ahora defina las funciones

$$f_0(t) = \left(\frac{\text{sen}(\omega_0 t)}{\pi t} * f\right)(t)$$

y, para $j = 1, 2, \ldots, N$,

$$f_j(t) = (\beta_j * f)(t)$$

Entonces, para $j = 1, 2, \ldots, N$, cada $f_j(t)$ lleva el contenido de la señal $f(t)$ en el rango de frecuencia $\omega_{j-1} \le \omega \le \omega_j$, mientras $f_0(t)$ lleva el contenido en $[0, \omega_0]$, que es el rango de baja frecuencia de $f(t)$. Más aún,

$$f(t) = f_0(t) + f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_N(t), \tag{3.13}$$

dando la descomposición de la señal en componentes que llevan la información de la señal para intervalos de frecuencia específicos.

SECCIÓN 3.4 PROBLEMAS

En cada problema del 1 al 8, determine la transformada de Fourier de la función.

1. $\frac{t}{9+t^2}$

2. $3te^{-9t^2}$

3. $26H(t)te^{-2t}$

4. $H(t-3)(t-3)e^{-4t}$

5. $\frac{d}{dt}[H(t)e^{-3t}]$

6. $t[H(t+1) - H(t-1)]$

7. $\frac{5e^{3it}}{t^2 - 4t + 13}$

8. $H(t-3)e^{-2t}$

En cada uno de los problemas 9, 10 y 11, use la convolución para encontrar la transformada inversa de Fourier de la función.

9. $\frac{1}{(1+i\omega)^2}$

10. $\frac{1}{(1+i\omega)(2+i\omega)}$

11. $\dfrac{\operatorname{sen}(3\omega)}{\omega(2+i\omega)}$

En cada uno de los problemas 12, 13 y 14, encuentre la transformada inversa de Fourier de la función.

12. $\dfrac{6e^{4i\omega}\operatorname{sen}(2\omega)}{9+\omega^2}$

13. $e^{-3|\omega+4|}\cos(2\omega+8)$

14. $e^{-\omega^2/9}\operatorname{sen}(8\omega)$

15. Pruebe la siguiente forma del teorema de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(\omega)\right|^2\,d\omega.$$

16. El *contenido de potencia* de una señal $f(t)$ está definido como $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt$, suponiendo que esta integral converge. Determine el contenido de potencia de $H(t)e^{-2t}$.

17. Determine el contenido de potencia de $(1/t)\operatorname{sen}(3t)$. *Sugerencia:* use el resultado del problema 15.

18. Use la transformada de Fourier para resolver

$$y''+6y'+5y=\delta(t-3).$$

En cada uno de los problemas del 19 al 24, calcule la transformada de Fourier ventaneada de la función dada f, usando la función ventana g. También calcule el centro y el ancho de banda RMS de la función ventana.

19. $f(t)=t^2,\ g(t)=\begin{cases}1 & \text{para } -5\le t\le 5\\ 0 & \text{para } |t|>5\end{cases}$

20. $f(t)=\cos(at)$,
$$g(t)=\begin{cases}1 & \text{para } -4\pi\le t\le 4\pi\\ 0 & \text{para } |t|>4\pi\end{cases}$$

21. $f(t)=e^{-t}$,
$$g(t)=\begin{cases}1 & \text{para } 0\le t\le 4\\ 0 & \text{para } t<0 \text{ y para } t>4\end{cases}$$

22. $f(t)=e^{t}\operatorname{sen}(\pi t),\ g(t)=\begin{cases}1 & \text{para } -1\le t\le 1\\ 0 & \text{para } |t|>1\end{cases}$

23. $f(t)=(t+2)^2,\ g(t)=\begin{cases}1 & \text{para } -2\le t\le 2\\ 0 & \text{para } |t|>2\end{cases}$

24. $f(t)=H(t-\pi)$,
$$g(t)=\begin{cases}1 & \text{para } 3\pi\le t\le 5\pi\\ 0 & \text{para } t<3\pi \text{ y para } t>5\pi\end{cases}$$

3.5 Transformadas de Fourier en cosenos y senos

En la sección 3.3 apareció la manera en que la representación en integral de Fourier de una función sugiere su transformada de Fourier. Ahora se probará cómo las integrales de Fourier en cosenos y senos de una función sugieren las transformadas en cosenos y en senos.

Suponga que $f(t)$ es suave a pedazos en cada intervalo $[0, L]$ y $\int_0^{\infty}|f(t)|\,dt$ converge. Entonces para cada t en donde f es continua,

$$f(t)=\int_0^{\infty}a_\omega\cos(\omega t)\,d\omega,$$

donde

$$a_\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(t)\cos(\omega t)\,dt.$$

Con base en estas dos ecuaciones, se genera la siguiente.

DEFINICIÓN 3.5 Transformada de Fourier en cosenos

La transformada de Fourier en cosenos de f está definida por

$$\mathfrak{F}_C[f](\omega)=\int_0^{\infty}f(t)\cos(\omega t)\,dt. \tag{3.14}$$

Con frecuencia denotará $\mathfrak{F}_C[f](\omega)=\hat{f}_C(\omega)$.

Observe que

$$\hat{f}_C(\omega) = \frac{\pi}{2} a_\omega$$

y que

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \hat{f}_C(\omega) \cos(\omega t)\, d\omega. \tag{3.15}$$

Las integrales en las expresiones (3.14) y (3.15) forman el par de transformadas para la transformada de Fourier en cosenos. La última permite recuperar, bajo ciertas circunstancias, $f(t)$ a partir de $\hat{f}_C(\omega)$.

EJEMPLO 3.18

Sea K un número positivo y sea

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq t \leq K \\ 0 & \text{para } t > K \end{cases}$$

La transformada de Fourier de f es

$$\hat{f}_C(\omega) = \int_0^\infty f(t) \cos(\omega t)\, dt$$
$$= \int_0^K \cos(\omega t)\, dt = \frac{\operatorname{sen}(K\omega)}{\omega}. \quad ■$$

La transformada de Fourier en senos se define de manera análoga.

DEFINICIÓN 3.6 Transformada de Fourier en senos

La transformada de Fourier en senos de f está definida por

$$\mathfrak{F}_c[f](\omega) = \int_0^\infty f(t) \operatorname{sen}(\omega t)\, dt.$$

También denote esto como $\hat{f}_S(\omega)$.

Si f es continua para $t > 0$, entonces la representación en integral de Fourier en senos es

$$f(t) = \int_0^\infty b_\omega \operatorname{sen}(\omega t)\, d\omega,$$

donde

$$b_\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t) \operatorname{sen}(\omega t)\, dt.$$

Como

$$\hat{f}_S(\omega) = \frac{\pi}{2} b_\omega$$

entonces

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \hat{f}_S(\omega) \operatorname{sen}(\omega t)\, d\omega,$$

y ésta es la manera en la que recupera $f(t)$ a partir de $\hat{f}_S(\omega)$.

EJEMPLO 3.19

Con la función f del ejemplo 3.18,

$$\hat{f}_S(\omega) = \int_0^\infty f(t)\,\text{sen}(\omega t)\,dt$$
$$= \int_0^K \text{sen}(\omega t)\,dt = \frac{1}{\omega}[1 - \cos(K\omega)].\ \blacksquare$$

Ambas transformadas son lineales:

$$\mathfrak{F}_C[\alpha f + \beta g] = \alpha\mathfrak{F}_C[f] + \beta\mathfrak{F}_C[g]$$

y

$$\mathfrak{F}_S[\alpha f + \beta g] = \alpha\mathfrak{F}_S[f] + \beta\mathfrak{F}_S[g],$$

siempre que todas estas transformadas estén definidas.

Las siguientes reglas operacionales juegan un papel clave cuando se usan estas transformadas para resolver ecuaciones diferenciales.

TEOREMA 3.14 *Reglas operacionales*

Sean f y f' continuas en todo $[0, L]$, y sea $\int_0^\infty |f(t)|\,dt$ convergente. Suponga $f(t) \to 0$ y $f'(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Asuma que f'' es continua a pedazos en cualquier intervalo $[0, L]$. Entonces,

1. $$\mathfrak{F}_C[f''(t)](\omega) = -\omega^2 \hat{f}_C(\omega) - f'(0)$$

y

2. $$\mathfrak{F}_S[f''(t)](\omega) = -\omega^2 \hat{f}_S(\omega) + \omega f(0).\ \blacksquare$$

El teorema se prueba integrando por partes dos veces para cada regla y los detalles se dejan al estudiante.

La fórmula operacional determinará qué transformada usar para resolver un problema dado. Si busca una función $f(t)$, para $0 \le t < \infty$, y se especifica $f(0)$, entonces puede considerar la transformada de Fourier en senos. Si la información dada es acerca de $f'(0)$, entonces la transformada en cosenos es la apropiada. Cuando resuelva ecuaciones diferenciales parciales, encontrará ejemplos donde está involucrada esta estrategia.

SECCIÓN 3.5 PROBLEMAS

En cada uno de los problemas del 1 al 6, determine la transformada de Fourier en cosenos y la transformada de Fourier en senos de la función.

1. $f(t) = e^{-t}$

2. $f(t) = te^{-at}$, con a cualquier número positivo

3. $f(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{para } 0 \le t \le K \\ 0 & \text{para } t > K \end{cases}$

con K cualquier número positivo

4. $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \le t < K \\ -1 & \text{para } K \le t < 2K \\ 0 & \text{para } t \ge 2K \end{cases}$

5. $f(t) = e^{-t}\cos(t)$

6. $f(t) = \begin{cases} \text{senh}(t) & \text{para } K \le t < 2K \\ 0 & \text{para } 0 \le t < K \quad \text{y para } t \ge 2K \end{cases}$

7. Pruebe que bajo condiciones apropiadas de f y sus derivadas,

$$\mathfrak{F}_S[f^{(4)}(t)](\omega) = \omega^4 \hat{f}_S(\omega) - \omega^3 f(0) + \omega f''(0).$$

Sugerencia: Considere condiciones que permitan la aplicación de la fórmula operacional de $(f''(t))''$.

8. Pruebe que bajo condiciones apropiadas de f y sus derivadas,

$$\mathfrak{F}_C[f^{(4)}(t)](\omega) = \omega^4 \hat{f}_C(\omega) + \omega^2 f'(0) - f^{(3)}(0).$$

3.6 Las transformadas finitas de Fourier en senos y cosenos

La transformada de Fourier, la transformada en cosenos y la transformada en senos, están motivadas por las representaciones integrales respectivas de una función. Si emplea la misma estrategia de razonamiento, pero usando las series de Fourier en cosenos y en senos en lugar de integrales, obtiene las llamadas *transformadas finitas*.

Suponga que f es suave a pedazos en $[0, \pi]$.

DEFINICIÓN 3.7 ***Transformada finita de Fourier en cosenos***

La transformada finita de Fourier en cosenos de f está definida por

$$\mathfrak{C}[f](n) = \tilde{f}_C(n) = \int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Si f es continua en x en $[0, \pi]$, entonces $f(x)$ tiene la representación en serie de Fourier en cosenos

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx),$$

donde

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\tilde{f}_C(n).$$

Entonces

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\tilde{f}_C(0) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{f}_C(n)\cos(nx),$$

una expresión de tipo inversión con la cual puede recuperar $f(x)$ a partir de la transformada finita de Fourier en cosenos de f.

De manera semejante, defina una transformada finita en senos.

DEFINICIÓN 3.8 ***Transformada finita de Fourier en senos***

La transformada de Fourier finita en senos de f está definida por

$$\mathfrak{S}[f](n) = \tilde{f}_S(n) = \int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

Para $0 < x < \pi$, si f es continua en x, entonces la representación en serie de Fourier en senos es

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_S(n)\,\text{sen}(nx),$$

una fórmula de inversión para la transformada finita en senos.

EJEMPLO 3.20

Sea $f(x) = x^2$ para $0 \le x \le \pi$. Para la transformada finita en cosenos, calcule

$$\tilde{f}_C(0) = \int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{3}\pi^3$$

y, para $n = 1, 2, \ldots,$

$$\tilde{f}_C(n) = \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\,dx = 2\pi\frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Para la transformada finita en senos, calcule

$$\tilde{f}_S(n) = \int_0^{\pi} x^2\,\text{sen}(nx)\,dx = \frac{(-1)^n[2 - n^2\pi^2] - 2}{n^3}. \ ■$$

Aquí están las reglas operacionales fundamentales para estas transformadas.

TEOREMA 3.15 Reglas operacionales

Sean f y f' continuas en $[0, \pi]$ y sea f'' continua a pedazos. Entonces,

1. $$\mathfrak{C}[f''](n) = -n^2\tilde{f}_C(n) - f'(0) + (-1)^n f'(\pi),$$

para $n = 1, 2, \ldots,$ y

2. $$\mathfrak{S}[f''](n) = -n^2\tilde{f}_S(n) + nf(0) - n(-1)^n f(\pi)$$

para $n = 1, 2, \ldots.$ ■

Las aplicaciones de estas transformadas finitas aparecerán cuando se discutan las ecuaciones diferenciales parciales.

SECCIÓN 3.6 PROBLEMAS

En los problemas del 1 al 7, encuentre la transformada finita de Fourier en senos de la función.

1. K (cualquier constante)

2. x

3. x^2

4. x^5

5. $\text{sen}(ax)$

6. $\cos(ax)$

7. e^{-x}

En cada problema del 8 al 14, encuentre la transformada finita de Fourier en cosenos de la función.

8. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{para } \frac{1}{2} \le x \le \pi \end{cases}$

9. x

10. x^2

11. x^3

12. $\cosh(ax)$

13. $\operatorname{sen}(ax)$

14. e^{-x}

15. Suponga que f es continua en $[0, \pi]$ y f' es continua a pedazos. Pruebe que

$$(\widetilde{f'})_S(n) = -n\tilde{f}_C(n)$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

16. Sean f continua y f' continua a pedazos en $[0, \pi]$. Pruebe que

$$(\widetilde{f'})_C(n) = n\tilde{f}_S(n) - f(0) + (-1)^n f(\pi)$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$.

3.7 La transformada discreta de Fourier

Si f tiene periodo p, su serie de Fourier compleja es

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ik\omega_0 t}.$$

Aquí $\omega_0 = 2\pi/p$ y los coeficientes de Fourier complejos están dados por

$$d_k = \frac{1}{p}\int_{\alpha}^{\alpha+p} f(t)e^{-ik\omega_0 t}\,dt,$$

en donde, debido a la periodicidad de f, α puede ser cualquier número. Si sustituye el valor de ω_0, la serie de Fourier compleja de f es

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{2\pi ikt/p}.$$

Bajo ciertas condiciones de f, esta serie converge a $\frac{1}{2}\,(f(t+) + f(t-))$ en cualquier número t.

Escoja $\alpha = 0$ en la fórmula para los coeficientes, así

$$d_k = \frac{1}{p}\int_0^p f(t)e^{-2\pi ikt/p}\,dt \quad \text{para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Para motivar la definición de la transformada de Fourier discreta, suponga que quiere aproximar d_k. Una manera de hacerlo es subdividir $[0, p]$ en N subintervalos de longitud igual p/N y elegir un punto t_j en cada $[jp/N, (j+1)p/N]$ para $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Ahora aproxime d_k con la suma de Riemann:

$$\begin{aligned} d_k &\approx \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{N-1} f\left(t_j\right) e^{-2\pi ikt_j/p}\,\frac{p}{N} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f\left(t_j\right) e^{-2\pi ikj/N}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

La transformada de Fourier de N puntos es una regla que actúa en una sucesión dada de N números complejos y produce una sucesión infinita de números complejos, uno para cada entero k (aunque con repeticiones periódicas, como verá más adelante). La transformada es definida de manera que, excepto

por el factor $1/N$, la suma de aproximación (3.16) es exactamente la transformada de Fourier discreta de N puntos de los números $f(t_0), f(t_1), \ldots, f(t_{N-1})$.

DEFINICIÓN 3.9 *Transformada discreta de Fourier de N puntos*

Sea N un entero positivo. Sea $u = \{u_j\}_{j=0}^{N-1}$ una sucesión de N números complejos. Entonces la N transformada discreta de Fourier de N puntos de u es la sucesión $\mathbb{D}[u]$ definida por

$$\mathbb{D}[u](k) = \sum_{j=0}^{N-1} u_j e^{-2\pi ijk/N}$$

para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Para simplificar la notación, se usa una convención utilizada con la transformada de Laplace y se denota la transformada discreta de Fourier de N puntos de una sucesión u por U (con minúscula para la sucesión dada de N números y mayúscula de la misma letra para su transformada discreta de Fourier de N puntos). En esta notación, si $u = \{u_j\}_{j=0}^{N-1}$, entonces

$$U_k = \sum_{j=0}^{N-1} u_j e^{-2\pi ijk/N}.$$

También se abrevia la frase “transformada discreta de Fourier “ por TDF.

EJEMPLO 3.21

Considere la sucesión constante $u = \{c\}_{j=0}^{N-1}$, en donde c es un número complejo. La TDF de N puntos está dada por

$$U_k = \sum_{j=0}^{N-1} ce^{-2\pi ijk/N} = c\sum_{j=0}^{N-1}\left(e^{-2\pi ik/N}\right)^j.$$

Ahora recuerde que la suma de una serie geométrica es

$$\sum_{j=0}^{N-1} r^j = \frac{1-r^N}{1-r}. \tag{3.17}$$

Aplicando esto a U_k, tiene

$$U_k = c\frac{1-\left(e^{-2\pi ik/N}\right)^N}{1-e^{-2\pi ik/N}}$$

$$= c\frac{1-e^{-2\pi ik}}{1-e^{-2\pi ik/N}} = 0 \quad \text{para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

debido a que, para cualquier entero k,

$$e^{-2\pi ik} = \cos(2\pi k) - i\,\mathrm{sen}(2\pi k) = 1.$$

Para cualquier entero positivo N, la TDF de N puntos de una sucesión constante de N números es una sucesión infinita de ceros. De una manera más simple, la TDF de N puntos de una sucesión constante es cero. ■

EJEMPLO 3.22

Sean a un número complejo y N un entero positivo. Para evitar trivialidades suponga que a no es un entero múltiplo de π. Encuentre la TDF de N puntos de la sucesión $u = \{\text{sen}(ja)\}_{j=0}^{N-1}$. Denotando esta transformada por la letra mayúscula, tiene

$$U_k = \sum_{j=0}^{N-1} \text{sen}(ja)e^{-2\pi ijk/N}.$$

Usando el hecho de que

$$\text{sen}(ja) = \frac{1}{2i}\left(e^{ija} - e^{-ija}\right)$$

para escribir

$$\begin{aligned} U_k &= \frac{1}{2i}\sum_{j=0}^{N-1} e^{ija}e^{-2\pi ijk/N} - \frac{1}{2i}\sum_{j=0}^{N-1} e^{-ija}e^{-2\pi ijk/N} \\ &= \frac{1}{2i}\sum_{j=0}^{N-1}\left(e^{ia-2\pi ik/N}\right)^j - \frac{1}{2i}\sum_{j=0}^{N-1}\left(e^{-ia-2\pi ik/N}\right)^j. \end{aligned}$$

Usando la ecuación (3.17) en cada suma

$$\begin{aligned} U_k &= \frac{1}{2i}\frac{1-\left(e^{ia-2\pi ik/N}\right)^N}{1-e^{ia-2\pi ik/N}} - \frac{1}{2i}\frac{1-\left(e^{-ia-2\pi ik/N}\right)^N}{1-e^{-ia-2\pi ik/N}} \\ &= \frac{1}{2i}\frac{1-e^{iaN}e^{-2\pi ik}}{1-e^{ia-2\pi ik/N}} - \frac{1}{2i}\frac{1-e^{-iaN}e^{-2\pi ik}}{1-e^{-ia-2\pi ik/N}} \\ &= \frac{1}{2i}\frac{1-e^{iaN}}{1-e^{ia-2\pi ik/N}} - \frac{1}{2i}\frac{1-e^{-iaN}}{1-e^{-ia-2\pi ik/N}}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

ya que $e^{-2\pi ik} = 1$.

Para hacer el ejemplo más explícito, suponga que $N = 5$ y $a = \sqrt{2}$. Entonces la sucesión dada u es

$$u_0 = 0, \quad u_1 = \text{sen}\left(\sqrt{2}\right), \quad u_2 = \text{sen}\left(2\sqrt{2}\right), \quad u_3 = \text{sen}\left(3\sqrt{2}\right), \quad u_4 = \text{sen}\left(4\sqrt{2}\right).$$

El k-ésimo término de la TDF de 5 puntos U es

$$U_k = \frac{1}{2i}\frac{1-e^{5i\sqrt{2}}}{1-e^{i\sqrt{2}-2\pi ik/5}} - \frac{1}{2i}\frac{1-e^{-5i\sqrt{2}}}{1-e^{-i\sqrt{2}-2\pi ik/5}}.$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{2i}\frac{1-e^{5i\sqrt{2}}}{1-e^{i\sqrt{2}}} - \frac{1}{2i}\frac{1-e^{-5i\sqrt{2}}}{1-e^{-i\sqrt{2}}} \\ &= \frac{\text{sen}\left(4\sqrt{2}\right) + \text{sen}\left(\sqrt{2}\right) - \text{sen}\left(5\sqrt{2}\right)}{2-2\cos\left(\sqrt{2}\right)}, \\ U_1 &= \frac{1}{2i}\frac{1-e^{5i\sqrt{2}}}{1-e^{i\sqrt{2}-2\pi i/5}} - \frac{1}{2i}\frac{1-e^{-5i\sqrt{2}}}{1-e^{-i\sqrt{2}-2\pi i/5}} \end{aligned}$$

y

$$U_2 = \frac{1}{2i}\frac{1-e^{5i\sqrt{2}}}{1-e^{i\sqrt{2}-4\pi i/5}} - \frac{1}{2i}\frac{1-e^{-5i\sqrt{2}}}{1-e^{-i\sqrt{2}-4\pi i/5}}. \blacksquare$$

Enseguida se desarrollan algunas propiedades de esta transformada.

3.7.1 Linealidad y periodicidad

Si $u = \{uj\}_{j=0}^{N-1}$ y $\upsilon = \{\upsilon_j\}_{j=0}^{N-1}$ son sucesiones de números complejos y a y b son números complejos, entonces

$$au + bv = \left\{au_j + bv_j\right\}_{j=0}^{N=1}.$$

La linealidad de la TDF de N puntos es la propiedad:

$$\mathbb{D}[au + bv](k) = aU_k + bV_k.$$

Esto se sigue inmediatamente de la definición de la transformada, ya que

$$\begin{aligned}\mathbb{D}[au + bv](k) &= \sum_{j=0}^{N-1}(au_j + bv_j)e^{-2\pi ijk/N} \\ &= a\sum_{j=0}^{N-1}u_je^{-2\pi ijk/N} + b\sum_{j=0}^{N-1}v_je^{-2\pi ijk/N} = aU_k + bV_k.\end{aligned}$$

Ahora se probará que la TDF de N puntos es periódica de periodo N. Esto significa que si la sucesión dada es $u = \{u_j\}_{j=0}^{N-1}$, entonces para cualquier entero k,

$$U_{k+N} = U_k.$$

Esto se puede ver en la TDF calculada en el ejemplo 3.22. En la ecuación (3.18), reemplace k por $k + N$. En este ejemplo, este cambio aparece sólo en el término $e^{ia-2\pi ik/N}$ en el denominador. Pero, si k es reemplazada por $k + N$ en esta exponencial, no hay cambios, ya que

$$e^{ia-2\pi i(k+N)/N} = e^{ia}e^{-2\pi ik}e^{-2\pi i} = e^{ia}e^{-2\pi ik} = e^{ia-2\pi ik}.$$

El argumento en general procede como sigue:

$$\begin{aligned}U_{k+N} &= \sum_{j=0}^{N-1}u_je^{-2\pi ij(k+N)/N} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1}u_je^{-2\pi ijk/N}e^{-2\pi ijk} = \sum_{j=0}^{N-1}u_je^{-2\pi ijk/N} = U_k,\end{aligned}$$

ya que $e^{-2\pi ijk} = 1$.

3.7.2 La TDF inversa de N puntos

Suponga que tiene una TDF de N puntos

$$U_k = \sum_{j=0}^{N-1}u_je^{-2\pi ijk/N}$$

de una sucesión $\{u_j\}_{j=0}^{N-1}$ de N números. Afirme que

$$u_j = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}U_ke^{2\pi ijk/N} \quad \text{para } j = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{3.19}$$

Porque esta expresión recupera la sucesión de N puntos original a partir de su transformada discreta, la ecuación (3.19) es llamada la *transformada discreta de Fourier inversa de N puntos*.

Para verificar la ecuación (3.19), es conveniente poner $W = e^{-2\pi i/N}$. Entonces

$$W^N = 1 \quad \text{y} \quad W^{-1} = e^{2\pi i/N}.$$

Ahora escriba

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} U_k e^{2\pi ijk/N} &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} U_k W^{-jk} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{r=0}^{N-1} u_r e^{-2\pi irk/N}\right) W^{-jk} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{N-1} u_r W^{rk} W^{-jk} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} u_r \sum_{k=0}^{N-1} W^{rk} W^{-jk}. \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

En la última sumatoria, observe que

$$W^{rk}W^{-jk} = e^{-2\pi irk/N} e^{2\pi ijk/N} = e^{-2\pi(r-j)k/N} = W^{(r-j)k}.$$

Para j dada, si $r \neq j$, entonces por la ecuación (3.17) para la suma finita de una serie geométrica,

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{rk}W^{-jk} = \sum_{k=0}^{N-1} W^{(r-j)k} = \sum_{k=0}^{N-1} (W^{r-j})^k = \frac{1-(W^{r-j})^N}{1-W^{r-j}} = 0$$

debido a que $(W^{(r-j)})^N = e^{-2\pi i(r-j)} = 1$ y $W^{r-j} = e^{-2\pi i(r-j)/N} \neq 1$. Pero si $r = j$, entonces

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{rk}W^{-jk} = \sum_{k=0}^{N-1} W^{jk}W^{-jk} = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N.$$

Por tanto, en la última suma doble de la ecuación (3.20), hay que retener sólo el término cuando $r = j$ en la sumatoria respecto a r, obteniendo

$$\frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} u_r \sum_{k=0}^{N-1} W^{rk}W^{-jk} = \frac{1}{N}u_j \sum_{k=0}^{N-1} W^{jk}W^{-jk} = \frac{1}{N}u_j N = u_j,$$

y verificando la ecuación (3.19).

3.7.3 TDF aproximación de los coeficientes de Fourier

Esta sección empieza definiendo la TDF de N puntos de manera que las sumas de Riemann, que aproximan los coeficientes de Fourier de una función periódica, fueran $1/N$ veces la TDF de N puntos de la sucesión de los valores de la función en los puntos de partición del intervalo. Ahora observará más de cerca la idea de aproximar los coeficientes de Fourier mediante una transformada de Fourier discreta con la idea de muestrar sumas parciales de la serie de Fourier. Esta aproximación también permite la utilización de software de TDF para la aproximación de los coeficientes de Fourier.

Considere un ejemplo específico, $f(t) = \text{sen}(t)$ para $0 \leq t < 4$, entendiendo que f se extiende sobre toda la recta real con periodo 4. En la figura 3.21 se muestra una parte de la gráfica de f. Con $p = 4$, los coeficientes de Fourier son

$$\begin{aligned}
d_k &= \frac{1}{4}\int_0^4 \text{sen}(\xi)e^{-2\pi ik\xi/4}\,d\xi = \frac{1}{4}\int_0^4 \text{sen}(\xi)e^{-\pi ik\xi/2}\,d\xi \\
&= \frac{\cos(4)-1}{\pi^2k^2-4} + \frac{1}{2}i\frac{\pi k\,\text{sen}(4)}{\pi^2k^2-4}.
\end{aligned} \qquad (3.21)$$

para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$

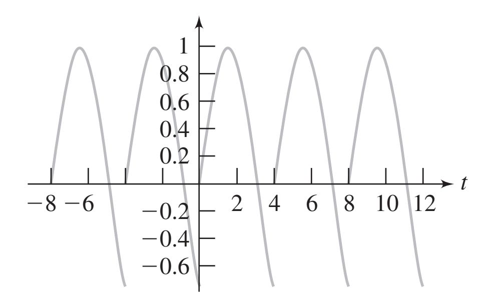


FIGURA 3.21 $f(t) = \text{sen}(t)$ *para* $0 \leq t < 4$, *extendida periódicamente sobre la recta real.*

Sea ahora N un entero positivo y subdivida $[0, 4]$ en N subintervalos de igual longitud $4/N$. Estos subintervalos son $[4j/N, 4(j+1)/N]$ para $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Construya N números evaluando $f(t)$ en el extremo izquierdo de cada subintervalo. Estos puntos son $4j/N$, así obtiene la sucesión de N puntos

$$u = \left\{ \text{sen}\left(\frac{4j}{N}\right) \right\}_{j=0}^{N-1} .$$

Forme la TDF de N puntos de esta sucesión:

$$U_k = \sum_{j=0}^{N-1} \text{sen}\left(\frac{4j}{N}\right) e^{-2\pi ijk/4} = \sum_{j=0}^{N-1} \text{sen}\left(\frac{4j}{N}\right) e^{-\pi ijk/2}.$$

Entonces

$$\frac{1}{N} U_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \text{sen}\left(\frac{4j}{N}\right) e^{-\pi ijk/2}$$

es una suma de Riemann para la integral que define d_k. La pregunta es: ¿Hasta qué punto $(1/N)U_k$ aproxima a d_k? En este ejemplo, hay una expresión explícita (3.21) para d_k. Se evaluará explícitamente $(1/N)U_k$, usando $a = 4/N$ en la TDF de $\{\text{sen}(ja)\}_{j=0}^{N-1}$ determinada en el ejemplo 3.22. Esto nos da

$$\frac{1}{N} U_k = \frac{1}{N} \left[\frac{1}{2i} \frac{1 - e^{4i}}{1 - e^{4i/N - 2k\pi i/N}} - \frac{1}{2i} \frac{1 - e^{-4i}}{1 - e^{-4i/N - 2k\pi i/N}} \right].$$

Ahora calcule el término exponencial en el denominador usando la aproximación

$$e^x \approx 1 + x$$

para $|x| << 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} U_k &\approx \frac{1}{N} \left[\frac{1}{2i} \frac{1 - e^{4i}}{1 - [1 + (4i/N - 2k\pi i/N]} - \frac{1}{2i} \frac{1 - e^{-4i}}{1 - [1 + (-4i/N - 2k\pi i/N]} \right] \\ &= -\frac{1}{4} \left[\frac{1 - e^{4i}}{-2 + k\pi} - \frac{1 - e^{-4i}}{2 + k\pi} \right] \\ &= -\frac{1}{4} \frac{1}{\pi^2 k^2 - 4} \left[4 - \pi k (e^{4i} - e^{-4i}) - 2(e^{4i} + e^{-4i}) \right] \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{1}{\pi^2k^2-4}[4 - 2\pi ki \operatorname{sen}(4) - 4\cos(4)]$$

$$= \frac{\cos(4)-1}{\pi^2k^2-4} + \frac{1}{2}i\frac{\pi k \operatorname{sen}(4)}{\pi^2k^2-4}.$$

La aproximación $e^x \approx 1 + x$ ha conducido a una expresión aproximada para $(1/N)U_k$ que es exactamente igual a d_k. Sin embargo, esta aproximación no puede ser válida para todo k. Primero, la aproximación usada para e^x supone que $|x| < 1$, y segundo, la TDF de N puntos es periódica de periodo N, así $U_{k+N} = U_k$, mientras no existe tal periodicidad en las d_k.

En general, es muy difícil obtener una estimación en tamaños relativos de $|k|$ y N para que $(1/N)U_k$ aproxime a d_k dentro de cierta tolerancia y que valga para una clase razonable de funciones. Sin embargo, para muchas aplicaciones científicas y de ingeniería, la regla empírica $|k| \leq N/8$ ha resultado efectiva.

SECCIÓN 3.7 PROBLEMAS

En cada problema del 1 al 6, calcule $\mathbb{D}[u](k)$ para $k = 0, \pm1, \ldots, \pm4$ para la sucesión dada u.

1. $\{\cos(j)\}_{j=0}^{5}$
2. $\{e^{ij}\}_{j=0}^{5}$
3. $\{1/(j+1)\}_{j=0}^{5}$
4. $\{1/(j+1)^2\}_{j=0}^{5}$
5. $\{j^2\}_{j=0}^{5}$
6. $\{\cos(j) - \operatorname{sen}(j)\}_{j=0}^{4}$

En cada problema del 7 al 12, se da una sucesión $\{Uk\}_{k=0}^{N}$. Determine la transformada inversa de Fourier discreta de N puntos de esta sucesión.

7. $U_k = (1+i)^k$, $N = 6$
8. $U_k = i^{-k}$, $N = 5$
9. $U_k = e^{-ik}$, $N = 7$
10. $U_k = k^2$, $N = 5$
11. $U_k = \cos(k)$, $N = 5$
12. $U_k = \ln(k+1)$, $N = 6$

En cada problema del 13 al 16, calcule los primeros siete coeficientes de Fourier complejos d_0, $d_{\pm1}$, $d_{\pm2}$ y $d_{\pm3}$ de f (véase la sección 2.7). Después use la TDF para aproximar estos coeficientes con $N = 128$.

13. $f(t) = \cos(t)$ para $0 \leq t \leq 2$, f tiene periodo 2
14. $f(t) = e^{-t}$ para $0 \leq t < 3$, f tiene periodo 3
15. $f(t) = t^2$ para $0 \leq t < 1$, f tiene periodo 1
16. $f(t) = te^{2t}$ para $0 \leq t < 4$, f tiene periodo 4

3.8 Series de Fourier muestrales

En la subsección anterior, se discutió la aproximación de los coeficientes de Fourier de una función periódica f. Esto se hizo aproximando los términos de una transformada discreta de Fourier de N puntos formada por el muestreo de $f(t)$ en N puntos de $[0, p]$. Ahora se discute el uso de una TDF inversa para aproximar las sumas parciales muestreadas de la serie de Fourier de una función periódica (esto es, sumas parciales evaluadas en los puntos elegidos).

Considere la suma parcial

$$S_M(t) = \sum_{k=-M}^{M} d_k e^{2\pi ikt/p}.$$

Subdivida $[0, p]$ en N subintervalos y elija los puntos muestreados $t_j = jp/N$ para $j = 0, 1, \ldots, N-1$.

Forme la sucesión de N puntos $u = \{f(jp/N\}_{j=0}^{N-1}$ y aproxime

$$d_k \approx \frac{1}{N} U_k,$$

donde

$$U_k = \sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{jp}{N}\right) e^{-2\pi ijk/N}$$

Para tener $|k| \leq N/8$, como se mencionó al final de la subsección anterior, requiere que $M \leq N/8$. Así,

$$S_M(t) \approx \sum_{k=-M}^{M} \frac{1}{N} U_k e^{2\pi ikt/p}.$$

En particular, si muestrea la suma parcial en los puntos de la partición jp/N, entonces

$$S_M\left(\frac{jp}{N}\right) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=-M}^{M} U_k e^{2\pi ijk/N}.$$

Probará que la suma de la derecha es una TDF inversa de N puntos para una sucesión particular de N puntos, que ahora serán determinados. Explore la periodicidad de la TDF de N puntos, esto es, $U_{k+N} = U_k$ para todo entero k. Escriba

$$\begin{aligned}
S_M\left(\frac{jp}{N}\right) &\approx \frac{1}{N} \sum_{k=-M}^{-1} U_k e^{2\pi ijk/N} + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{M} U_k e^{2\pi ijk/N} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{M} U_{-k} e^{-2\pi ijk/N} + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{M} U_k e^{2\pi ijk/N} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{M} U_{-k+N} e^{2\pi ij(-k+N)/N} + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{M} U_k e^{2\pi ijk/N} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=N-M}^{N-1} U_k e^{2\pi ijk/N} + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{M} U_k e^{2\pi ijk/N}. \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

En esta sumatoria, use los $2M + 1$ números

$$U_{N-M}, \ldots, U_{N-1}, U_0, \ldots, U_M.$$

Como $M < N/8$, debe llenar con otros valores para obtener una sucesión de N puntos. Una manera de hacer esto es llenar los otros lugares con ceros. Así

$$V_k = \begin{cases} U_k & \text{para } k = 0, 1, \ldots, M \\ 0 & \text{para } k = M+1, \ldots, N-M-1 \\ U_k & \text{para } k = N-M, \ldots, N-1 \end{cases}$$

Entonces la M-ésima suma parcial de la serie de Fourier de f, muestreada en jp/N, está aproximada por

$$S_M\left(\frac{jp}{N}\right) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} V_k e^{2\pi ijk/N}.$$

EJEMPLO 3.23

Sea $f(t) = t$ para $0 \le t < 2$, y extienda f sobre toda la recta real con periodo 2. En la figura 3.22 se muestra una parte de la gráfica de f.

Los coeficientes de Fourier de f son

$$d_k = \frac{1}{2}\int_0^2 te^{-2\pi ikt/2}\,dt = \begin{cases} \dfrac{i}{\pi k} & \text{para } k \neq 0 \\ 1 & \text{para } k = 0 \end{cases}.$$

y la serie de Fourier compleja es

$$1 + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} \frac{i}{\pi k} e^{\pi ikt}.$$

Esto converge a t en $0 < t < 2$ y en las extensiones periódicas de este intervalo. La M-ésima suma parcial es

$$S_M(t) = 1 + \sum_{k=-M, k\neq 0}^{M} \frac{i}{\pi k} e^{\pi ikt}.$$

Para ser específicos, se elije $N = 2^7 = 128$ y $M = 10$, de manera que $M \le N/8$. Muestreando suma parcial en los puntos $jp/N = j/64$ para $j = 0, 1, \ldots, 127$. Entonces

$$u = \left\{ f\left(\frac{jp}{N}\right)\right\}_{j=0}^{N-1} = \left\{\frac{j}{64}\right\}_{j=0}^{127}.$$

La TDF de 128 puntos de u tiene k-ésimo término

$$U_k = \sum_{j=0}^{127} \frac{j}{64} e^{-\pi ijk/64}.$$

Defina

$$V_k = \begin{cases} U_k & \text{para } k = 0, 1, \ldots, 10 \\ 0 & \text{para } k = 11, \ldots, 117 \\ U_k & \text{para } k = 118, \ldots, 127 \end{cases}.$$

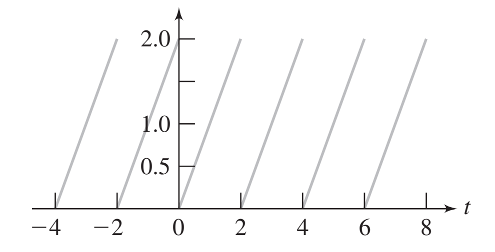


FIGURA 3.22 $f(t) = t$ para $0 \le t < 2$, *extendida periódicamente sobre la recta real.*

Entonces

$$S_{10}\left(\frac{jp}{N}\right) = S_{10}\left(\frac{j}{64}\right) = 1 + \sum_{k=-10,k\neq 0}^{10} \frac{i}{\pi k} e^{\pi ijk/64}$$
$$\approx \frac{1}{128}\sum_{k=0}^{127} V_k e^{\pi ijk/64}. \tag{3.23}$$

Para entender esta discusión de la aproximación de sumas parciales muestreadas de una serie de Fourier, vale la pena ver los números que se obtienen en un ejemplo. Haga los cálculos $S_{10}(\frac{1}{2})$, y después la aproximación (3.23) con $j = 32$.

Primero,

$$S_{10}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \sum_{k=-10,k\neq 0}^{10} \frac{i}{\pi k} e^{\pi ik/2} = 0.45847.$$

Ahora debe calcular las V_k. Para esto, necesita los números

$$U_0 = \sum_{j=0}^{127} \frac{j}{64} = 127, \quad U_1 = \sum_{j=0}^{127} \frac{j}{64} e^{-\pi ij/64} = -1.0 + 40.735i,$$

$$U_2 = \sum_{j=0}^{127} \frac{j}{64} e^{-\pi ij/32} = -1.0 + 20.355i, \quad U_3 = -1.0 + 13.557i,$$

$$U_4 = -1.0 + 10.153i, \quad U_5 = -1.0 + 8.1078i, \quad U_6 = -1.0 + 6.7415i,$$
$$U_7 = -1.0 + 5.7631i, \quad U_8 = -1.0 + 5.0273i, \quad U_9 = -1.0 + 4.4532i,$$
$$U_{10} = -1.0 + 3.9922i, \quad U_{118} = -1.0 - 3.9922i, \quad U_{119} = -1.0 - 4.4532i,$$
$$U_{120} = -1.0 - 5.0273i, \quad U_{121} = -1.0 - 5.7631i, \quad U_{122} = -1.0 - 6.7415i,$$
$$U_{123} = -1.0 - 8.1078i, \quad U_{124} = -1.0 - 10.153i, \quad U_{125} = -1.0 - 13.557i,$$
$$U_{126} = -1.0 - 20.355i, \quad U_{127} = -1.0 - 40.735i.$$

Ahora calcule

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{127} V_k e^{\pi ik/2} &= 127 + (-1.0 + 40.735i)e^{\pi i/2} + (-1.0 + 20.355i)\, e^{\pi i}\\
&\quad + (-1.0 + 13.557i)\, e^{3\pi i/2} + (-1.0 + 10.153i)\, e^{2\pi i} + (-1.0 + 8.1078i)\, e^{5\pi i/2}\\
&\quad + (-1.0 + 6.7415i)\, e^{3\pi i} + (-1.0 + 5.7631i)\, e^{7\pi i/2} + (-1.0 + 5.0273i)\, e^{4\pi i}\\
&\quad + (-1.0 + 4.4532i)\, e^{9\pi i/2} + (-1.0 + 3.9922i)\, e^{5\pi i}\\
&\quad + (-1.0 - 3.9922i)\, e^{118\pi i/2} + (-1.0 - 4.4532i)\, e^{119\pi i/2}\\
&\quad + (-1.0 - 5.0273i)\, e^{120\pi i/2} + (-1.0 - 5.7631i)\, e^{121\pi i/2}\\
&\quad + (-1.0 - 6.7415i)\, e^{122\pi i/2} + (-1.0 - 8.1078i)\, e^{123\pi i/2}\\
&\quad + (-1.0 - 10.153i)\, e^{124\pi i/2} + (-1.0 - 13.557i)\, e^{125\pi i/2}\\
&\quad + (-1.0 - 20.355i)\, e^{126\pi i/2} + (-1.0 - 40.735i)\, e^{127\pi i/2}\\
&= 61.04832.\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{1}{128}\sum_{k=0}^{127} V_k e^{\pi ijk/64} = 0.4764$$

Esto da la aproximación 0.47694 de la TDF de 128 puntos de la suma parcial muestreada $S_{10}(\frac{1}{2})$, cuyo valor calculado es 0.45847. La diferencia es 0.0185. La suma de la serie de Fourier compleja en $t = \frac{1}{2}$ es $f(\frac{1}{2}) = 0.50000$.

En la práctica, obtendrá mayor exactitud usando N muy grandes (haciendo M mayor) y una rutina de software para hacer los cálculos. ■

3.8.1 Aproximación de una transformada de Fourier por una TDF de *N* puntos

Aquí aprenderá cómo puede usar la transformada discreta de Fourier para aproximar la transformada de Fourier de una función, bajo ciertas condiciones. Suponga, para empezar, que $\hat{f}(\omega)$ puede ser aproximada con una tolerancia aceptable por una integral en un intervalo finito:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\omega\xi}\,d\xi \approx \int_{0}^{2\pi L} f(\xi)e^{-i\omega\xi}\,d\xi.$$

Aquí aparece la longitud del intervalo como $2\pi L$ por una razón que se revelará por sí misma muy pronto. Subdivida $[0, 2\pi L]$ en N subintervalos de longitud $2\pi L/N$ y elija los puntos de la partición $\xi j = 2\pi jL/N$ para $j = 0, 1, \ldots, N$. Entonces, puede aproximar la integral de la derecha por una suma de Riemann, obteniendo

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &\approx \sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{2\pi jL}{N}\right) e^{-2\pi ijL\omega/N}\left(\frac{2\pi L}{N}\right)\\ &= \frac{2\pi L}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{2\pi jL}{N}\right) e^{-2\pi ijL\omega/N}.\end{aligned}$$

La suma de la derecha está muy cercana a la forma de una TDF. Si pone $\omega = k/L$, con k cualquier entero, entonces tiene

$$\hat{f}\frac{k}{L} \approx \frac{2\pi L}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{2\pi jL}{N}\right) e^{-2\pi ijk/N}. \tag{3.24}$$

Esto da $\hat{f}(k/L)$, la transformada de Fourier de f muestreada en los puntos k/L, aproximados por $2\pi L/N$ veces la TDF de N puntos de la sucesión

$$\left\{f\left(\frac{2\pi jL}{N}\right)\right\}_{j=0}^{N-1}.$$

Como observó antes, la TDF es periódica de periodo N, mientras que $\hat{f}(k/L)$ no lo es, así que nuevamente aplique la restricción de que $|k| \leq N/8$.

EJEMPLO 3.24

Se probará la aproximación (3.24) para un caso sencillo. Sea

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

Entonces f tiene transformada de Fourier

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\omega\xi}\, d\xi$$
$$= \int_{0}^{\infty} e^{-\xi}e^{-i\omega\xi}\, d\xi = \frac{1 - i\omega}{1 + \omega^2}.$$

Elija $L = 1$, $N = 2^7 = 128$ y $k = 3$ (teniendo en cuenta que quiere $|k| \leq N/8$). Ahora $k/L = 3$ y

$$\hat{f}(k/L) = \hat{f}(3) \approx \frac{2\pi}{128}\sum_{j=0}^{127} e^{-\pi j/64}e^{-6\pi ij/128}$$
$$= \frac{\pi}{64}\sum_{j=0}^{127} e^{-\pi j/64}e^{-3\pi ij/64} = 0.12451 - 0.29884i.$$

Por comparación,

$$\hat{f}(3) = \frac{1 - 3i}{10} = 0.1 - 0.3i.$$

Suponga que intenta con N grande, algo así como $N = 2^9 = 512$. Ahora

$$\hat{f}(3) \approx \frac{2\pi}{512}\sum_{j=0}^{511} e^{-2\pi j/512}e^{-6\pi ij/512}$$
$$= \frac{\pi}{256}\sum_{j=0}^{511} e^{-\pi j/256}e^{-3\pi ij/256} = 0.10595 - 0.2994i,$$

una mejor aproximación que la obtenida con $N = 128$. ■

EJEMPLO 3.25

Continúe con el ejemplo anterior. Ahí el énfasis era detallar la idea de la aproximación de un valor de $\hat{f}(\omega)$. Ahora use la misma función, pero llevando a cabo la aproximación en suficientes puntos para esbozar las gráficas aproximadas de Re[$\hat{f}(\omega)$], Im[$\hat{f}(\omega)$] y $|\hat{f}(\omega)|$. Usando $L = 4$ y $N = 2^8 = 256$, obtiene la aproximación

$$\hat{f}\left(\frac{k}{4}\right) \approx \frac{\pi}{32}\sum_{j=0}^{255} e^{-\pi j/32}e^{-\pi ijk/128}.$$

Tendrá $|k| \leq N/8 = 32$, aunque sólo calcule valores aproximados de $\hat{f}(k/4)$ para $k = 1, \ldots, 13$. Como en este ejemplo puede calcular exactamente $\hat{f}(\omega)$, estos valores están incluidos en la tabla para permitir comparaciones.

	aprox. TDF de $\hat{f}(\omega)$	$\hat{f}(\omega)$
$(k = 1)\ \hat{f}(\frac{1}{4})$	$0.99107 - 0.23509i$	$0.94118 - 0.23529i$
$(k = 2)\ \hat{f}(\frac{1}{2})$	$0.84989 - 0.3996i$	$0.8 - 0.4i$
$(k = 3)\ \hat{f}(\frac{3}{4})$	$0.68989 - 0.4794i$	$0.64 - 0.48i$
$(k = 4)\ \hat{f}(1)$	$0.54989 - 0.4992i$	$0.5 - 0.5i$
$(k = 5)\ \hat{f}(\frac{5}{4})$	$0.44013 - 0.4868i$	$0.39024 - 0.4878i$
$(k = 6)\ \hat{f}(\frac{3}{2})$	$0.35758 - 0.46033i$	$0.3077 - 0.4615i$
$(k = 7)\ \hat{f}(\frac{7}{4})$	$0.29605 - 0.42936i$	$0.24615 - 0.43077i$
$(k = 8)\ \hat{f}(2)$	$0.24989 - 0.39839i$	$0.2 - 0.4i$
$(k = 9)\ \hat{f}(\frac{9}{4})$	$0.21484 - 0.36933i$	$0.16495 - 0.37113i$
$(k = 10)\ \hat{f}(\frac{5}{2})$	$0.18782 - 0.34282i$	$0.13793 - 0.34483i$
$(k = 11)\ \hat{f}(\frac{11}{4})$	$0.16668 - 0.31896i$	$0.11679 - 0.32117i$
$(k = 12)\ \hat{f}(3)$	$0.14989 - 0.29759i$	$0.1 - 0.3i$
$(k = 13)\ \hat{f}(\frac{13}{4})$	$0.13638 - 0.27847i$	$0.086486 - 0.28108i$

La parte real de $\hat{f}(\omega)$ está, en este esquema, aproximada consistentemente con un error de alrededor de 0.05, mientras que la parte imaginaria está aproximada en muchos casos con un error de alrededor de 0.002. Se puede mejorar la exactitud eligiendo N más grande.

En las figuras 3.23, 3.24 y 3.25, los valores aproximados de $\text{Re}[\hat{f}(\omega)]$, $\text{Im}[\hat{f}(\omega)]$ y $|\hat{f}(\omega)|$, respectivamente, son comparados con los valores obtenidos de la expresión exacta para $\hat{f}(\omega)$. Los puntos redondos representan los valores aproximados, y los cuadrados sombreados son los valores reales. En la figura 3.24 la aproximación está suficientemente cercana de manera que los puntos son indistinguibles (dentro de la resolución del diagrama). ■

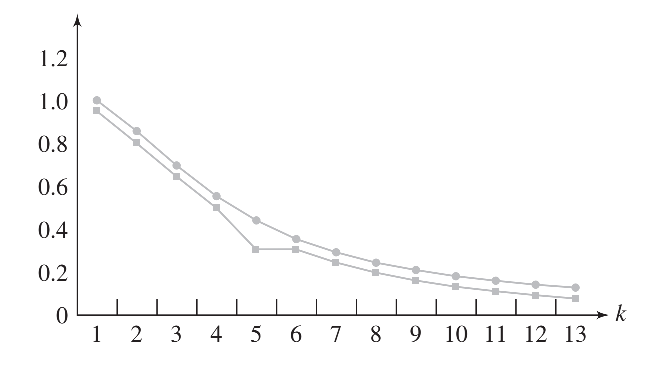


FIGURA 3.23 *Comparación de la aproximación de la TDF de* $\text{Re}[\hat{f}(\omega)]$ *con valores reales para*

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}.$$

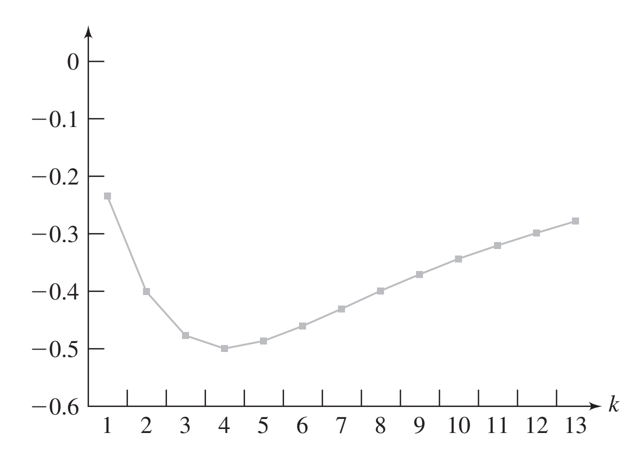


FIGURA 3.24 *Comparación de la aproximación de la TDF de* $\mathrm{Im}[\hat{f}(\omega)]$ *con valores reales para*

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}.$$

Hasta aquí la discusión se ha centrado en funciones f para las cuales $\hat{f}(\omega)$ puede ser aproximada por una integral $\int_0^{2\pi L} f(\xi)e^{-i\omega\xi}\,d\xi$. Puede extender esta idea al caso que $\hat{f}(\omega)$ sea aproximada por una integral $\int_{-\pi L}^{\pi L} f(\xi)e^{-i\omega\xi}\,d\xi$ sobre un intervalo simétrico de longitud $2\pi L$:

$$\hat{f}(\omega) \approx \int_{-\pi L}^{\pi L} f(\xi)e^{-i\omega\xi}\,d\xi.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\hat{f}\left(\frac{k}{L}\right) &\approx \int_{-\pi L}^{\pi L} f(\xi)e^{-ik\xi/L}\,d\xi \\ &= \int_{-\pi L}^{0} f(\xi)e^{-ik\xi/L}\,d\xi + \int_{0}^{\pi L} f(\xi)e^{-ik\xi/L}\,d\xi.\end{aligned}$$

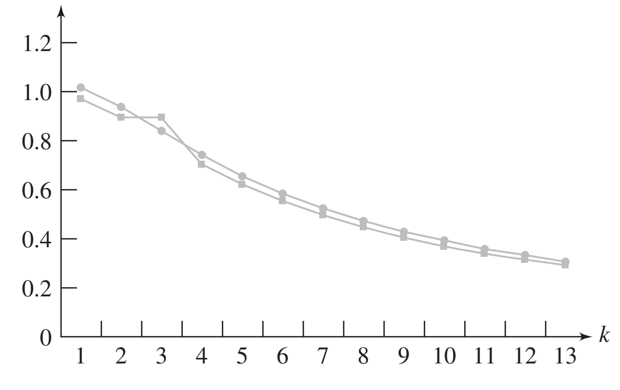


FIGURA 3.25 *Comparación de la aproximación de la TDF de* $|\hat{f}(\omega)|$ *con valores reales para*

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}.$$

Haciendo $\zeta = \xi + 2\pi L$ en la primera integral de la última línea, tiene

$$\hat{f}\left(\frac{k}{L}\right) \approx \int_{\pi L}^{2\pi L} f(\zeta - 2\pi L)e^{-ik(\zeta-2\pi L)/L}\,d\zeta + \int_0^{\pi L} f(\xi)e^{-ik\xi/L}\,d\xi$$
$$= \int_{\pi L}^{2\pi L} f(\zeta - 2\pi L)e^{-ik\zeta/L}\,d\zeta + \int_0^{\pi L} f(\xi)e^{-ik\xi/L}\,d\xi,$$

como $e^{-2\pi ik} = 1$ si k es un entero. Se escribe ξ para ζ como la variable de integración, obteniendo

$$\hat{f}\left(\frac{k}{L}\right) = \int_{\pi L}^{2\pi L} f(\xi - 2\pi L)e^{-ik\xi/L}\,d\xi + \int_0^{\pi L} f(\xi)e^{-ik\xi/L}\,d\xi.$$

Ahora se define

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{para } 0 \le t < \pi L \\ \frac{1}{2}\left(f(\pi L) + f(-\pi L)\right) & \text{para } t = \pi L \\ f(t - 2\pi L) & \text{para } \pi L < t \le \end{cases} \tag{3.25}$$

Entonces

$$\hat{f}\left(\frac{k}{L}\right) \approx \int_0^{2\pi L} g(\xi)e^{-ik\xi/L}\,d\xi$$
$$= \int_0^{L} g(2\pi t)e^{-2\pi ikt/L}(2\pi)\,dt \qquad (\text{sea } \xi = 2\pi t)$$
$$= 2\pi \int_0^{L} g(2\pi t)e^{-2\pi ikt/L}.$$

Finalmente, aproximando la última integral por una suma de Riemann, subdividiendo $[0, L]$ en N subintervalos y eligiendo $t_j = jL/N$ para $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Entonces

$$\hat{f}\left(\frac{k}{L}\right) \approx \frac{2\pi L}{N}\sum_{j=0}^{N-1} g\left(\frac{2\pi jL}{N}\right)e^{-2\pi ijk/N}.$$

Como antes, suponga al usar esta aproximación que $|k| \le N/8$. Esto aproxima $\hat{f}(k/L)$ con un múltiplo constante de la TDF de N puntos de la sucesión

$$\left\{g\left(\frac{2\pi jL}{N}\right)\right\}_{j=0}^{N-1}$$

en donde los puntos de la sucesión son obtenidos a partir de la función g manufacturada a partir de f de acuerdo con la ecuación (3.25).

3.8.2 Filtrado

Una señal periódica $f(t)$, de periodo $2L$, usualmente es filtrada con el propósito de cancelar o disminuir ciertos efectos no deseados o quizá para enfatizar ciertos efectos que uno quiere estudiar. Suponga que $f(t)$ tiene una serie de Fourier compleja

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{n\pi it/L},$$

donde

$$d_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-n\pi it/L}\,dt.$$

Considere la N-ésima suma parcial

$$S_N(t) = \sum_{j=-N}^{N} d_j e^{\pi ijt/L}.$$

Una *suma parcial filtrada* de la serie de Fourier de f es una suma de la forma

$$\sum_{j=-N}^{N} Z\left(\frac{j}{N}\right) d_j e^{\pi ijt/L}, \tag{3.26}$$

en donde la función filtro Z es una función par continua en $[-1, 1]$. En aplicaciones particulares el objetivo es elegir Z para que sirva para propósitos específicos. A manera de introducción, se ilustra el filtrado para un filtro que es la base del estudio de todo el tema de la convergencia de las series de Fourier.

En el siglo XIX, hubo un esfuerzo intenso por entender las sutilezas de la convergencia de la serie de Fourier. Un ejemplo desarrollado por Du Bois Reymond probó que es posible que la serie de Fourier de una función continua diverja en todo punto. En el curso del estudio de la convergencia, se observó que en muchos casos la sucesión de los promedios de las sumas parciales de una serie de Fourier se comporta mejor que la misma sucesión de sumas parciales. Esto lleva a la consideración de los promedios de las sumas parciales:

$$\sigma_N(t) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_k(t) = \frac{1}{N}\left[S_0(t) + S_1(t) + \cdots + S_{N-1}(t)\right].$$

La cantidad $\sigma_N(t)$ es llamada la N-ésima *suma de Cesàro* de f, en honor del matemático italiano que estudió sus propiedades. Se encontró que si las sumas parciales de la serie de Fourier se aproximan a un límite particular en t, entonces $\sigma_N(t)$ debe aproximarse al mismo límite conforme $N \to \infty$, pero no inversamente. Es posible que las sumas de Cesàro tengan un límite para algún t, pero que la serie de Fourier diverja ahí. Fue Fejér, el prodigio de 19 años, quien probó que si f es periódica de periodo 2π, y $\int_0^{2\pi} f(t)dt$ existe, entonces $\sigma_N(t) \to f(t)$ donde f sea continua. Este es un resultado más fuerte que vale para las sumas parciales de la serie de Fourier.

Con esto como antecedente, escriba

$$\sigma_N(t) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{j=-k}^{k} d_j e^{\pi ijt/L}\right).$$

Queda como ejercicio para el estudiante probar que los términos en esta suma doble pueden rearreglarse para escribir

$$\sigma_N(t) = \sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \left|\frac{n}{N}\right|\right) d_n e^{\pi int/L}.$$

Esta es de la forma de la ecuación (3.26) con la *función filtro de Cesàro*

$$Z(t) = 1 - |t| \quad \text{para } -1 \le t \le 1.$$

La sucesión

$$\left\{Z\left(\frac{n}{N}\right)\right\}_{n=-N}^{N} = \left\{1 - \left|\frac{n}{N}\right|\right\}_{n=-N}^{N}$$

es llamada la *sucesión de factores filtrantes del filtro de Cesàro.*

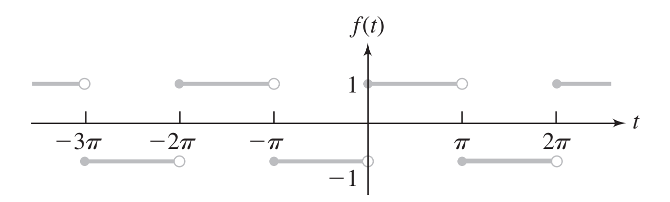


FIGURA 3.26 $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{para } -\pi \le t < 0 \\ 1 & \text{para } 0 \le t < \pi \end{cases}$, *y* $f(t + 2\pi) = f(t)$ *para todo t real.*

Un efecto del filtro de Cesàro es amortiguar el fenómeno de Gibbs, que se ve en la convergencia de la serie de Fourier de una función en el punto de discontinuidad. Un ejemplo que exhibe el fenómeno de Gibbs muy claramente es el siguiente, considere

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{para } -\pi \le t < 0 \\ 1 & \text{para } 0 \le t < \pi \end{cases},$$

con extensión periódica a la recta real. La figura 3.26 muestra la gráfica de esta extensión periódica. Sus coeficientes de Fourier complejos son

$$d_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} -1\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} dt = 0$$

y

$$d_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} -e^{-nit}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-nit}\,dt = \frac{i}{\pi}\frac{-1+(-1)^n}{n}$$

La N-ésima suma parcial de esta serie es

$$S_N(t) = \sum_{n=-N, n\neq 0}^{N} \frac{i}{\pi}\frac{-1+(-1)^n}{n} e^{nit}.$$

Si N es impar, entonces

$$S_N(t) = \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3t) + \frac{1}{5}\operatorname{sen}(5t) + \cdots + \frac{1}{N}\operatorname{sen}(Nt)\right).$$

La N-ésima suma de Cesàro (con $L = \pi$) es

$$\sigma_N(t) = \sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \left|\frac{n}{N}\right|\right)\frac{i}{\pi}\frac{-1+(-1)^n}{n}e^{int}.$$

Esto puede escribirse como

$$\sigma_N(t) = \sum_{n=1}^{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left(\frac{-2}{\pi}\right)\left(\frac{(-1)+(-1)^n}{n}\right)\operatorname{sen}(nt).$$

La figura 3.27 muestra las gráficas de $S_{10}(t)$ y $\sigma_{10}(t)$, y la figura 3.28 muestra las gráficas de $S_{20}(t)$ y $\sigma_{20}(t)$. En las sumas parciales $S_N(t)$, el fenómeno de Gibbs se puede apreciar claramente cerca de $t = 0$, donde f tiene una discontinuidad de salto. Aunque $S_N(t) \to f(t)$ para $0 < t < \pi$ y para $-\pi < t < 0$, las gráficas de $S_N(t)$ tienen picos relativamente altos cerca de cero, que permanecen a una altura casi constante aunque N crezca (si bien estos picos se mueven hacia el eje vertical conforme N crece). Sin embargo, este fenómeno no se ve en las gráficas de $\sigma_N(t)$, que acelera y "suaviza" la convergencia de la serie de Fourier.

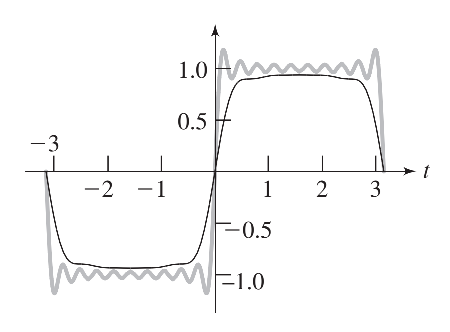


FIGURA 3.27 *$S_{10}(t)$ y $\sigma_{10}(t)$ para la función de la figura 3.26.*

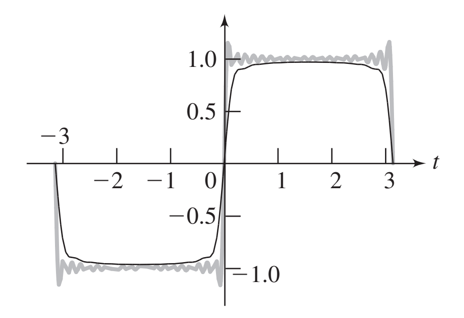


FIGURA 3.28 *$S_{20}(t)$ y $\sigma_{20}(t)$ para la función de la figura 3.26.*

El filtro de Cesàro también amortigua los efectos de los términos de frecuencias altas en la serie de Fourier, ya que el factor filtrante de Cesàro $1 - |n/N|$ tiende a cero conforme n se incrementa hacia N. Este efecto también se ve en las gráficas de las sumas de Cesàro.

En el análisis de señales se utilizan muchos filtros. Dos de los más comunes son los filtros de Hamming y de Gauss. El *filtro de Hamming*, llamado así en honor de Richard Hamming, que fue por muchos años el científico e investigador en jefe de los Laboratorios Bell, está dado por

$$Z(t) = 0.54 + 0.46\cos(\pi t).$$

La N-ésima suma parcial filtrada de la serie de Fourier compleja de f, usando el filtro de Hamming es

$$\sum_{n=-N}^{N} \left(0.54 + 0.46\cos\left(\frac{\pi n}{N}\right)\right) d_n e$$

Otro filtro que se usa frecuentemente para el ruido de fondo en una señal es el *filtro de Gauss*, llamado así en honor del matemático y científico del siglo XIX, Carl Friedrich Gauss, está dado por

$$Z(t) = e^{-a\pi^2 t^2},$$

en donde a es una constante positiva. La suma parcial filtrada con Gauss de la serie de Fourier compleja de f es

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{-a\pi^2 n^2/N^2} d_n e^{\pi nit/L}.$$

También se aplica el filtrado en las transformadas de Fourier. La transformada de Fourier filtrada de f, usando la función filtro $Z(t)$, es

$$\int_{-\infty}^{\infty} Z(\xi) f(\xi) e^{-i\omega\xi}\, d\xi.$$

Si esta integral es aproximada mediante una integral sobre un intervalo finito,

$$\int_{-\infty}^{\infty} Z(\xi) f(\xi) e^{-i\omega\xi}\, d\xi \approx \int_{-L}^{L} Z(\xi) f(\xi) e^{-i\omega\xi}\, d\xi,$$

entonces es una práctica usual, aproximar la integral de la derecha usando la TDF. Los filtros de Cesàro, Hamming y Gauss para esta integral son, respectivamente,

$$Z(t) = 1 - \left|\frac{t}{L}\right| \quad \text{(Cesàro)}$$

$$Z(t) = 0.54 + 0.46\cos\left(\frac{\pi t}{L}\right) \quad \text{(Hamming)}$$

y

$$Z(t) = e^{-a(\pi t/L)^2} \quad \text{(Gauss)}.$$

SECCIÓN 3.8 PROBLEMAS

En cada problema del 1 al 6, se da una función que tiene periodo p. Calcule la serie de Fourier compleja de la función y después la décima suma parcial de esta serie en el punto indicado t_0. Después, usando $N = 128$, calcule la aproximación de la TDF de esta suma parcial en el punto. Aproxime la diferencia entre $f_{10}(t_0)$ y la aproximación de la TDF.

1. $f(t) = 1 + t$ para $0 \leq t < 2$, $p = 2$, $t_0 = \frac{1}{8}$
2. $f(t) = t^2$ para $0 \leq t < 1$, $p = 1$, $t_0 = \frac{1}{2}$
3. $f(t) = \cos(t)$ para $0 \leq t < 2$, $p = 2$, $t_0 = \frac{1}{8}$
4. $f(t) = e^{-t}$ para $0 \leq t < 4$, $p = 4$, $t_0 = \frac{1}{4}$
5. $f(t) = t^3$ para $0 \leq t < 1$, $p = 1$, $t_0 = \frac{1}{4}$
6. $f(t) = t\,\text{sen}(t)$ para $0 < t \leq 4$, $p = 4$, $t_0 = \frac{1}{8}$

En cada problema del 7 al 10, haga la aproximación de la TDF de la transformada de Fourier de f en el punto dado, usando $N = 512$ y el valor dado de L.

7. $f(t) = \begin{cases} e^{-4t} & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$,

   $L = 3$; $\hat{f}(4)$

8. $f(t) = \begin{cases} \cos(2t) & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$,

   $L = 6$, $\hat{f}(2)$

9. $f(t) = \begin{cases} te^{-2t} & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$,

   $L = 3$, $\hat{f}(12)$

10. $f(t) = \begin{cases} t^2\cos(t) & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$

    $L = 4$, $\hat{f}(4)$

En cada problema del 11 al 14, use la TDF para aproximar las gráficas de $\text{Re}[\hat{f}(\omega)]$, $\text{Im}[\hat{f}(\omega)]$ y $|\hat{f}(\omega)|$ para $0 \leq \omega \leq 3$, usando $N = 256$. Para estas funciones, $\hat{f}(\omega)$ puede ser calculado exactamente. Dibuje la gráfica de cada aproximación de $\text{Re}[\hat{f}(\omega)]$, $\text{Im}[\hat{f}(\omega)]$ y $|\hat{f}(\omega)|$ en el mismo conjunto de ejes junto con la función misma.

11. $f(t) = t\,[H(t-1) - H(t-2)]$
12. $f(t) = 2e^{-4|t|}$
13. $f(t) = H(t) - H(t-1)$
14. $f(t) = e^t\,[H(t) - H(t-2)]$

En cada problema del 15 al 19, dibuje la gráfica de la función, la quinta suma parcial de su serie de Fourier en el intervalo y la quinta suma de Cesàro, usando el mismo conjunto de ejes. Repita este proceso para la décima y la vigésimoquinta sumas parciales. Observe en particular las gráficas de los puntos de discontinuidad de la función, donde aparece el fenómeno de Gibbs en la suma parcial de la serie de Fourier pero es filtrado a partir de la suma de Cesàro.

15. $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq t < 2 \\ -1 & \text{para } -2 \leq t < 0 \end{cases}$
16. $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{para } -2 \leq t < 1 \\ 2 + t & \text{para } 1 \leq t < 2 \end{cases}$
17. $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{para } -1 \leq t < \frac{-1}{2} \\ 0 & \text{para } -\frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{para } \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}$
18. $f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{para } -3 \leq t < 1 \\ \cos(t) & \text{para } 1 \leq t < 3 \end{cases}$
19. $f(t) = \begin{cases} 2 + t & \text{para } -1 \leq t < 0 \\ 7 & \text{para } 0 < t < 1 \end{cases}$
20. Sea $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq t < 2 \\ -1 & \text{para } -2 \leq t < 0 \end{cases}$

    Dibuje la quinta suma parcial de la serie de Fourier para $f(t)$ en $[-2, 2]$, junto con la quinta suma de Cesàro, la quinta suma parcial filtrada con Hamming y la quinta suma parcial filtrada con Gauss en el mismo conjunto de ejes. Repita esto para la décima suma y la vigésimoquinta suma.

21. Sea $f(t) = \begin{cases} t & \text{para } -2 \leq t < 0 \\ 2 + t & \text{para } 0 \leq t < 2 \end{cases}$

    Dibujar la quinta suma parcial de la serie de Fourier para $f(t)$ en $[-\pi, \pi]$, junto con la quinta suma de Cesàro, la quinta suma parcial filtrada con Hamming y la quinta suma parcial filtrada con Gauss en el mismo conjunto de ejes. Repita esto para la décima y la vigésimoquinta sumas.

3.9 La transformada rápida de Fourier

La transformada de Fourier discreta es una herramienta poderosa para aproximar coeficientes de Fourier, sumas parciales de la serie de Fourier y transformadas de Fourier. Sin embargo, tal herramienta solamente es útil si hay técnicas de cálculo eficientes para llevar a cabo el gran número de cálculos involucrados en las aplicaciones típicas. Aquí es donde aparece la transformada rápida de Fourier o TRF. La TRF no es en sí una transformación, es más bien un procedimiento eficiente para calcular las transformadas de Fourier discretas. Su impacto, en ingeniería y en ciencias, ha sido profundo en los últimos 35 años ya que convierte a la TDF en una herramienta práctica.

En 1965, apareció por primera vez formalmente la TRF en un artículo de cinco páginas, "*An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Coefficients*", por James W. Cooley de la IBM y John W. Tukey de la Universidad de Princeton. El catalizador detrás de la preparación y la publicación del artículo fue Richard Garwin, un físico que fue consultado por las agencias federales en asuntos que involucraban armas y políticas de defensa. Garwin sabía que Tukey había desarrollado un algoritmo para calcular las transformadas de Fourier, una herramienta que Garwin necesitaba para su propio trabajo. Cuando Garwin llevó las ideas de Tukey al centro de cómputo de investigación de la IBM en Yorktown Heights, con el propósito de que fueran programados, James Cooley fue asignado para ayudarle. Debido a la importancia de un método eficiente para calcular las transformadas de Fourier, rápidamente se difundió la noticia sobre el programa de Cooley, y fue tan grande la demanda que motivó la escritura del artículo Cooley-Tukey.

Después de la publicación del artículo se encontró que algunos de los conceptos fundamentales del método, o similares a él, ya habían aparecido en otros contextos. El mismo Tukey ha contado que Phillip Rudnick, del Instituto Oceanográfico Scripps, había reportado la programación de un caso especial del algoritmo, usando las ideas del artículo de G. D. Danielson y Cornelius Lanczos. Lanczos, un físico-matemático húngaro, cuya carrera abarcó muchas áreas, había desarrollado las ideas esenciales alrededor de 1938 y los años subsecuentes, cuando estaba trabajando en problemas de métodos numéricos y el análisis de Fourier. Mucho antes, Gauss había descubierto esencialmente el análisis de Fourier discreto calculando la órbita de Pallas, pero por supuesto no había computadoras en la era napoleónica.

En la actualidad la TRF se ha convertido en una parte estándar de cierto software de instrumentación. Por ejemplo, FT-NMR, que son las siglas para Transformada de Fourier-Resonancia magnética nuclear (*Fourier Transform-Nuclear Magnetic Resonance*, usa la TRF como parte de su sistema de análisis de datos.

La razón para este uso extendido es la eficiencia de la TRF, que se puede ilustrar mediante un ejemplo simple. Se puede demostrar que, si N es una potencia entera positiva de 2, entonces $\hat{f}(k/L)$ dada por la ecuación (3.24), se puede calcular con no más de $4N\log_2(N)$ operaciones aritméticas. Si se calculan simplemente todas las sumas y productos que intervienen en el cálculo de $\hat{f}(k/L)$, se deben realizar $N-1$ sumas y $N+1$ multiplicaciones, cada una duplicada N veces para obtener las aproximaciones en N puntos. Esto es un total de

$$N(N-1) + N(N+1) = 2N^2$$

operaciones. Suponga, para ser específicos, $N = 2^{20} = 1\,048\,576$. Ahora, $2N^2 = 2.1990(10^{12})$. Si la computadora que se utiliza realiza un millón de operaciones por segundo, este cálculo requerirá alrededor de 2 199 023 segundos, o casi 25.45 días de tiempo de computadora. Puesto que un proyecto dado podría requerir el cálculo de la transformada de Fourier de muchas funciones, esto es intolerable en términos de tiempo y dinero.

En contraste, si $N = 2^n$, entonces

$$4N\log_2(N) = 2^{n+2}\log_2(2^n) = n2^{n+2}.$$

Con $n = 20$, resultan 83 886 080 operaciones. A un millón de operaciones por segundo, esto tomará un poco menos de 84 segundos, una mejora muy sustancial sobre los 25.45 días.

El desarrollo es válido sólo en $[-1, 1]$, pero es instructivo ver cómo las sumas parciales del desarrollo de Fourier-Legendre no tienen relación en general fuera de este intervalo.

3.9.1 Uso de la TRF en el análisis de densidades de potencia espectral de señales

La TRF se utiliza rutinariamente para mostrar gráficas de densidades de potencia espectral de señales. Por ejemplo, considere la señal relativamente simple

$$f(t) = \operatorname{sen}(2\pi(50)t) + 2\operatorname{sen}(2\pi(120)t) + \operatorname{sen}(2\pi(175)t) + \operatorname{sen}(2\pi(210)t).$$

$f(t)$ está escrita de esta manera para identificar fácilmente las frecuencias de los componentes. Escribiendo $\operatorname{sen}(100\pi t)$ como $\operatorname{sen}(2\pi(50)t)$, aparece de inmediato que esta función tiene una frecuencia igual a 50. La figura 3.29 muestra una gráfica de la densidad de potencia espectral *versus* la frecuencia en Hz.

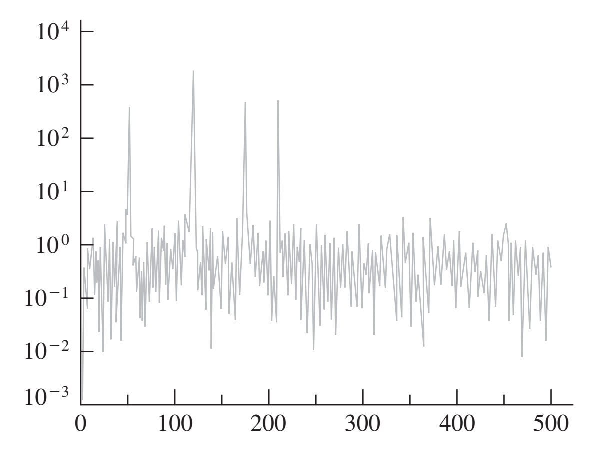


FIGURA 3.29 *Gráfica TRF de la densidad de potencia espectral de* $y = \operatorname{sen}(100\pi t) + 2\operatorname{sen}(240\pi t) + \operatorname{sen}(350\pi t) + \operatorname{sen}(420\pi t)$.

¿En dónde está la TRF aquí? Está en el software que produjo la gráfica. Para este ejemplo, la gráfica se dibujó usando MATLAB y una TRF con $N = 2^{10} = 1024$. Usando el mismo programa y la elección de N, la figura 3.30 muestra la gráfica de la densidad de potencia espectral de

$$g(t) = \cos(2\pi(25)t) + \cos(2\pi(80)t) + \cos(2\pi(125)t) + \cos(2\pi(240)t) + \cos(2\pi(315)t).$$

En ambas gráficas los picos aparecen en las frecuencias primarias de la función.

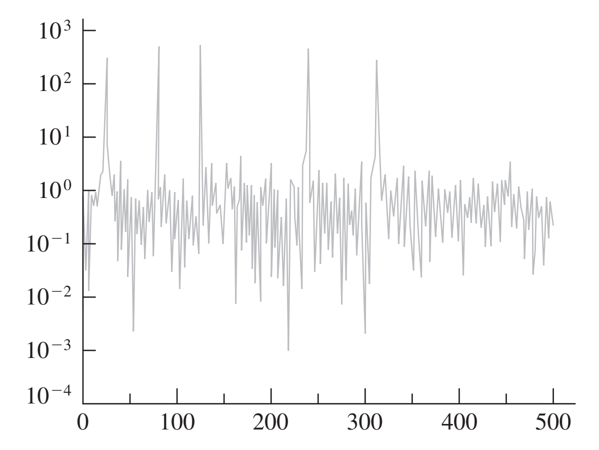


FIGURA 3.30 *Gráfica TRF de la densidad de potencia espectral de* $y = \cos(50\pi t) + \cos(160\pi t) + \cos(250\pi t) + \cos(480\pi t) + \cos(630\pi t)$.

3.9.2 Filtrando ruido de una señal

Algunas veces se usa la TRF para filtrar ruidos de una señal. Ya se ha discutido el filtrado, pero la TRF es la herramienta que lo lleva a cabo. Para ilustrar, considere la señal

$$f(t) = \text{sen}(2\pi(25)t) + \text{sen}(2\pi(80)t) + \text{sen}(2\pi(125)t) + \text{sen}(2\pi(240)t) + \text{sen}(2\pi(315)t).$$

Esta es una señal sencilla. Sin embargo, la señal mostrada en la figura 3.31 está más cercana a la realidad y se obtuvo de la gráfica de $f(t)$ introduciendo un ruido aleatorio de media cero. Si no conoce la señal original $f(t)$, será muy difícil identificar a partir de la figura 3.31 los componentes principales de la frecuencia de $f(t)$ debido al efecto del ruido. Sin embargo, la transformada de Fourier ordena las frecuencias. La densidad de potencia espectral de la señal ruidosa de la figura 3.31 se muestra en la figura 3.32, donde las cinco frecuencias principales pueden ser identificadas fácilmente. Esta gráfica en particular no da las amplitudes correctamente, pero las frecuencias se mantienen muy bien. La figura 3.32 se hizo usando la TRF vía MATLAB, con $N = 2^9 = 512$.

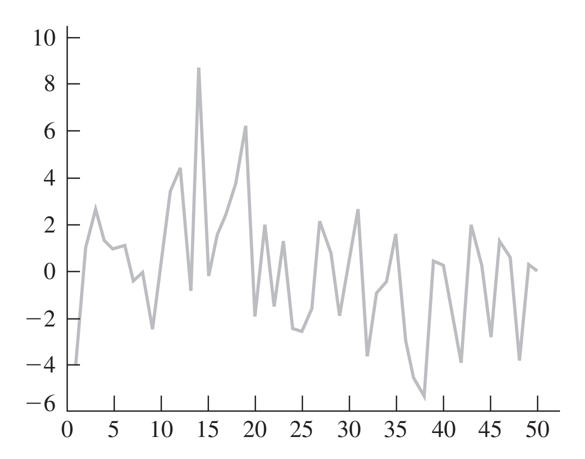


FIGURA 3.31 *Una porción de la señal* $y = \text{sen}(50\pi t) + \text{sen}(160\pi t) + \text{sen}(250\pi t) + \text{sen}(480\pi t) + \text{sen}(630\pi t)$ *corrompida por un ruido aleatorio de media cero.*

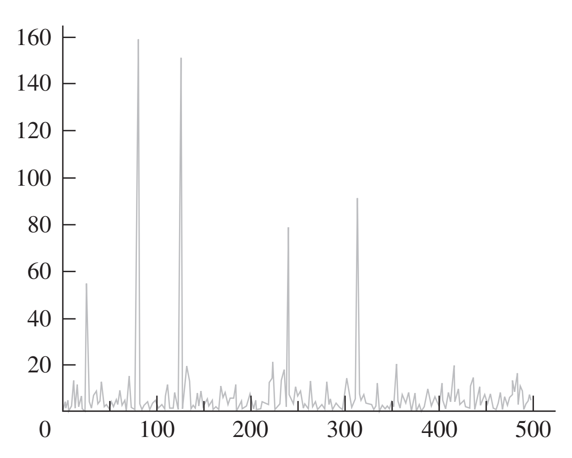


FIGURA 3.32 *Cálculo TRF de la densidad de potencia espectral de la señal de la figura 3.31.*

3.9.3 Análisis de las mareas en la bahía del Morro

Se usará la TDF y la TRF para analizar un conjunto de datos de la marea, investigando las correlaciones entre las mareas altas y bajas y las posiciones relativas del Sol, la Tierra y la Luna.

Las fuerzas que causan las mareas eran de gran interés para Isaac Newton, puesto que él luchaba por entender el mundo que lo rodeaba y dedicó un espacio considerable en el *Principia* a este tópico. En un punto, Newton requirió de tablas nuevas de las posiciones lunares del astrónomo real Flamsteed, quien, debido a una agenda ocupada junto con una enemistad personal con Newton, no divulgaba. Newton respondió ejerciendo presión tanto profesional como política sobre Flamsteed, a través de sus contactos en la corte, finalmente forzaron a Flamsteed a publicar a sus expensas. Años más tarde, Flamsteed recuperó las copias sobrantes de su libro y está reportado que dejándose llevar por la ira contra Newton quemó todas las copias.

Fue un triunfo de la teoría de la gravitación de Newton, aplicada al sistema compuesto por la Tierra, la Luna y el Sol lo que permitió a Newton explicar dos de las mareas principales que ocurren cada día. También fue capaz de explicar por qué las mareas tienen dos veces al mes máximo y mínimo y por qué los extremos son mayores cuando la Luna está más lejos del plano ecuatorial de la Tierra. La órbita elíptica de la Luna respecto a la Tierra también contribuye para la variación mensual en las mareas altas como resultado del cambio en la distancia entre la Tierra y la Luna durante el mes.

La Bahía de Morro está cerca de San Luis Obispo en California. Se ha acumulado una gran cantidad de datos de cómo el océano Pacífico entra y sale de la bahía y las mareas bañan la costa. La figura 3.33 muestra una curva dibujada con estos datos dando las alturas de la marea hora a hora en mayo de 1993. Se analizarán estos datos para determinar las fuerzas primarias que causan estas variaciones en la marea. Antes de llevar a cabo este análisis son necesarios algunos prerrequisitos.

La duración de un día solar es de 24 horas. Este es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor del Sol. El día lunar es 50 minutos más largo que éste. La Tierra tarda aproximadamente 24.8 horas en girar una vez en relación con la Luna debido a que la Luna viaja en la dirección de la rotación de la Tierra (figura 3.34).

El Sol ejerce sus fuerzas de marea primarias sobre un punto de la Tierra dos veces durante el día, y la Luna dos veces cada periodo de 24 horas y 50 minutos. Es más o menos claro por qué la marea debería tener un máximo local en un determinado lugar cuando, ya sea el Sol o la Luna, está casi arriba de ese punto. Sin embargo, no es tan obvio que la marea también se eleva en un punto cuando alguno de estos cuerpos están en el lado opuesto de la Tierra, como puede observarse. Newton fue capaz de mostrar que cuando el sistema Tierra/Luna viaja alrededor de su centro de masa (que siempre está en el interior de la Tierra), la Luna ejerce una fuerza hacia afuera en el lado opuesto de la Tierra. Lo mismo es cierto para el sistema Tierra/Sol. Por lo que, tanto el Sol como la Luna causan dos mareas diariamente.

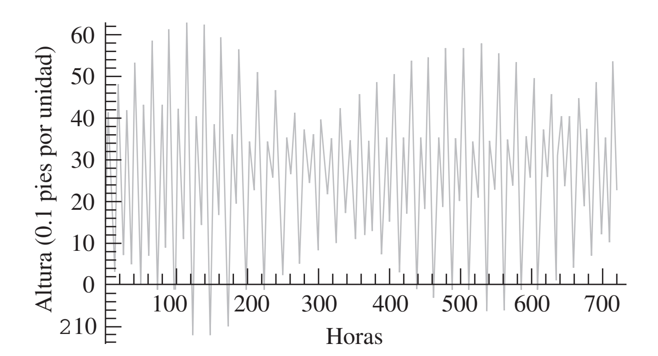


FIGURA 3.33 *Perfil de la marea en la Bahía del Morro hora a hora en mayo de 1993.*

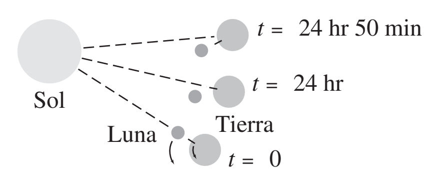


FIGURA 3.34

Las fuerzas de marea son proporcionales al producto de las masas de los cuerpos involucrados e inversamente proporcionales al cubo de la distancia entre ellos. Esto nos permite determinar las fuerzas de marea relativas de la Luna y del Sol sobre la Tierra y sus aguas. Como el Sol tiene una masa aproximadamente de $27(10^6)$ veces la de la Luna y está 390 veces más lejos de la Tierra de lo que la Luna está de la Tierra, la influencia del Sol en las mareas de la Tierra es únicamente 0.46 veces la influencia de la Luna.

Las mareas semidiarias (dos veces al día) causadas por el Sol y la Luna no varían únicamente entre los mismos máximos y mínimos diarios. Otras fuerzas cambian las amplitudes de estos máximos y mínimos. Estas fuerzas son periódicas y son responsables de los pulsos que parecen estar presentes en la figura 3.33. Autoridades en mareas afirman que en realidad hay aproximadamente 390 mareas significativamente medibles. Dependiendo de la aplicación de los datos, usualmente únicamente de siete a 12 de éstas se utilizan para calcular las tablas de marea alta y baja. El resto de esta discusión se centrará en tres de las fuerzas más contribuyentes.

Primero, conforme la Luna orbita a la Tierra, la distancia entre ellas cambia de aproximadamente 222 000 millas en el perigeo a 253 000 millas en el apogeo. Con la ley de la proporción inversa del cubo de las distancias, las diferencias de estas fuerzas es significativa. El tiempo entre el perigeo y el apogeo es aproximadamente de 27.55 días.

Además, como la Luna le gana al Sol aproximadamente 50 minutos cada día, si los tres cuerpos están en conjunción en algún momento, entonces estarán en cuadratura aproximadamente siete días después. Las mareas semidiarias tendrán amplitudes máximas cuando todo esté alineado y mínimas cuando el ángulo Tierra/Luna/Sol sea de 90 grados. El cambio entre estas mareas máxima y mínima nuevamente es periódica, con un periodo de 14.76 días, la mitad del tiempo que tarda la Luna en dar la vuelta alrededor de la Tierra.

La última fuerza de mareas es la resultante del hecho de que la órbita de la Luna está inclinada aproximadamente 5 grados respecto al plano que contiene la órbita de la Tierra alrededor del Sol. El resultado de esta desviación puede notarse observando la posición de la Luna en el cielo durante un periodo de un mes. Conforme la Luna gira sobre su órbita, estará arriba del hemisferio norte durante un tiempo, ayudando a crear mareas altas en esa región, después se moverá hacia el sur, y mientras está en el hemisferio sur, hay poca variación en las mareas del norte. La Luna tarda 13.66 días en moverse de su punto más al norte a su punto más al sur.

Los periodos principales resultantes de estas fuerzas son el periodo semidiario del Sol de 12 horas; el periodo semidiario de la Luna de 12 horas, 50 minutos, 14 segundos; un periodo diario lunar-solar de 23 horas, 56 minutos, 4 segundos; y un periodo diario lunar de 25 horas, 49 minutos, 10 segundos.

Ahora considere los datos reales utilizados para generar la gráfica de la figura 3.33. Aplique la TRF para calcular la TDF de este conjunto de 720 puntos de datos, tome sus valores absolutos y dibuje los puntos resultantes. Este resultado es el espectro de amplitud de la figura 3.35. Las unidades a lo largo del eje horizontal (frecuencia) son ciclos por 720 horas.

Empezando por el lado derecho del espectro de amplitud en la figura 3.35 y moviéndose hacia la izquierda. El primer lugar en el que ve un punto alto es aproximadamente en 60, lo que indica un término en los datos a una frecuencia de 60/720, o 1/12 ciclos por hora. Equivalentemente, este punto denota la presencia de una fuerza que se siente aproximadamente cada 12 horas. Esta es la fuerza solar semidiaria.

El siguiente punto alto en el espectro de amplitud ocurre inmediatamente a la izquierda del primero, en 58. La altura de este dato indica que este es el mayor contribuyente a las mareas. Ocurre cada 720/58,

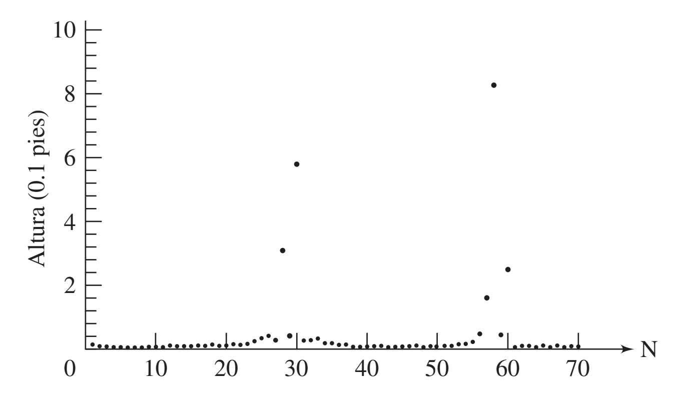


FIGURA 3.35 *Espectro de la marea de la Bahía del Morro.*

o 12.4 horas. Esta es la marea lunar semidiaria. También, hay otra actividad de amplitud pequeña cerca de este punto que se comentará en un momento.

Continuando hacia la izquierda en la figura 3.35, hay una gran contribución aproximadamente en 30, indicando una fuerza con una frecuencia de 30/720, o 1/24, es decir, un periodo de aproximadamente 24 horas. Este es el periodo diario lunar-solar.

El único otro término significativo está en 28, indicando una frecuencia de 28/720. Esto se traduce en un periodo de 25.7 horas e indica el periodo diario lunar.

Así que se han tomado en cuenta todos los periodos dominantes y no hay ninguna otra información significativa en el espectro de amplitud, excepto por el que se notó previamente en la región alrededor de 58. Como el día lunar no es un múltiplo exacto de una hora y las muestras de datos se tomaron cada hora, algunos de los datos asociados con las fuerzas de marea de la Luna se movieron hacia puntos adyacentes. Esto también deforma las amplitudes, afectando nuestra habilidad para determinar con precisión la razón Sol/Luna de las fuerzas. El mismo argumento puede aplicarse para algunos de los datos cerca de 28.

No hay otra información discernible en el espectro de amplitud, porque todas las otras fuerzas tienen periodos mayores que un mes, y esto es mayor que el tiempo en que se tomaron los datos de las mareas.

Es interesante especular en lo que Newton podría haber pensado de esta verificación gráfica de su teoría. Dada su personalidad, es posible que no se hubiera impresionado, habiendo resuelto todo esto por sí mismo con su cálculo.

SECCIÓN 3.9 PROBLEMAS

En cada uno de los problemas del 1 al 4, utilice un paquete de software con la TRF para hacer la gráfica del espectro de potencia de la función. Use $N = 2^{10}$.

1. $y(t) = 4\,\text{sen}(80\pi t) - \text{sen}(20\pi t)$

2. $y(t) = 2\cos(40\pi t) + \text{sen}(90\pi t)$

3. $y(t) = 3\cos(90\pi t) - \text{sen}(30\pi t)$

4. $y(t) = \cos(220\pi t) + \cos(70\pi t)$

En cada uno de los problemas del 5 al 8, corrompa la señal con un ruido aleatorio de media cero y utilice la TRF para dibujar el espectro de densidad de potencia para identificar las frecuencias componentes de la señal original.

5. $y(t) = \cos(30\pi t) + \cos(70\pi t) + \cos(140\pi t)$

6. $y(t) = \text{sen}(60\pi t) + 4\,\text{sen}(130\pi t) + \text{sen}(2405\pi t)$

7. $y(t) = \cos(20\pi t) + \text{sen}(140\pi t) + \cos(240\pi t)$

8. $y(t) = \text{sen}(30\pi t) + 3\,\text{sen}(40\pi t) + \text{sen}(130\pi t) + \text{sen}(196\pi t) + \text{sen}(220\pi t)$

LA SERIE DE FOURIER DE UNA
FUNCION CONVERGENCIA DE UN
SERIE DE FOURIER SERIE DE FO
EN COSENOS EN SENOS INTEGRA

CAPÍTULO 4

Funciones especiales, desarrollos ortogonales y onduletas

Una función es llamada *especial* cuando tiene alguna característica distintiva por lo cual vale la pena determinar y recordar sus propiedades y su comportamiento. Quizá los ejemplos más familiares de funciones especiales son sen(kx) y cos(kx), que son soluciones de una ecuación diferencial importante, $y'' + k^2y = 0$ y también aparecen en muchos otros contextos.

La motivación primordial para estudiar ciertas funciones especiales es que aparecen en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales que modelan muchos fenómenos físicos, y son las series de Fourier elementos necesarios en el equipo de herramientas de cualquiera que desee entender y trabajar con tales modelos.

El análisis inicia con los polinomios de Legendre y las funciones de Bessel. Éstas son importantes por sí mismas, pero también forman un modelo de cómo aproximar funciones especiales y los tipos de propiedades a buscar. Siguiendo éstas, se desarrolla parte de la teoría de Sturm-Liouville, la cual proporcionará un patrón para estudiar ciertos aspectos de las funciones especiales en general, por ejemplo, los desarrollos con las funciones características, de las cuales las series de Fourier son un caso especial. El capítulo termina con una breve introducción a las onduletas, como desarrollos ortogonales.

4.1 Polinomios de Legendre

Hay muchos acercamientos distintos a los polinomios de Legendre. Aquí se inicia con la ecuación diferencial de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \tag{4.1}$$

en donde $-1 \leq x \leq 1$ y λ es un número real. Esta ecuación tiene la forma equivalente

$$[(1 - x^2)y']' + \lambda y = 0,$$

la cual se aplica en la solución de la distribución de temperatura en estado estacionario sobre una esfera sólida.

Busque valores de λ para los cuales la ecuación de Legendre tenga soluciones no triviales. Escriba la ecuación de Legendre como

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{\lambda}{1-x^2}y = 0,$$

concluya que 0 es un punto ordinario. Por tanto, existen soluciones en series de potencias

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Sustituya esta serie en la ecuación diferencial para obtener

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n = 0.$$

En la primera sumatoria, recorra los índices para escribir la última ecuación como

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n = 0.$$

Ahora combine los términos para $n \geq 2$ bajo una sumatoria, escribiendo separadamente los términos $n = 0$ y $n = 1$:

$$2a_2 + 6a_3x - 2a_1x + \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2 + n - \lambda)a_n]x^n = 0.$$

El coeficiente de cada potencia de x debe ser cero, así

$$2a_2 + \lambda a_0 = 0, \tag{4.2}$$

$$6a_3 - 2a_1 + \lambda a_1 = 0, \tag{4.3}$$

y, para $n = 2, 3, \ldots,$

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} - [n(n+1) - \lambda]a_n = 0$$

para los cuales la relación recursiva es

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+1)(n+2)}\, a_n \qquad \text{para } n = 2, 3, \ldots. \tag{4.4}$$

A partir de la ecuación (4.2)

$$a_2 = -\frac{\lambda}{2}a_0.$$

A partir de la ecuación (4.4),

$$a_4 = \frac{6-\lambda}{3\cdot 4}a_2 = -\frac{\lambda}{2}\frac{6-\lambda}{3\cdot 4}a_0 = \frac{-\lambda(6-\lambda)}{4!}a_0,$$

$$a_6 = \frac{20-\lambda}{5\cdot 6}a_4 = \frac{-\lambda(6-\lambda)(20-\lambda)}{6!}a_0,$$

y así sucesivamente. Cada coeficiente de índice par a_{2n} es un múltiplo de a_0 que involucra a n y a λ. Aquí se ha usado la notación factorial, en donde $n!$ es el producto de los enteros de 1 a n, si n es un entero positivo. Por ejemplo, $6! = 720$. Por convención, $0! = 1$.

De la ecuación (4.3),

$$a_3 = \frac{2-\lambda}{6}a_1 = \frac{2-\lambda}{3!}a_1.$$

Entonces, por la relación recursiva (4.4),

$$a_5 = \frac{12-\lambda}{4\cdot 5}a_3 = \frac{(2-\lambda)(12-\lambda)}{5!}a_1,$$

$$a_7 = \frac{30-\lambda}{6\cdot 7}a_5 = \frac{(2-\lambda)(12-\lambda)(30-\lambda)}{7!}a_1,$$

y así sucesivamente. Cada coeficiente de índice impar a_{2n+1} es un múltiplo de a_1, donde también están involucrados n y λ.

De esta manera, escriba la solución

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0\left(1 - \frac{\lambda}{2}x^2 - \frac{\lambda(6-\lambda)}{4!}x^4 - \frac{\lambda(6-\lambda)(20-\lambda)}{6!}x^6 + \cdots\right)$$
$$+ a_1\left(x + \frac{2-\lambda}{3!}x^3 + \frac{(2-\lambda)(12-\lambda)}{5!}x^5 + \frac{(2-\lambda)(12-\lambda)(30-\lambda)}{7!}x^7 + \cdots\right).$$

Las dos series en los paréntesis grandes son linealmente independientes, una contiene sólo potencias pares de x, y la otra sólo potencias impares. Escriba

$$y_e(x) = 1 - \frac{\lambda}{2}x^2 - \frac{\lambda(6-\lambda)}{4!}x^4 - \frac{\lambda(6-\lambda)(20-\lambda)}{6!}x^6 + \cdots$$

y

$$y_o(x) = x + \frac{2-\lambda}{3!}x^3 + \frac{(2-\lambda)(12-\lambda)}{5!}x^5 + \frac{(2-\lambda)(12-\lambda)(30-\lambda)}{7!}x^7 + \cdots.$$

La solución general de la ecuación diferencial de Legendre es

$$y(x) = a_0 y_e(x) + a_1 y_o(x),$$

en donde a_0 y a_1 son constantes arbitrarias. Algunas soluciones particulares son:

con $\lambda = 0$ y $a_1 = 0$,

$$y(x) = a_0.$$

con $\lambda = 2$ y $a_0 = 0$,

$$y(x) = a_1 x.$$

con $\lambda = 6$ y $a_1 = 0$,

$$y(x) = a_0(1 - 3x^2).$$

con $\lambda = 12$ y $a_0 = 0$,

$$y(x) = a_1\left(x - \frac{5}{3}x^3\right).$$

con $\lambda = 20$ y $a_1 = 0$,

$$y(x) = a_0\left(1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4\right),$$

y así sucesivamente.

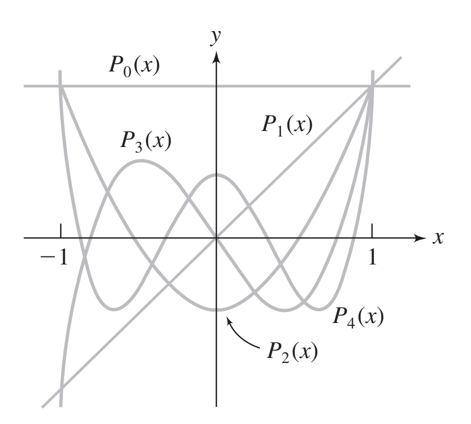


FIGURA 4.1 *Los primeros cinco polinomios de Legendre.*

Los valores de λ para los cuales las soluciones son polinomios (series finitas) son $\lambda = n(n + 1)$ para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Esto no debe sorprenderle ya que la relación recursiva (4.4) contiene $n(n + 1) - \lambda$ en su numerador. Si para algún entero no negativo N elige $\lambda = N(N + 1)$, entonces $a_{N+2} = 0$; así también $a_{N+4} = a_{N+6} = \cdots = 0$, y uno de $y_e(x)$ o $y_o(x)$ contendrá sólo un número finito de términos distintos de cero, así que es un polinomio.

Estas soluciones polinomiales de la ecuación diferencial de Legendre tienen muchas aplicaciones, por ejemplo, en astronomía, análisis de conducción de calor y en aproximaciones de las soluciones de las ecuaciones $f(x) = 0$. Para estandarizar y tabular estas soluciones polinomiales, para cada $\lambda = n(n + 1)$ se eligen a_0 o a_1 de manera que la solución polinomial tenga el valor 1 en $x = 1$. Los polinomios resultantes son llamados los *polinomios de Legendre* y se denotan usualmente por $P_n(x)$. Los primeros seis polinomios de Legendre son

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

En la figura 4.1 se dan algunas de las gráficas de estos polinomios. $P_n(x)$ es de grado n, y sólo contiene potencias pares de x si n es par, y sólo potencias impares si n es impar. Aunque estos polinomios están definidos para todo x real, el intervalo importante para la ecuación diferencial de Legendre es $-1 < x < 1$.

También será útil, tener en mente que si $q(x)$ es cualquier solución polinomial de la ecuación de Legendre con $\lambda = n(n + 1)$, entonces $q(x)$ debe ser un múltiplo constante de $P_n(x)$.

4.1.1 Una función generadora para los polinomios de Legendre

Muchas propiedades de los polinomios de Legendre se pueden deducir usando una *función generadora*, concepto que se desarrolla ahora. Sea

$$L(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}}.$$

Si $L(x, t)$ es desarrollada en una serie de potencias en potencias de t, entonces el coeficiente de t^n es exactamente el n-ésimo polinomio de Legendre.

TEOREMA 4.1 Función generadora para los polinomios de Legendre

$$L(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n. \quad ■$$

Enseguida un argumento que sugiere por qué esto es cierto. Escriba la serie de Maclaurin de $(1-w)^{-1/2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-w}}=1+\frac{1}{2}w+\frac{3}{8}w^2+\frac{15}{48}w^3+\frac{105}{384}w^4+\frac{945}{3840}w^5+\cdots$$

para $-1<w<1$. Ponga $w=2xt-t^2$ para obtener

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=1+\frac{1}{2}(2xt-t^2)+\frac{3}{8}(2xt-t^2)^2+\frac{15}{48}(2xt-t^2)^3$$
$$+\frac{105}{384}(2xt-t^2)^4+\frac{945}{3840}(2xt-t^2)^5+\cdots.$$

Ahora desarrolle cada una de estas potencias de $2xt-t^2$ y agrupe el coeficiente de cada potencia de t en la expresión resultante:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=1+xt-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}x^2t^2-\frac{3}{2}xt^3+\frac{3}{8}t^4+\frac{5}{2}x^3t^3-\frac{15}{4}x^2t^4$$
$$+\frac{15}{8}xt^5-\frac{5}{16}t^6+\frac{35}{8}x^4t^4-\frac{35}{4}x^3t^5+\frac{105}{16}x^2t^6-\frac{35}{16}xt^7$$
$$+\frac{35}{128}t^8+\frac{63}{8}x^5t^5-\frac{315}{16}x^4t^6+\frac{315}{16}x^3t^7-\frac{315}{32}x^2t^8+\frac{315}{128}xt^9-\frac{63}{256}t^{10}+\cdots$$
$$=1+xt+\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}x^2\right)t^2+\left(-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}x^3\right)t^3$$
$$+\left(\frac{3}{8}-\frac{15}{4}x^2+\frac{35}{8}x^4\right)t^4+\left(\frac{15}{8}x-\frac{35}{4}x^3+\frac{63}{8}x^5\right)t^5$$
$$=P_0(x)+P_1(x)t+P_2(x)t^2+P_3(x)t^3+P_4(x)t^4+P_5(x)t^5+\cdots.$$

La función generadora provee una manera eficiente de obtener muchas propiedades de los polinomios de Legendre. Empiece a usarla para probar que

$$P_n(1)=1 \quad \text{y} \quad P_n(-1)=(-1)^n$$

para $n=0,1,2,\ldots$ Primero, haciendo $x=1$

$$L(1,t)=\frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}}=\frac{1}{\sqrt{(1-t)^2}}=\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(1)t^n.$$

Pero, para $-1<t<1$,

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n.$$

Como $1/(1-t)$ tiene sólo un desarrollo de Maclaurin, los coeficientes de estas dos series deben coincidir, así cada $P_n(1)=1$.

Análogamente,

$$L(-1,t) = \frac{1}{\sqrt{1+2t+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1+t)^2}} = \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)t^n.$$

Pero, para $-1 < t < 1$,

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n,$$

así $P_n(-1) = (-1)^n$.

4.1.2 Una relación recursiva para los polinomios de Legendre

Use la función generadora para obtener una relación recursiva para los polinomios de Legendre.

TEOREMA 4.2 ***Relación recursiva para los polinomios de Legendre***

Para cualquier entero positivo n,

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0. \tag{4.5}$$

Prueba Empiece diferenciando la función generadora respecto a t:

$$\frac{\partial L(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2}(1-2xt+t^2)^{-3/2}(-2x+2t) = \frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}}.$$

Ahora observe que

$$(1-2xt+t^2)\frac{\partial L(x,t)}{\partial t} - (x-t)L(x,t) = 0.$$

Al sustituir $L(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$ en la última ecuación obtiene

$$(1-2xt+t^2)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} - (x-t)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = 0.$$

Lleve a cabo las multiplicaciones para escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 2nxP_n(x)t^n + \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)t^n + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} = 0.$$

Rearregle estas series para tener potencias iguales de t en cada sumatoria:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2nxP_n(x)t^n + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)P_{n-1}(x)t^n$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)t^n + \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(x)t^n = 0.$$

Combinando las sumatorias desde $n = 2$, escribiendo los términos para $n = 0$ y $n = 1$ separadamente:

$$P_1(x) + 2P_2(x)t - 2xP_1(x)t - xP_0(x) - xP_1(x)t + P_0(x)t$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+1)P_{n+1}(x) - 2nxP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x) - xP_n(x) + P_{n-1}(x)\right]t^n = 0.$$

Para que esta serie de potencias en t sea cero para todo t en algún intervalo alrededor del 0, el coeficiente de t^n debe ser cero para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Entonces

$$P_1(x) - xP_0(x) = 0,$$
$$2P_2(x) - 2xP_1(x) - xP_1(x) + P_0(x) = 0,$$

y, para $n = 2, 3, \ldots,$

$$(n+1)P_{n+1}(x) - 2nxP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x) - xP_n(x) + P_{n-1}(x) = 0.$$

Esto da

$$P_1(x) = xP_0(x),$$
$$P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3xP_1(x) - P_0(x))$$

y, para $n = 2, 3, \ldots,$

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0.$$

Como esta ecuación también es válida para $n = 1$, establece la relación recursiva para todos los enteros positivos. ■

Después, necesitará conocer el coeficiente de x^n en $P_n(x)$. Se usará la relación recursiva para deducir una fórmula para este número.

TEOREMA 4.3

Para $n = 1, 2, \ldots,$ sea A_n el coeficiente de x^n en $P_n(x)$. Entonces

$$A_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{n!}. \;\blacksquare$$

Por ejemplo,

$$A_1 = 1,\; A_2 = \frac{1 \cdot 3}{2!} = \frac{3}{2}, \quad \text{y} \quad A_3 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} = \frac{5}{2},$$

como lo puede verificar de las expresiones explícitas obtenidas con anterioridad para $P_1(x)$, $P_2(x)$ y $P_3(x)$.

Prueba En la relación recursiva (4.5), la mayor potencia de x que aparece es x^{n+1}, y este término aparece en $P_{n+1}(x)$ y en $xP_n(x)$. Así el coeficiente de x^{n+1} en la relación recursiva es

$$(n+1)A_{n+1} - (2n+1)A_n.$$

Esto debe ser igual a cero (porque el otro lado de la ecuación recursiva es cero). Por tanto,

$$A_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}A_n,$$

y esto se satisface para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Ahora puede trabajar hacia atrás:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \frac{2n+1}{n+1} A_n = \frac{2n+1}{n+1} \frac{2(n-1)+1}{(n-1)+1} A_{n-1} \\ &= \frac{2n+1}{n+1} \frac{2n-1}{n} A_{n-1} \\ &= \frac{2n+1}{n+1} \frac{2n-1}{n} \frac{2(n-2)+1}{(n-2)+1} A_{n-2} \\ &= \frac{2n+1}{n+1} \frac{2n-1}{n} \frac{2n-3}{n-1} A_{n-2} = \cdots = \frac{2n+1}{n+1} \frac{2n-1}{n} \frac{2n-3}{n-1} \cdots \frac{3}{2} A_0. \end{aligned}$$

Pero $A_0 = 1$ como $P_0(x) = 1$, entonces

$$A_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)(2n+1)}{(n+1)!} \tag{4.6}$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$ La conclusión del teorema simplemente establece esta conclusión en términos de A_n en lugar de A_{n+1}. ■

4.1.3 Ortogonalidad de los polinomios de Legendre

Probaremos lo siguiente.

TEOREMA 4.4 ***Ortogonalidad de los polinomios de Legendre en* [−1, 1]**

Si n y m son enteros no negativos, entonces

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = 0 \quad \text{si } n \neq m. \ ■ \tag{4.7}$$

Esta relación con la integral se llama la *ortogonalidad* de los polinomios de Legendre en $[-1, 1]$. Esta clase de comportamiento apareció con las funciones

$$1, \cos(x), \cos(2x), \ldots, \operatorname{sen}(x), \operatorname{sen}(2x), \ldots$$

en el intervalo $[-\pi, \pi]$. La integral, de $-\pi$ a π, del producto de dos de estas funciones (distintas) es cero. Debido a esta propiedad, es posible encontrar los coeficientes de Fourier de una función (recuerde el argumento dado en la sección 2.2). Perseguirá una idea semejante para los polinomios de Legendre después de establecer la ecuación (4.7).

Prueba Empiece con el hecho de que $P_n(x)$ es una solución de la ecuación de Legendre (4.1) para $\lambda = n(n+1)$. En particular, si n y m son enteros no negativos distintos, entonces

$$[(1-x^2)P_n'(x)]' + n(n+1)P_n(x) = 0$$

y

$$[(1-x^2)P_m'(x)]' + m(m+1)P_m(x) = 0.$$

Multiplique la primera ecuación por $P_m(x)$ y la segunda por $P_n(x)$ y reste las ecuaciones resultantes para obtener

$$[(1-x^2)P_n'(x)]'P_m(x) - [(1-x^2)P_m'(x)]'P_n(x) + [n(n+1) - m(m+1)]P_n(x)P_m(x) = 0.$$

Integre esta ecuación:

$$\int_{-1}^{1}[(1-x^2)P_n'(x)]'P_m(x)\,dx - \int_{-1}^{1}[(1-x^2)P_m'(x)]'P_n(x)\,dx$$
$$= [m(m+1)-n(n+1)]\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx.$$

Como $n \neq m$, la ecuación (4.7) será probada al demostrar que el lado izquierdo de la última ecuación es cero. Pero, integrando por partes el lado izquierdo,

$$\int_{-1}^{1}[(1-x^2)P_n'(x)]'P_m(x)\,dx - \int_{-1}^{1}[(1-x^2)P_m'(x)]'P_n(x)\,dx$$
$$= \Big[(1-x^2)P_n'(x)P_m(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(1-x^2)P_n'(x)P_m'(x)\,dx$$
$$-[(1-x^2)P_m'(x)P_n(x)]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}(1-x^2)P_n'(x)P_m'(x)\,dx = 0,$$

y la ortogonalidad de los polinomios de Legendre en $[-1, 1]$ está probada. ■

4.1.4 Series Fourier-Legendre

Suponga que $f(x)$ está definida para $-1 \leq x \leq 1$. Explore la posibilidad de desarrollar $f(x)$ en una serie de polinomios de Legendre:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x). \tag{4.8}$$

Una situación semejante apareció en la sección 2.2, excepto que ahí se quería desarrollar una función definida en $[-\pi, \pi]$ en una serie de senos y cosenos. Aplique el mismo razonamiento que entonces condujo al éxito. Elija un entero no negativo m y multiplique el desarrollo propuesto por $P_m(x)$, y después integre la ecuación resultante, intercambie la serie y la integral:

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx.$$

Debido a la ecuación (4.7), todos los términos en la sumatoria de la derecha son cero, excepto cuando $n = m$. La ecuación anterior se reduce a

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)\,dx = c_m \int_{-1}^{1} P_m^2(x)\,dx.$$

Entonces

$$c_m = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)\,dx}{\int_{-1}^{1} P_m^2(x)\,dx}. \tag{4.9}$$

Tomando como guía la serie de Fourier, el desarrollo de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$ será *la serie de Fourier-Legendre*, o desarrollo de $f(x)$, cuando los coeficientes son elegidos de acuerdo con la ecuación (4.9). Los c_n serán los *coeficientes de Fourier-Legendre* de f.

Como con la serie de Fourier, debe plantear la pregunta de la convergencia de la serie de Fourier-Legendre de una función. Esto se hace en el siguiente teorema, que es semejante en forma al teorema de convergencia de Fourier. Como verá más adelante, esto no es una coincidencia.

TEOREMA 4.5

Sea f suave a pedazos en $[-1, 1]$. Entonces, para $-1 < x < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+) + f(x-)\right),$$

si los c_n' son los coeficientes de Fourier-Legendre de f. ■

Esto significa que bajo las condiciones en f, el desarrollo de Fourier-Legendre de $f(x)$ converge al promedio de los límites laterales de $f(x)$ en x, para $-1 < x < 1$. Esto es a mitad del camino entre el hueco en los extremos de la gráfica en x si $f(x)$ tiene una discontinuidad de salto ahí (figura 4.2). Este comportamiento lo vio antes con la convergencia de la serie (trigonométrica) de Fourier. Si f es continua en x, entonces $f(x+) = f(x-) = f(x)$ y la serie de Fourier-Legendre converge a $f(x)$.

Como un caso especial de los desarrollos de Fourier-Legendre generales, cualquier polinomio $q(x)$ es una combinación lineal de polinomios de Legendre. En el caso de un polinomio, esta combinación lineal se puede obtener resolviendo para x^n en términos de $P_n(x)$ y escribiendo cada potencia de x en $q(x)$ en términos de los polinomios de Legendre.

Por ejemplo, sea

$$q(x) = -4 + 2x + 9x^2.$$

Empiece con

$$x = P_1(x)$$

y después resuelva para x^2 en $P_2(x)$:

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$

así

$$x^2 = \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x).$$

Entonces

$$\begin{aligned} -4 + 2x + 9x^2 &= -4P_0(x) + 2P_1(x) + 9\left(\frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x)\right) \\ &= -P_0(x) + 2P_1(x) + 6P_2(x). \end{aligned}$$

Ahora puede probar el resultado, quizá sorprendente, que todo polinomio de Legendre es ortogonal a todo polinomio de grado menor.

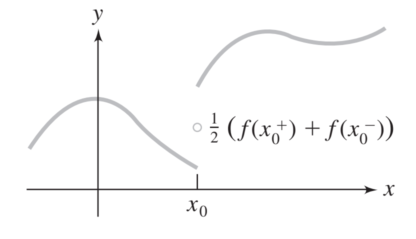


FIGURA 4.2 *Convergencia de un desarrollo de Fourier-Legendre en una discontinuidad de salto de la función.*

TEOREMA 4.6

Sea $q(x)$ un polinomio de grado m, y sea $n > m$. Entonces

$$\int_{-1}^{1} q(x) P_n(x)\, dx = 0. \quad ■$$

Prueba Escriba

$$q(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \cdots + c_m P_m(x).$$

Entonces

$$\int_{-1}^{1} q(x) P_n(x)\, dx = \sum_{k=0}^{m} c_k \int_{-1}^{1} P_k(x) P_n(x)\, dx = 0,$$

como para $0 \leq k \leq m < n$, $\int_{-1}^{1} P_k(x)P_n(x)\, dx = 0$. ■

Este resultado será de utilidad muy pronto para obtener información acerca de los ceros de los polinomios de Legendre.

4.1.5 Cálculo de los coeficientes de Fourier-Legendre

La ecuación (4.9) para los coeficientes de Fourier-Legendre de f tiene $\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx$ en el denominador. Se deducirá una expresión sencilla para esta integral.

TEOREMA 4.7

Si n es un entero no negativo, entonces

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}. \quad ■$$

Prueba Como antes, denote el coeficiente de x^n en $P_n(x)$ como A_n. También denote

$$p_n = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx.$$

El término de mayor grado en $P_n(x)$ es $A_n x^n$, mientras el término de mayor grado en $P_{n-1}(x)$ es $A_{n-1}x^{n-1}$. Esto significa que todos los términos involucrados x^n se cancelan en el polinomio

$$q(x) = P_n(x) - \frac{A_n}{A_{n-1}} x P_{n-1},$$

y así $q(x)$ tiene grado al menos $n - 1$. Escriba

$$P_n(x) = q(x) + \frac{A_n}{A_{n-1}} x P_{n-1}(x).$$

Entonces

$$p_n = \int_{-1}^{1} P_n(x) P_n(x)\, dx = \int_{-1}^{1} P_n(x) \left(q(x) + \frac{A_n}{A_{n-1}} x P_{n-1}(x) \right) dx$$

$$= \frac{A_n}{A_{n-1}} \int_{-1}^{1} x P_n(x) P_{n-1}(x)\, dx,$$

ya que $\int_{-1}^{1} q(x)P_n(x)\,dx = 0$. Ahora según la relación recursiva (4.5) escriba

$$xP_n(x) = \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x).$$

Entonces

$$xP_n(x)P_{n-1}(x) = \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}^2(x),$$

así

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{A_n}{A_{n-1}}\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n-1}(x)\,dx \\ &= \frac{A_n}{A_{n-1}}\left[\frac{n+1}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)P_{n-1}(x)\,dx + \frac{n}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)\,dx\right]. \end{aligned}$$

Como $\int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)P_{n-1}(x)\,dx = 0$, queda

$$p_n = \frac{A_n}{A_{n-1}}\frac{n}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2\,dx = \frac{A_n}{A_{n-1}}\frac{n}{2n+1}p_{n-1}.$$

Usando el valor antes obtenido para A_n,

$$p_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}{n!}\,\frac{(n-1)!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}\,\frac{n}{2n+1}p_{n-1} = \frac{2n-1}{2n+1}p_{n-1}.$$

Ahora trabaje hacia atrás:

$$p_1 = \frac{1}{3}p_0 = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} P_0(x)^2\,dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} dx = \frac{2}{3},$$

$$p_2 = \frac{3}{5}p_1 = \frac{3}{5}\frac{2}{3} = \frac{2}{5}, \quad p_3 = \frac{5}{7}p_2 = \frac{2}{7}, \quad p_4 = \frac{7}{9}p_3 = \frac{2}{9},$$

y así sucesivamente. Por inducción,

$$p_n = \frac{2}{2n+1},$$

lo que prueba el teorema. ■

Esto significa que el coeficiente de Fourier-Legendre de f es

$$c_n = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx}{\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx} = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx.$$

EJEMPLO 4.1

Sea $f(x) = \cos(\pi x/2)$ para $-1 \le x \le 1$. Entonces f y f' son continuas en $[-1, 1]$, así el desarrollo de Fourier-Legendre de f converge a $\cos(\pi x/2)$ para $-1 < x < 1$. Los coeficientes son

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)P_n(x)\,dx.$$

Debido a que $\cos(x/2)$ es una función par, $\cos(\pi x/2)P_n(x)$ es una función impar para n impar. Esto significa que $c_n = 0$ si n es impar. Sólo necesita calcular los coeficientes de índice par. Algunos de éstos son

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = \frac{2}{\pi},$$

$$c_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\frac{1}{2}(3x^2-1)\,dx = 10\frac{\pi^2-12}{\pi^3},$$

$$c_4 = \frac{9}{2}\int_{-1}^{1}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right)dx = 18\frac{\pi^4+1680-180\pi^2}{\pi^5}.$$

Entonces, para $-1 < x < 1$,

$$\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{2}{\pi} + 10\frac{\pi^2-12}{\pi^3}P_2(x) + 18\frac{\pi^4+1680-180\pi^2}{\pi^5}P_4(x) + \cdots$$

$$= \frac{2}{\pi} + 5\frac{\pi^2-12}{\pi^3}(3x^2-1) + \frac{9}{4}\frac{\pi^4+1680-180\pi^2}{\pi^5}\left(35x^4-30x^2+3\right) + \cdots.$$

Aunque en este ejemplo, $f(x)$ es lo suficientemente simple para calcular exactamente algunos coeficientes de Fourier-Legendre, en una aplicación típica usaría un paquete de software para calcular los coeficientes. Los términos calculados dan la aproximación

$$\cos(\pi x/2) \approx 0.63662 - 0.34355(3x^2-1) + 0.0064724\left(35x^4-30x^2+3\right) + \cdots$$
$$= 0.99959 - 1.2248x^2 + 0.22653x^4 + \cdots.$$

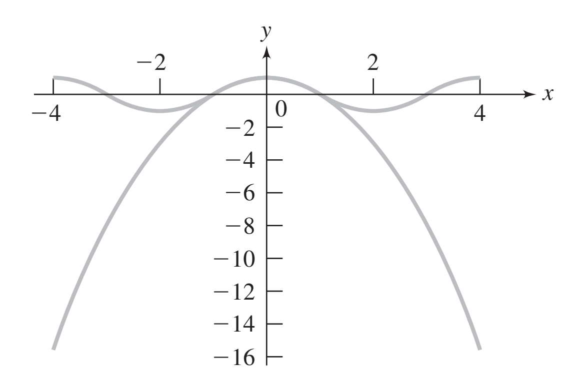


FIGURA 4.3 *Comparación de* $\cos(\pi x/2)$ *con una suma parcial de una serie en el desarrollo en polinomios de Legendre.*

La figura 4.3 muestra la gráfica de $\cos(\pi x/2)$ y los tres primeros términos distintos de cero de su desarrollo de Fourier-Legendre. Esta serie concuerda muy bien con $\cos(\pi x/2)$ para $-1 < x < 1$, pero las dos divergen una de la otra fuera de este intervalo. Esto enfatiza el hecho de que el desarrollo Fourier-Legendre es sólo para $-1 \le x \le 1$. ■

4.1.6 Los ceros de los polinomios de Legendre

$P_0(x) = 1$ y no tiene ceros, mientras que $P_1(x) = x$ tiene exactamente un cero, a saber $x = 0$. $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ tiene dos ceros reales, $\pm 1/\sqrt{3}$. $P_3(x)$ tiene tres ceros reales, a saber 0 y $\pm\sqrt{3/5}$. Después de $n = 3$,

encontrar los ceros de los polinomios de Legendre rápidamente se vuelve complicado. Por ejemplo, $P_4(x)$ tiene cuatro ceros reales, y son

$$\pm\frac{1}{35}\sqrt{\left(525+70\sqrt{30}\right)} \quad \text{y} \quad \pm\frac{1}{35}\sqrt{\left(525-70\sqrt{30}\right)}.$$

Estos son aproximadamente ±0.8611 y ±0.3400.

Cada $P_n(x)$ recién examinado tiene n raíces reales, todas están en el intervalo $(-1, 1)$. Se probará que esto es cierto para todos los polinomios de Legendre. Esto incluye $P_0(x)$, que por supuesto no tiene raíces. La prueba de esta aseveración se basa en la ortogonalidad de los polinomios de Legendre.

TEOREMA 4.8 **Los ceros de $P_n(x)$**

Sea n un entero positivo. Entonces $P_n(x)$ tiene n raíces reales y distintas, todas en $(-1, 1)$. ■

Prueba Primero probará que si $P_n(x)$ tiene una raíz real x_0 en $(-1, 1)$, entonces esta raíz debe ser simple (es decir, no repetida). Suponga que x_0 es una raíz repetida. Entonces $P_n(x_0) = P'_n(x_0) = 0$. Entonces $P_n(x)$ es una solución del problema con valor inicial

$$((1-x^2)y')' + n(n+1)y = 0; \qquad y(x_0) = y'(x_0) = 0.$$

Pero este problema tiene una solución única, y la función trivial $y(x) = 0$ es una solución. Esto implica que $P_n(x)$ es la función cero en un intervalo que contiene a x_0, y esto es falso. Así $P_n(x)$ no puede tener una raíz repetida en $(-1, 1)$.

Ahora suponga que n es un entero positivo. Entonces $P_n(x)$ y $P_0(x)$ son ortogonales en $[-1, 1]$, así

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_0(x)\,dx = \int_{-1}^{1} P_n(x)\,dx = 0.$$

Por tanto, $P_n(x)$ no puede ser estrictamente positivo o estrictamente negativo en $(-1, 1)$, ya que debe cambiar de signo en este intervalo. Como $P_n(x)$ es continuo, debe existir algún x_1 en $(-1, 1)$ con $P_n(x_1) = 0$. Hasta aquí, esto da un cero real en este intervalo.

Sean $x_1, \ldots, x_m$ todos los ceros de $P_n(x)$ en $(-1, 1)$, con $-1 < x_1 < \cdots < x_m < 1$. Entonces $1 \leq m \leq n$. Suponga que $m < n$. Entonces el polinomio

$$q(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)$$

tiene grado menor que n, y es ortogonal a $P_n(x)$:

$$\int_{-1}^{1} q(x)P_n(x)\,dx = 0.$$

Pero $q(x)$ y $P_n(x)$ cambian de signo exactamente en los mismos puntos en $(-1, 1)$, a saber en $x_1, \ldots, x_m$. Por tanto, $q(x)$ y $P_n(x)$ son ambos del mismo signo en cada intervalo $(-1, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_m, 1)$ o de signo opuesto en cada uno de estos intervalos. Esto significa que $q(x)P_n(x)$ es estrictamente positiva o estrictamente negativa en $(-1, 1)$ excepto en un número finito de puntos $x_1, \ldots, x_m$ donde este producto vale cero. Pero entonces la $\int_{-1}^{1} q(x)P_n(x)\,dx$ debe ser o positiva o negativa, lo cual es una contradicción.

Se concluye que $m = n$, de donde $P_n(x)$ tiene n ceros simples en $(-1, 1)$. ■

Si se remite a las gráficas de $P_0(x)$ hasta $P_4(x)$ en la figura 4.1, verá que cada uno de estos polinomios de Legendre cruza el eje x exactamente n veces entre -1 y 1.

4.1.7 Fórmulas de la derivada y la integral para $P_n(x)$

Se deducirán dos fórmulas adicionales para $P_n(x)$ que algunas veces son utilizadas para analizar más ampliamente los polinomios de Legendre. La primera da el n-ésimo polinomio de Legendre en términos de la n-ésima derivada de $(x^2 - 1)^n$.

TEOREMA 4.9 ***Fórmula de Rodrigues***

Para $n = 0, 1, 2, \ldots,$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}((x^2 - 1)^n). \blacksquare$$

En este enunciado, se entiende que la derivada de orden cero de una función es la misma función. Así, cuando $n = 0$, la fórmula propuesta da

$$\frac{1}{2^0 0!} \frac{d^0}{dx^0}((x^2 - 1)^0) = (x^2 - 1)^0 = 1 = P_0(x).$$

para $n = 1$ da

$$\frac{1}{2(1!)} \frac{d}{dx}(x^2 - 1) = \frac{1}{2}(2x) = x = P_1(x),$$

y para $n = 2$, da

$$\frac{1}{2^2(2!)} \frac{d^2}{dx^2}((x^2 - 1)^2) = \frac{1}{8}(12x^2 - 4) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} = P_2(x).$$

Prueba Sea $w = (x^2 - 1)^n$. Entonces

$$w' = n(x^2 - 1)^{n-1}(2x).$$

Entonces

$$(x^2 - 1)w' - 2nxw = 0.$$

Si se deriva esta ecuación $k + 1$ veces, es un ejercicio rutinario verificar que obtiene

$$(x^2 - 1)\frac{d^{k+2}w}{dx^{k+2}} - (2n - 2k - 2)x\frac{d^{k+1}w}{dx^{k+1}}$$

$$- [2n + (2n - 2) + \cdots + (2n - 2(k - 1)) + 2n - 2k)]\frac{d^k w}{dx^k} = 0.$$

Haciendo $k = n$, obtiene

$$(x^2 - 1)\frac{d^{n+2}w}{dx^{n+2}} + 2x\frac{d^{n+1}w}{dx^{n+1}}$$

$$- [2n + (2n - 2) + \cdots + (2n - 2(n - 1)) + (2n - 2n)]\frac{d^n w}{dx^n} = 0.$$

La cantidad entre corchetes en esta ecuación es

$$2n + (2n - 2) + \cdots + 2,$$

que es la misma que

$$2(1 + 2 + \cdots + n).$$

Pero esta cantidad es igual a $n(n + 1)$. (Recuerde que $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2}n(n + 1)$). Por tanto,

$$(x^2 - 1)\frac{d^{n+2}w}{dx^{n+2}} + 2x\frac{d^{n+1}w}{dx^{n+1}} - n(n+1)\frac{d^n w}{dx^n} = 0.$$

Multiplicando esta ecuación por -1,

$$(1 - x^2)\frac{d^{n+2}w}{dx^{n+2}} - 2x\frac{d^{n+1}w}{dx^{n+1}} + n(n+1)\frac{d^n w}{dx^n} = 0.$$

Pero esto significa que $d^n w/dx^n$ es una solución de la ecuación de Legendre con $\lambda = n(n + 1)$. Más aún, la derivación repetida del polinomio $(x^2 - 1)^n$ produce un polinomio. Por tanto, la solución polinomial $d^n w/dx^n$ debe ser una constante múltiplo de $P_n(x)$:

$$\frac{d^n w}{dx^n} = cP_n(x). \tag{4.10}$$

Ahora, el término de mayor grado en $(x^2 - 1)^n$ es x^{2n}, y la n-ésima derivada de x^{2n} es

$$2n(2n-1)\cdots(n+1)x^n.$$

Por tanto, el coeficiente de la mayor potencia de x en $d^n w/dx^n$ es $2n(2n - 1) \cdots (n + 1)$. El término de mayor orden en $cP_n(x)$ es cA_n, donde A_n es el coeficiente de x^n en $P_n(x)$. Sabe que A_n, de donde la ecuación (4.10) da

$$2n(2n-1)\cdots(n+1) = cA_n = c\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}.$$

Entonces

$$c = \frac{n!(n+1)\cdots(2n-1)(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)} = \frac{(2n)!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$$
$$= 2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n = 2^n n!.$$

Pero ahora la ecuación (4.10) se convierte en

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = 2^n n! P_n(x),$$

que es equivalente a la fórmula de Rodrigues. ■

Ahora deducirá una fórmula para la integral de $P_n(x)$.

TEOREMA 4.10

Para $n = 0, 1, 2, \ldots,$

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x + \sqrt{x^2-1}\cos(\theta)\right)^n d\theta. \; ■$$

Por ejemplo, con $n = 0$ obtiene

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta = 1 = P_0(x).$$

Con $n = 1$ obtiene

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos(\theta)\right)d\theta = x = P_1(x),$$

y con $n = 2$ obtiene

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos(\theta)\right)^2 d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x^2+2x\sqrt{x^2-1}\cos(\theta)+(x^2-1)\cos^2(\theta)\right)d\theta \\
&= \frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2} = P_2(x).
\end{aligned}$$

Prueba Sea

$$Q_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos(\theta)\right)^n d\theta.$$

La estrategia detrás de la prueba es determinar que Q_n satisface la misma relación recursiva que los polinomios de Legendre. Como $Q_0 = P_0$ y $Q_1 = P_1$, esto implicará que $Q_n = P_n$ para todo entero no negativo n. Prosiga:

$$\begin{aligned}
&(n+1)Q_{n+1}(x)-(2n+1)xQ_n(x)+nQ_{n-1}(x) \\
&= \frac{n+1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos(\theta)\right)^{n+1}d\theta \\
&\quad -\frac{2n+1}{\pi}\int_0^{\pi}x\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos(\theta)\right)^{n}d\theta \\
&\quad +\frac{n}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos(\theta)\right)^{n-1}d\theta.
\end{aligned}$$

Después de un cálculo directo pero largo, encuentre que

$$\begin{aligned}
&(n+1)Q_{n+1}(x)-(2n+1)xQ_n(x)+nQ_{n-1}(x) \\
&= \frac{n}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos(\theta)\right)^{n-1}(1-x^2)\,\mathrm{sen}^2(\theta)\,d\theta \\
&\quad +\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos(\theta)\right)^{n}\sqrt{x^2-1}\cos(\theta)\,d\theta.
\end{aligned}$$

Integre la segunda integral por partes, con $u = \left(x+\sqrt{x^2-1}\cos(\theta)\right)^n$ y $dv = \sqrt{x^2-1}\cos(\theta)\,d\theta$ para obtener

$$\begin{aligned}
&(n+1)Q_{n+1}(x)-(2n+1)xQ_n(x)+nQ_{n-1}(x) \\
&= \frac{n}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos(\theta)\right)^{n-1}(1-x^2)\,\mathrm{sen}^2(\theta)\,d\theta \\
&\quad +\left[\frac{1}{\pi}\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos(\theta)\right)^{n}\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{sen}(\theta)\right]_0^{\pi} \\
&\quad -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{sen}(\theta)n\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos(\theta)\right)^{n-1}\sqrt{x^2-1}(-\mathrm{sen}(\theta))\,d\theta \\
&= 0,
\end{aligned}$$

completando la prueba. ■

SECCIÓN 4.1 PROBLEMAS

1. Para $n = 0, 1, 3, 4, 5$, verifique por sustitución que $P_n(x)$ es una solución de la ecuación de Legendre correspondiente a $\lambda = n(n + 1)$.

2. Use la relación recursiva (teorema 4.2) y la lista de $P_0(x), \ldots, P_5(x)$ dada con anterioridad para determinar $P_6(x)$ hasta $P_{10}(x)$. Dibuje las gráficas de estas funciones y observe la localización de sus ceros en $[-1, 1]$.

3. Use la fórmula de Rodrigues para obtener $P_1(x)$ hasta $P_5(x)$.

4. Use el teorema 4.10 para obtener $P_3(x)$, $P_4(x)$ y $P_5(x)$.

5. Puede probarse que

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}.$$

Use esta fórmula para generar $P_0(x)$ hasta $P_5(x)$. El símbolo $[n/2]$ denota el máximo entero menor que $n/2$.

6. Pruebe que

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{d^k}{dx^k}[(x+1)^n] \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}[(x-1)^n].$$

Sugerencia: Escriba $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ en la fórmula de Rodrigues.

7. Sea n un entero no negativo. Use la reducción de orden y el hecho de que $P_n(x)$ es una solución de la ecuación de Legendre con $\lambda = n(n + 1)$ para obtener una segunda solución linealmente independiente:

$$Q_n(x) = P_n(x) \int \frac{1}{[P_n(x)]^2(1-x^2)}\, dx.$$

8. Use el resultado del problema 7 para probar que

$$Q_0(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

$$Q_1(x) = 1 - \frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

y

$$Q_2(x) = \frac{1}{4}(3x^2-1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{3}{2}x$$

para $-1 < x < 1$.

9. El potencial gravitacional en un punto P: (x, y, z) debido a una unidad de masa en (x_0, y_0, z_0) es

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}.$$

Para algunos propósitos (tales como en astronomía) esto es conveniente para desarrollar $\varphi(x, y, z)$ en potencias de r o $1/r$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Para hacer esto, introduzca el ángulo mostrado en la figura 4.4. Sea $d = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ y $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

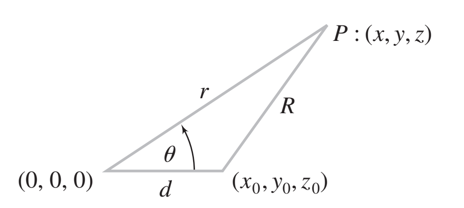


FIGURA 4.4

(a) Use la ley de los cosenos para escribir

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{d\sqrt{1 - 2(r/d)\cos(\theta) + (r/d)^2}}.$$

(b) A partir de la discusión de la función generadora para los polinomios de Legendre, recuerde que, si $1/\sqrt{1 - 2at + t^2}$ es desarrollado en serie alrededor de 0, converge para $|t| < 1$, entonces el coeficiente de t^n es $P_n(a)$.

(c) Si $r < d$, sean $a = \cos(\theta)$ y $t = r/d$ para obtener

$$\varphi(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{d^{n+1}} P_n(\cos(\theta)) r^n.$$

(d) Si $r > d$, pruebe que

$$\varphi(r) = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} d^n P_n(\cos(\theta)) r^{-n}.$$

10. Pruebe que $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) P_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

11. Sea n un entero no negativo. Pruebe que

$$P_{2n+1}(0) = 0 \quad \text{y} \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

12. Desarrolle cada uno de los siguientes polinomios en una serie de polinomios de Legendre:

(a) $1 + 2x - x^2$

(b) $2x + x^2 - 5x^3$

(c) $2 - x^2 + 4x^4$

En cada problema del 13 al 18, encuentre los primeros cinco coeficientes del desarrollo de Fourier-Legendre de la función. Dibuje la gráfica de la función y la suma de los primeros cinco términos de este desarrollo en el mismo conjunto de ejes, para $-3 \le x \le 3$.

El desarrollo es válido sólo en $[-1, 1]$, pero es instructivo ver cómo las sumas parciales del desarrollo de Fourier-Legendre no tienen relación en general fuera de este intervalo.

13. $f(x) = \text{sen}(\pi x/2)$
14. $f(x) = e^{-x}$
15. $f(x) = \text{sen}^2(x)$
16. $f(x) = \cos(x) - \text{sen}(x)$
17. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } -1 \le x \le 0 \\ 1 & \text{para } 0 < x \le 1 \end{cases}$
18. $f(x) = (x+1)\cos(x)$

4. 2 Funciones de Bessel

Ahora se desarrollará la segunda clase de función especial usada para introducir el tópico general de funciones especiales.

La ecuación diferencial de segundo orden

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

es llamada la ecuación de Bessel de orden ν. Así el término *orden* aquí se usa en dos sentidos, la ecuación diferencial es de segundo orden, pero por tradición se dice que la ecuación tiene orden v para referirse al parámetro v que aparece en el coeficiente de y.

Mediante el método de Frobenius se puede encontrar una solución en serie

$$y(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(1+\nu)(2+\nu)\cdots(n+\nu)} x^{2n+\nu},$$

en donde c_0 es una constante distinta de cero y $\upsilon \ge 0$. Esta solución es válida en algún intervalo $(0, R)$, que depende de ν.

Será útil escribir esta solución en términos de la función gamma que se desarrolla ahora.

4.2.1 La función gamma

Para $x > 0$, la *función gamma* Γ está definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Esta integral converge para todo $x > 0$. La función gamma tiene una historia fascinante y muchas propiedades interesantes. Para este caso, la más útil es la siguiente:

TEOREMA 4.11 ***Propiedad factorial de la función gamma***

Si $x > 0$, entonces

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Prueba Si $0 < a < b$, entonces integre por partes, con $u = t^x$ y $dv = e^{-t}\,dt$, para obtener

$$\int_a^b t^x e^{-t}\,dt = \left[t^x(-e^{-t})\right]_a^b - \int_a^b x t^{x-1}(-1)e^{-t}\,dt$$

$$= -b^x e^{-b} + a^x e^{-a} + x\int_a^b t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Tome el límite de esta ecuación conforme $a \to 0+$ y $b \to \infty$ para obtener

$$\int_0^{\infty} t^x e^{-t}\,dt = \Gamma(x+1) = x\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt = x\Gamma(x). \quad \blacksquare$$

La razón por la cual ésta se llama *propiedad factorial* puede verse haciendo $x = n$, un entero positivo. Repitiendo la aplicación del teorema, obtiene

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n\Gamma((n-1)+1) = n(n-1)\Gamma(n-1)\\ &= n(n-1)\Gamma((n-2)+1) = n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)\\ &= \cdots = n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1)\Gamma(1) = n!\Gamma(1).\end{aligned}$$

Pero

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1,$$

de manera que

$$\Gamma(n+1) = n!$$

para cualquier entero positivo n. Esta es la razón para el término *propiedad factorial* de la función gamma.

Es posible extender $\Gamma(x)$ a valores negativos (pero no enteros) de x usando la propiedad factorial. Para $x > 0$, escriba

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1). \tag{4.11}$$

Si $-1 < x < 0$, entonces $x + 1 > 0$ así $\Gamma(x + 1)$ está definida y use el lado derecho de la ecuación (4.11) para definir $\Gamma(x)$.

Una vez que ha extendido $\Gamma(x)$ a $-1 < x < 0$, puede permitir $-2 < x < -1$. Entonces $-1 < x + 1 < 0$ de manera que $\Gamma(x + 1)$ ha sido definida y puede usar nuevamente la ecuación (4.11) para definir $\Gamma(x)$. En este camino puede avanzar hacia la izquierda a lo largo de la recta real, definiendo $\Gamma(x)$ en $(-n-1, -n)$ en cuanto ha sido definida en el intervalo $(-n, -n + 1)$ inmediatamente para la derecha.

Por ejemplo,

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right) = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

y

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{-\frac{3}{2}}\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right) = -\frac{2}{3}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

La figura 4.5(a) muestra una gráfica de $y = \Gamma(x)$ para $0 < x < 5$. En las figuras 4.5(b), (c) y (d) se dan las gráficas para $-1 < x < 0$, $-2 < x < -1$, y $-3 < x < -2$, respectivamente

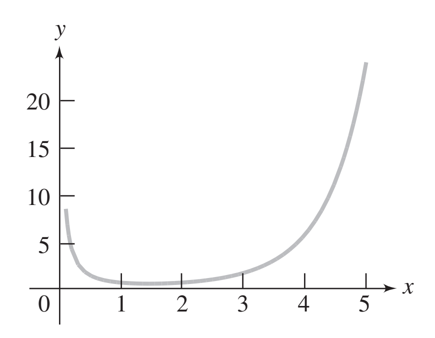


FIGURA 4.5(a) $\Gamma(x)$ *para* $0 < x < 5$.

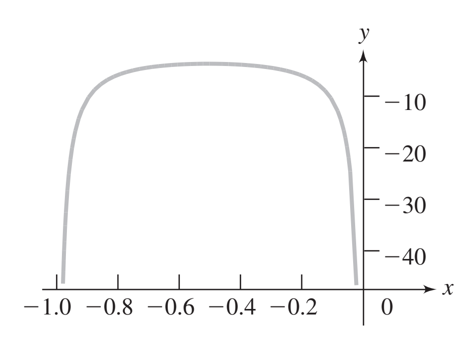


FIGURA 4.5(b) $\Gamma(x)$ *para* $-1 < x < 0$.

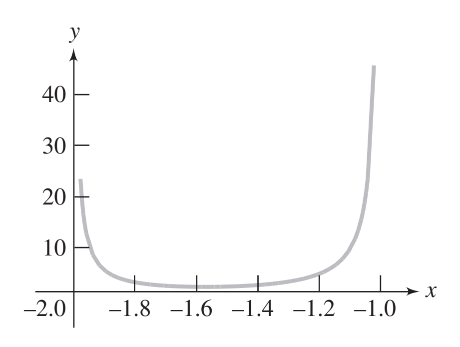


FIGURA 4.5(c) $\Gamma(x)$ *para* $-2 < x < -1$.

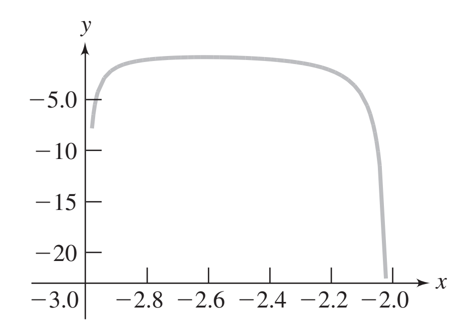


FIGURA 4.5(d) $\Gamma(x)$ *para* $-3 < x < -2$.

4.2.2 Funciones de Bessel de la primera clase y soluciones de la ecuación de Bessel

Ahora regrese a la solución de Frobenius $y(x)$ de la ecuación de Bessel dada arriba. Parte del denominador en esta solución es

$$(1+\nu)(2+\nu)\cdots(n+\nu),$$

en la cual suponga que $\nu \geq 0$. Ahora use la propiedad factorial de la función gamma para escribir

$$\begin{aligned}\Gamma(n+\nu+1) = (n+\nu)\Gamma(n+\nu) &= (n+\nu)(n+\nu-1)\Gamma(n+\nu-1)\\ &= \cdots = (n+\nu)(n+\nu-1)\cdots(n+\nu-(n-1))\Gamma(n+\nu-(n-1))\\ &= (1+\nu)(2+\nu)\cdots(n-1+\nu)(n+\nu)\Gamma(\nu+1).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$(1+\nu)(2+\nu)\cdots(n+\nu) = \frac{\Gamma(n+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)}$$

y escriba la solución como

$$y(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\nu+1)}{2^{2n} n! \Gamma(n+\nu+1)} x^{2n+\nu}.$$

Es habitual elegir

$$c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}.$$

para obtener la solución denotaremos como $J_\nu(x)$:

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu} n! \Gamma(n+\nu+1)} x^{2n+\nu}.$$

J_ν es llamada una *función de Bessel de la primera clase de orden* ν. La serie que define $J_\nu(x)$ converge para todo x.

Debido a que la ecuación de Bessel es de segundo orden (como una ecuación diferencial), es necesaria una segunda solución, linealmente independiente de J_ν, para escribir la solución general. La ecuación indicial de la ecuación de Bessel es $r^2 - \nu^2 = 0$, con raíces $\pm\nu$. La clave radica en la diferencia, 2ν, entre estas raíces. Omitiendo los detalles del análisis, aquí están las conclusiones.

1. Si 2ν no es un entero, entonces J_ν y $J_{-\nu}$ son linealmente independientes (ninguna es un múltiplo constante de la otra), y la solución general de la ecuación de Bessel de orden ν es

$$y(x) = aJ_\nu(x) + bJ_{-\nu}(x),$$

con a y b constantes arbitrarias.

2. Si 2ν es un entero positivo impar, por ejemplo $2\nu = 2n + 1$, entonces $\nu = n + \frac{1}{2}$ para algún entero positivo n. En este caso, J_ν y $J_{-\nu}$ siguen siendo linealmente independientes. Se puede probar que en este caso $J_{n+1/2}(x)$ y $J_{-n-1/2}(x)$ pueden expresarse en forma cerrada como una suma finita de términos que involucran raíces cuadradas, senos y cosenos. Por ejemplo, manipulando la serie para $J_\nu(x)$, se encuentra que

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\text{sen}(x), \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x), \quad J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\frac{\text{sen}(x)}{x} - \cos(x)\right],$$

y

$$J_{-3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[-\,\text{sen}(x) - \frac{\cos(x)}{x}\right].$$

En este caso, la solución general de la ecuación de Bessel de orden ν es

$$y(x) = aJ_{n+1/2}(x) + bJ_{-n-1/2}(x),$$

con a y b constantes arbitrarias.

3. 2ν es un entero pero no es de la forma $n + \frac{1}{2}$ para cualquier entero positivo n. En este caso, $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son soluciones de la ecuación de Bessel, pero son linealmente dependientes. Uno puede verificar a partir de la serie que en este caso,

$$J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x).$$

En este caso debe construir una segunda solución de la ecuación de Bessel, linealmente independiente de $J\nu(x)$. Esto conduce a las funciones de Bessel de segunda clase.

4.2.3 Funciones de Bessel de segunda clase

Otra solución para la ecuación de Bessel para el caso $\nu = 0$. Era

$$y_2(x) = J_0(x)\ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2} \emptyset(n) x^{2n},$$

en donde

$$\emptyset(n) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

En lugar de usar esta solución como está escrita, es habitual usar una combinación lineal de $y_2(x)$ y $J_0(x)$, la cual, por supuesto, será una solución. Esta combinación se denota como $Y_0(x)$ y está definida para $x > 0$ por

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[y_2(x) + (\gamma - \ln(2))J_0(x)\right],$$

donde γ es la constante de Euler, definida por

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(\emptyset(n) - \ln(n)) = 0.577215664901533\ldots.$$

J_0 y Y_0 son linealmente independientes debido al término ln(x) en $Y_0(x)$, y por tanto, la solución general de la ecuación de Bessel de orden cero es

$$y(x) = aJ_0(x) + bY_0(x),$$

con a y b constantes arbitrarias. Y_0 es llamada *función de Bessel de segunda clase de orden cero*. Con la elección hecha para las constantes en la definición de Y_0, esta función también se llama *función de Neumann de orden cero*.

Si ν es un entero positivo, a saber $\nu = n$, en una deducción semejante a la de $Y_0(x)$, pero con más detalles en los cálculos llega a la segunda solución

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi}\left[J_n(x)\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}[\emptyset(k) + \emptyset(k+1)]}{2^{2k+n+1}k!(k+n)!} x^{2k+n}\right]$$
$$- \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{2^{2k-n+1}k!} x^{2k-n}.$$

Esto coincide con $Y_0(x)$ si $n = 0$, con la advertencia que en este caso no aparece la última sumatoria.

La solución general de la ecuación de Bessel de orden un entero positivo n es por tanto

$$y(x) = aJ_n(x) + bY_n(x).$$

Hasta aquí, $Y_\nu(x)$ para ν un entero no negativo. No es necesaria esta función de Bessel de segunda clase para la solución general de la ecuación de Bessel en otros casos. Sin embargo, es posible extender esta definición de $Y_\nu(x)$ para incluir todos los valores reales de ν haciendo

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\nu\pi)}[J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)].$$

Para cualquier entero no negativo n, muestre que

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \to n} Y_\nu(x).$$

Y_ν es *función de orden ν de Neumann-Bessel*. Esta función es linealmente independiente de $J_\nu(x)$ para $x > 0$, y permite escribir la solución general de la ecuación de Bessel de orden ν en todos los casos como

$$y(x) = aJ_\nu(x) + bY_\nu(x).$$

En las figuras 4.6 y 4.7 se muestran las gráficas de algunas funciones de Bessel de ambas clases.

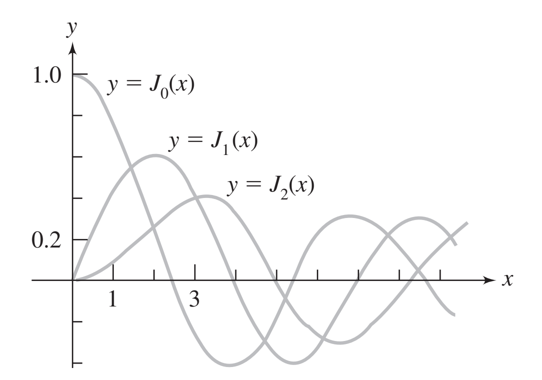


FIGURA 4.6 *Funciones de Bessel de la primera clase.*

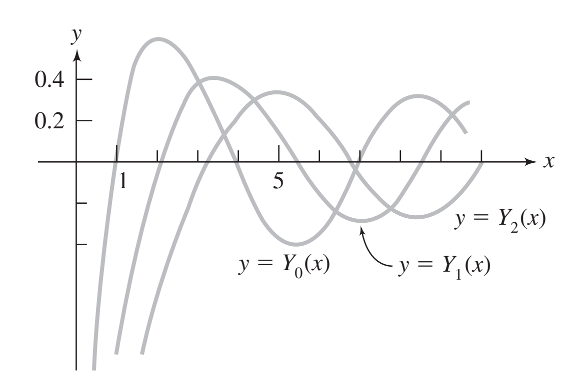


FIGURA 4.7 *Funciones de Bessel de la segunda clase.*

Es interesante observar que las soluciones de la ecuación de Bessel ilustran todos los casos del teorema de Frobenius. El caso 1 ocurre si 2ν no es un entero, el caso 2 si $\nu = 0$, el caso 3 sin término logaritmo si $\nu = n + \frac{1}{2}$ para algún entero no negativo n, y el caso 3 con un término logaritmo si ν es un entero positivo.

En las aplicaciones y los modelos de sistemas físicos, la ecuación de Bessel aparece en forma disfrazada, requiriendo de un cambio de variables para escribir la solución en términos de las funciones de Bessel.

EJEMPLO 4.2

Considere la ecuación diferencial

$$9x^2y'' - 27xy' + (9x^2 + 35)y = 0.$$

Sea $y = x^2u$ y calcule

$$y' = 2xu + x^2u', \quad y'' = 2u + 4xu' + x^2u''.$$

Sustituya éstos en la ecuación diferencial para obtener

$$18x^2u + 36x^3u' + 9x^4u'' - 54x^2u - 27x^3u' + 9x^4u + 35x^2u = 0.$$

Agrupe términos para escribir

$$9x^4u'' + 9x^3u' + (9x^4 - x^2)u = 0.$$

Divida entre $9x^2$ para obtener

$$x^2u'' + xu' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)u = 0,$$

que es la ecuación de Bessel de orden $\nu = \frac{1}{3}$. Como 2ν no es un entero, la solución general para u es

$$u(x) = aJ_{1/3}(x) + bJ_{-1/3}(x).$$

Por tanto, la ecuación diferencial original tiene solución general

$$y(x) = ax^2J_{1/3}(x) + bx^2J_{-1/3}(x)$$

para $x > 0$. ■

Si a, b, y c son constantes y n es cualquier entero no negativo, entonces, es rutinario probar que $x^aJ_\nu(bx^c)$ y $x^aY_\nu(bx^c)$ son las soluciones de la ecuación diferencial general

$$y'' - \left(\frac{2a-1}{x}\right)y' + \left(b^2c^2x^{2c-2} + \frac{a^2 - \nu^2c^2}{x^2}\right)y = 0. \quad (4.12)$$

EJEMPLO 4.3

Considere la ecuación diferencial

$$y'' - \left(\frac{2\sqrt{3}-1}{x}\right)y' + \left(784x^6 - \frac{61}{x^2}\right)y = 0.$$

Para encajar esto dentro del esquema de la ecuación (4.12), debe elegir claramente $a = \sqrt{3}$. Debido al término x^6, intente poner $2c - 2 = 6$, así $c = 4$. Ahora debe elegir b y ν de manera que

$$784 = b^2c^2 = 16b^2,$$

de donde $b = 7$, y

$$a^2 - \nu^2c^2 = 3 - 16\nu^2 = -61.$$

Esta ecuación se satisface por $\nu = 2$. Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = c_1 x^{\sqrt{3}} J_2\left(7x^4\right) + c_2 x^{\sqrt{3}} Y_2(7x^4),$$

para $x > 0$. Aquí c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. ■

4.2.4 Funciones de Bessel modificadas

Algunas veces un modelo de un fenómeno físico requerirá una función de Bessel modificada para su solución. Se probará cómo se obtienen éstas. Empiece con la solución general

$$y(x) = c_1 J_0(kx) + c_2 Y_0(kx)$$

de la función de Bessel de orden cero

$$y'' + \frac{1}{x}y' + k^2 y = 0.$$

Sea $k = i$. Entonces

$$y(x) = c_1 J_0(ix) + c_2 Y_0(ix)$$

es la solución general de

$$y'' + \frac{1}{x}y' - y = 0$$

para $x > 0$. Ésta es una *ecuación de Bessel modificada de orden cero*, y $J_0(ix)$ es una *ecuación de Bessel modificada de primera clase de orden cero*. Usualmente se denota

$$I_0(x) = J_0(ix) = 1 + \frac{1}{2^2}x^2 + \frac{1}{2^2 4^2}x^4 + \frac{1}{2^2 4^2 6^2}x^6 + \cdots .$$

Normalmente no se usa $Y_0(ix)$, pero se elige la segunda solución como

$$K_0(x) = [\ln(2) - \gamma]I_0(x) - I_0(x)\ln(x) + \frac{1}{4}x^2 + \cdots$$

para $x > 0$. Aquí γ es la constante de Euler. K_0 es una *función de Bessel modificada de segunda clase de orden cero*. La figura 4.8 muestra las gráficas de $I_0(x)$ y $K_0(x)$.

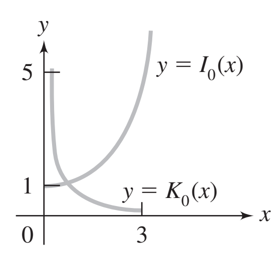


FIGURA 4.8 *Funciones de Bessel modificadas.*

La solución general de

$$y'' + \frac{1}{x}y' - y = 0$$

es por tanto

$$y(x) = c_1 I_0(x) + c_2 K_0(x)$$

para $x > 0$. La solución general de

$$y'' + \frac{1}{x}y' - b^2 y = 0 \tag{4.13}$$

es

$$y(x) = c_1 I_0(bx) + c_2 K_0(bx) \tag{4.14}$$

para $x > 0$.

Por un cálculo rutinario usando el desarrollo en serie, encuentre que

$$\int x I_0(\alpha x)\, dx = \frac{x}{\alpha} I_0'(\alpha x) + C$$

para cualquier constante distinta de cero α.

Con frecuencia se tiene interés en el comportamiento de una función cuando la variable toma valores extremadamente grandes. Esto se llama el *comportamiento asintótico*, y se abordará más adelante con cierto detalle, en general, para las funciones de Bessel. Sin embargo, con sólo algunos renglones de trabajo es posible tener alguna idea de cómo $I_0(x)$ se comporta para x grande. Empiece con

$$y'' + \frac{1}{x}y' - y = 0,$$

en donde $cI_0(x)$ es una solución para cualquier constante c. Bajo el cambio de variables $y = ux^{-1/2}$, esta ecuación se transforma en

$$u'' = \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)u,$$

con solución $u(x) = c\sqrt{x} I_0(x)$ para $x > 0$ y c cualquier constante. Siga transformándola haciendo $u = ve^x$, obteniendo

$$v'' + 2v' + \frac{1}{4x^2}v = 0,$$

con solución $v(x) = c\sqrt{x}e^{-x} I_0(x)$. Como está interesado en el comportamiento de las soluciones para x grande, intente una solución en serie de esta ecuación diferencial para v de la forma

$$v(x) = 1 + c_1\frac{1}{x} + c_2\frac{1}{x^2} + c_3\frac{1}{x^2} + \cdots .$$

Sustituya en la ecuación diferencial y agrupe los términos para obtener

$$\left(-2c_1 + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{x^2} + \left(2c_1 - 4c_2 + \frac{1}{4}c_1\right)\frac{1}{x^3}$$
$$+ \left(6c_2 - 6c_3 + \frac{1}{4}c_2\right)\frac{1}{x^4} + \left(12c_3 - 8c_4 + \frac{1}{4}c_3\right)\frac{1}{x^5} + \cdots = 0.$$

Cada coeficiente debe hacerse cero, así

$$-2c_1 + \frac{1}{4} = 0,$$

$$2c_1 - 4c_2 + \frac{1}{4}c_1 = 0,$$

$$6c_2 - 6c_3 + \frac{1}{4}c_2 = 0,$$

$$12c_3 - 8c_4 + \frac{1}{4}c_3 = 0,$$

y así sucesivamente. Entonces

$$c_1 = \frac{1}{8},$$

$$c_2 = \frac{9}{16}c_1 = \frac{9}{16}\frac{1}{8} = \frac{3^2}{2 \cdot 8^2},$$

$$c_3 = \frac{25}{24}c_2 = \frac{25}{24}\frac{3^2}{2 \cdot 8^2} = \frac{3^2 5^2}{3!8^3},$$

$$c_4 = \frac{49}{32}c_3 = \frac{49}{32}\frac{3^2 5^2}{3!8^3} = \frac{3^2 5^2 7^2}{4!8^4},$$

y el patrón es claro:

$$v(x) = 1 + \frac{1}{8}\frac{1}{x} + \frac{3^2}{2 \cdot 8^2}\frac{1}{x^2} + \frac{3^2 5^2}{3!8^3}\frac{1}{x^3} + \frac{3^2 5^2 7^2}{4!8^4}\frac{1}{x^4} + \cdots .$$

Entonces, para alguna constante c,

$$I_0(x) = c\frac{e^x}{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{1}{8}\frac{1}{x} + \frac{3^2}{2 \cdot 8^2}\frac{1}{x^2} + \frac{3^2 5^2}{3!8^3}\frac{1}{x^3} + \frac{3^2 5^2 7^2}{4!8^4}\frac{1}{x^4} + \cdots\right).$$

La serie de la derecha diverge, pero la suma de los primeros N términos se aproxima a $I_0(x)$ tanto como quiere, para x suficientemente grande. Esto se llama *desarrollo asintótico* de $I_0(x)$. Por un análisis, que no llevará a cabo, se puede probar que $c = 1/\sqrt{2\pi}$.

Estos resultados, acerca de las funciones modificadas de Bessel, serán aplicados brevemente a una descripción de los efectos en la superficie del fluido de una corriente alterna a través de una sección circular transversal de un alambre.

4.2.5 Algunas aplicaciones de las funciones de Bessel

Las funciones de Bessel aparecen en distintos contextos. Aquí se discutirán algunas de estas situaciones.

La longitud crítica de una barra vertical Considere una barra elástica delgada de densidad uniforme y sección circular transversal, sujeta en una posición vertical como en la figura 4.9. Si la barra es suficientemente larga y el extremo superior se desplaza y se mantiene en esa posición hasta que la barra está en reposo, la barra quedará inclinada o desplazada cuando se suelte. Tal longitud se conoce como una *longitud inestable*. En algunas longitudes más cortas, sin embargo, la barra volverá a la posición vertical cuando se suelte, después de algunas oscilaciones pequeñas. Estas longitudes se conocen como *longitudes estables* para la barra. Nos gustaría determinar la *longitud crítica* L_C, el punto de transición de estable a inestable.

Suponga que la barra tiene longitud L y peso w por unidad de longitud. Sea a el radio de su sección transversal circular y E el módulo de Young para el material de la barra (ésta es la razón de la fatiga del

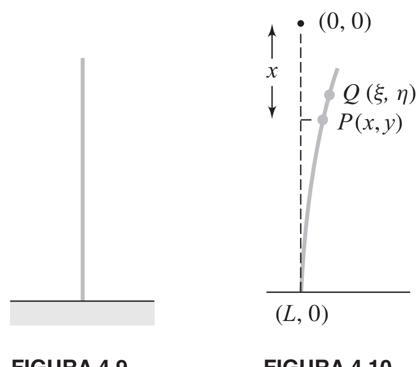


FIGURA 4.9 **FIGURA 4.10**

esfuerzo correspondiente por el alargamiento o la compresión lineal). El momento de inercia alrededor de un diámetro es $I = \pi a^4/4$. Asuma que la barra está en equilibrio y después se desplaza ligeramente desde la vertical, como en la figura 4.10. El eje x es vertical a lo largo de la posición original de la barra, con la parte positiva hacia abajo y el origen en el extremo superior de la barra en equilibrio. Sean $P(x, y)$ y $Q(\xi, \eta)$ puntos en la barra desplazada, como se muestra. El momento alrededor de P del peso de un elemento $w\Delta x$ en Q es $w\,\Delta x[y(\xi) - y(x)]$. Al integrar esta expresión obtiene el momento alrededor de P del peso de la barra arriba de P. Suponga a partir de la teoría de la elasticidad que este momento alrededor de P es $EIy''(x)$. Debido a que la parte de la barra arriba de P está en equilibrio, entonces

$$EIy''(x) = \int_0^x w[y(\xi) - y(x)]\,d\xi.$$

Diferencie esta ecuación respecto a x:

$$EIy^{(3)}(x) = w[y(x) - y(x)] - \int_0^x wy'(x)\,d\xi = -wxy'(x).$$

Entonces

$$y^{(3)}(x) + \frac{w}{EI}xy'(x) = 0.$$

Sea $u = y'$ para obtener la ecuación diferencial de segundo orden

$$u'' + \frac{w}{EI}xu = 0.$$

Compare esta ecuación con la ecuación (4.12). Necesita

$$2a - 1 = 0, \quad a^2 - \nu^2 c = 0, \quad 2c - 2 = 1 \text{ y } b^2c^2 = \frac{w}{EI}.$$

Esto lo lleva a elegir

$$a = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{3}{2}, \quad \nu = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{w}{EI}}.$$

La solución general para $u(x)$ es

$$u(x) = y'(x) = c_1\sqrt{x}J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{w}{EI}}x^{3/2}\right) + c_2\sqrt{x}J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{w}{EI}}x^{3/2}\right).$$

Como no hay momento de torsión en el extremo superior de la barra,

$$y''(0) = 0.$$

Queda al estudiante probar que esta condición requiere $c_1 = 0$. Entonces

$$y'(x) = c_2\sqrt{x}\,J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{w}{EI}}x^{3/2}\right).$$

Como el extremo inferior de la barra está sujeto verticalmente, $y'(L) = 0$, así

$$c_2\sqrt{L}\,J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{w}{EI}}L^{3/2}\right) = 0.$$

Debido a que c_2 debe ser distinto de cero para evitar una solución trivial, necesita

$$J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{w}{EI}}L^{3/2}\right) = 0.$$

La longitud crítica L_C es el menor número positivo que puede ser sustituido para L en esta ecuación. A partir de una tabla de las funciones de Bessel, encuentre que el menor número positivo α tal que $J_{-1/3}(\alpha) = 0$ es aproximadamente 1.8663. Por tanto,

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{w}{EI}}L_C^{3/2} \approx 1.8663,$$

así

$$L_C \approx 1.9863\left(\frac{EI}{w}\right)^{1/3}.$$

Corriente alterna en un alambre Analizará la corriente alterna en un alambre de sección transversal circular culminando en una descripción matemática del efecto superficial (a frecuencias altas, la mayor parte de la corriente fluye a través de una capa delgada en la superficie del alambre).

Empiece con los principios generales de Ampère y Faraday, llamados así en su honor. La ley de Ampère establece que la integral de línea de una fuerza magnética alrededor de una curva cerrada (circuito), es igual a 4π veces la integral de la corriente eléctrica a través del circuito. La ley de Faraday establece que la integral de línea de la fuerza eléctrica alrededor de un circuito cerrado, es igual al negativo de la derivada respecto al tiempo de la inducción magnética a través del circuito.

Usará estas leyes para determinar la densidad de la corriente en el radio r en un alambre de sección transversal circular y radio a. Sean ρ la resistencia específica del alambre, μ su permeabilidad, y $x(r, t)$ y $H(r, t)$ la densidad de la corriente y la intensidad magnética, respectivamente, en el radio r y el tiempo t.

Para empezar, aplique la ley de Ampère a un círculo de radio r que tiene su eje a lo largo del eje del alambre. Obtiene

$$2\pi r H = 4\pi \int_0^r x(2\pi\xi)\,d\xi,$$

o

$$rH = 4\pi \int_0^r x\xi\,d\xi. \tag{4.15}$$

Entonces

$$\frac{\partial}{\partial r}(rH) = 4\pi x r,$$

así

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH) = 4\pi x(r, t). \tag{4.16}$$

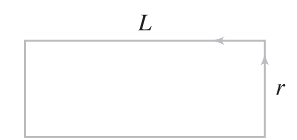


FIGURA 4.11

Ahora aplique la ley de Faraday al circuito rectangular de la figura 4.11, teniendo un lado de longitud L a lo largo del eje del cilindro. Obtiene

$$\rho Lx(0,t) - \rho Lx(r,t) = -\frac{\partial}{\partial t}\int_0^r \mu LH(\xi,t)\,d\xi.$$

Diferencie esta ecuación respecto a r para obtener

$$\rho\frac{\partial x}{\partial r} = \mu\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{4.17}$$

Quiere usar las ecuaciones (4.16) y (4.17) para eliminar H. Primero multiplique la ecuación (4.17) por r para obtener

$$\rho r\,\frac{\partial x}{\partial r} = \mu r\,\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Diferencie respecto a r:

$$\rho\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial x}{\partial r}\right) = \mu\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial H}{\partial t}\right) = \mu\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rH)\right) = \mu\,\frac{\partial}{\partial t}(4\pi xr) = 4\pi\mu r\,\frac{\partial x}{\partial t},$$

en el cual sustituye de la ecuación (4.16) en los siguientes dos últimos pasos. Entonces

$$\rho\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial x}{\partial r}\right) = 4\pi\mu r\,\frac{\partial x}{\partial t}. \tag{4.18}$$

La idea es resolver esta ecuación diferencial parcial para $x(r, t)$, después obtener $H(r, t)$ a partir de la ecuación (4.15). Para hacer esto, suponga que la corriente a través del alambre es una corriente alterna dada por $C\cos(\omega t)$, con C constante. Así el periodo de la corriente es $2\pi/\omega$. Es conveniente escribir $z(r, t) = x(r, t) + iy(r, t)$, así $x(r, t) = \mathrm{Re}(z(r, t))$, y pensar en la corriente como la parte real de la exponencial compleja $Ce^{i\omega t}$. La ecuación diferencial (4.18), con z en lugar de x, es

$$\rho\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial z}{\partial r}\right) = 4\pi\mu r\,\frac{\partial z}{\partial t}. \tag{4.19}$$

Para resolver esta ecuación, intente una solución de la forma

$$z(r,t) = f(r)e^{i\omega t}.$$

Sustituya esta solución propuesta en la ecuación (4.19) para obtener

$$\rho\,\frac{\partial}{\partial r}\left(rf'(r)e^{i\omega t}\right) = 4\pi\mu rf(r)i\omega e^{i\omega t}.$$

Divida entre $e^{i\omega t}$ y lleve a cabo las diferenciaciones para obtener

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) - b^2f(r) = 0,$$

donde

$$b^2 = \frac{4\pi\mu\omega}{\rho}i.$$

Comparando esta ecuación con la ecuación (4.13), escriba la solución general para $f(r)$ en términos de las funciones de Bessel modificadas:

$$f(r) = c_1 I_0(br) + c_2 K_0(br),$$

donde

$$b = \sqrt{\frac{4\pi\mu\omega}{\rho}\frac{1+i}{\sqrt{2}}}.$$

Debido al término logaritmo en $K_0(r)$, el cual tiene límite infinito conforme $r \to 0$ (centro del alambre), elija $c_2 = 0$. Así $f(r)$ tiene la forma

$$f(r) = c_1 I_0(br)$$

y

$$z(r, t) = c_1 I_0(br)e^{i\omega t}.$$

Para determinar la constante, use el hecho que (la parte real de) $Ce^{i\omega t}$ es la corriente total, así, usando la ecuación (4.14),

$$C = 2\pi c_1 \int_0^a r I_0(br)\, dr = \frac{2\pi a c_1}{b} I_0'(ba).$$

Entonces

$$c_1 = \frac{bC}{2\pi a}\frac{1}{I_0'(ba)}$$

y

$$z(r, t) = \frac{bC}{2\pi a}\frac{1}{I_0'(ba)} I_0(br)e^{i\omega t}.$$

Entonces $x(r, t) = \text{Re}(z(r, t))$, y queda para que el estudiante pruebe que

$$H(r, t) = \text{Re}\left(\frac{2C}{aI_0'(ba)} I_0(br)e^{i\omega t}\right).$$

Puede usar la solución de $z(r, t)$ para modelar el efecto superficial. Toda la corriente fluye a través del cilindro de radio r dentro del alambre (y con el mismo eje central que el alambre) es la parte real de

$$\frac{b}{2\pi a I_0'(ba)} Ce^{i\omega t} \int_0^r I_0(br) 2\pi r\, dr,$$

y algunos cálculos muestran que ésta es la parte real de

$$\frac{r I_0'(br)}{a I_0'(ba)} Ce^{i\omega t}.$$

Por tanto,

$$\frac{\text{la corriente en el cilindro de radio } r}{\text{la corriente total en el alambre}} = \frac{r}{a}\frac{I_0'(br)}{I_0'(ba)}.$$

Cuando la frecuencia ω es grande, entonces la magnitud de b es grande, y puede usar el desarrollo asintótico de $I_0(x)$ dada en la sección 4.2.4 para escribir

$$\frac{r}{a}\frac{I_0'(br)}{I_0'(ba)} \approx \frac{r}{a}\frac{e^{br}}{\sqrt{br}}\frac{\sqrt{ba}}{e^{ba}} = \sqrt{\frac{r}{a}}e^{-b(a-r)}.$$

Para cualquier r, con $0 < r < a$, puede hacer $\sqrt{\frac{r}{a}}e^{-b(a-r)}$ tan pequeño como quiera tomando la frecuencia ω suficientemente grande. Esto significa que para frecuencias grandes la mayor parte de la corriente está fluyendo cerca de la superficie exterior del alambre. Éste es el efecto superficial.

4.2.6 Una función generadora para $J_n(x)$

Ahora de regreso al desarrollo de las propiedades generales de las funciones de Bessel. Para los polinomios de Legendre, se elabora una función generadora $L(x, t)$ con la propiedad que

$$L(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n.$$

En forma similar, ahora construirá una función generadora para las funciones de Bessel de orden entero de la primera clase.

TEOREMA 4.12 ***Función generadora para las funciones de Bessel***

$$e^{x(t-1/t)/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n. \tag{4.20}$$

Para entender por qué la ecuación (4.20) es cierta, empiece con el desarrollo familiar de Maclaurin de la función exponencial para escribir

$$\begin{aligned} e^{x(t-1/t)/2} &= e^{xt/2}e^{-x/2t} \\ &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\left(\frac{xt}{2}\right)^m\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(-1)^k\left(\frac{x}{2t}\right)^k\right) \\ &\left(1+\frac{xt}{2}+\frac{1}{2!}\frac{x^2t^2}{2^2}+\frac{1}{3!}\frac{x^3t^3}{2^3}+\cdots\right)\left(1-\frac{x}{2t}+\frac{1}{2!}\frac{x^2}{2^2t^2}-\frac{1}{3!}\frac{x^3}{2^3t^3}+\cdots\right). \end{aligned}$$

Para ilustrar la idea, busque el coeficiente de t^4 en este producto. Obtiene t^4 cuando $x^4t^4/2^4 4!$ de la izquierda está multiplicado por 1 de la derecha, y cuando $x^5t^5/2^5 5!$ está multiplicado por $-x/2t$ de la derecha, y cuando $x^6t^6/2^6 6!$ está multiplicado por $x^2/2^2 2!t^2$ de la derecha, y así sucesivamente. De esta manera encuentre que el coeficiente de t^4 en este producto es

$$\frac{1}{2^4 4!}x^4 - \frac{1}{2^6 5!}x^5 + \frac{1}{2^8 2! 6!}x^6 - \frac{1}{2^{10} 3! 7!}x^7 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+4}n!(n+4)!}x^{2n+4}.$$

Ahora compare esta serie con

$$J_4(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+4}n!\Gamma(n+4+1)}x^{2n+4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+4}n!(n+4)!}x^{2n+4}.$$

Un razonamiento semejante establece que el coeficiente de t^n en la ecuación (4.20) es $J_n(x)$ para cualquier entero no negativo n. Para enteros negativos, puede usar el hecho de que

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

4.2.7 Una fórmula integral para $J_n(x)$

Usando la función generadora, es posible deducir una fórmula integral para $J_n(x)$ cuando n es un entero no negativo.

TEOREMA 4.13 ***Integral de Bessel***

Si n es un entero no negativo, entonces

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - x\,\mathrm{sen}(\theta))\,d\theta. \ \blacksquare$$

Prueba Empiece con el hecho de que

$$e^{xt/2}e^{-x/2t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n.$$

Como $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$,

$$\begin{aligned}
e^{xt/2}e^{-x/2t} = e^{x(t-1/t)/2} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} J_n(x)t^n + J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)t^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_n(x)t^{-n} + J_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} J_n(x)t^n \\
&= J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\left(t^n + (-1)^n\frac{1}{t^n}\right) \\
&= J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\left(t^{2n} + \frac{1}{t^{2n}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x)\left(t^{2n-1} - \frac{1}{t^{2n-1}}\right). \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

Ahora sea

$$t = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta).$$

Entonces

$$t^{2n} + \frac{1}{t^{2n}} = e^{2in\theta} + e^{-2in\theta} = 2\cos(2n\theta)$$

y

$$t^{2n-1} - \frac{1}{t^{2n-1}} = e^{i(2n-1)\theta} - e^{-i(2n-1)\theta} = 2i\,\mathrm{sen}((2n-1)\theta).$$

Por tanto, la ecuación (4.21) se convierte en

$$\begin{aligned}
e^{x(t-1/t)/2} &= e^{ix\,\mathrm{sen}(\theta)} \\
&= \cos(x\,\mathrm{sen}(\theta)) + i\,\mathrm{sen}(x\,\mathrm{sen}(\theta)) \\
&= J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos(2n\theta) + 2i\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x)\,\mathrm{sen}((2n-1)\theta).
\end{aligned}$$

La parte real del lado izquierdo de esta ecuación debe ser igual a la parte real del lado derecho, y similarmente para las partes imaginarias:

$$\cos(x\,\mathrm{sen}(\theta)) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos(2n\theta) \qquad (4.22)$$

y

$$\operatorname{sen}(x \operatorname{sen}(\theta)) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x) \operatorname{sen}((2n-1)\theta). \tag{4.23}$$

Ahora reconocer que las series de la derecha en las ecuaciones (4.22) y (4.23) son series de Fourier. Enfocándose, por el momento en la ecuación (4.22), su serie de Fourier es por consiguiente

$$\begin{aligned}\cos(x \operatorname{sen}(\theta)) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\theta) + b_k \operatorname{sen}(k\theta)\\ &= J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos(2n\theta).\end{aligned}$$

Como conoce los coeficientes en un desarrollo de Fourier, concluye que

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \operatorname{sen}(\theta))\cos(k\theta)\,d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es impar} \\ 2J_k(x) & \text{si } k \text{ es par} \end{cases} \tag{4.24}$$

y

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \operatorname{sen}(\theta))\operatorname{sen}(k\theta)\,d\theta = 0 \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{4.25}$$

Similarmente, a partir de la ecuación (4.23),

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x \operatorname{sen}(\theta)) &= \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\theta) + B_k \operatorname{sen}(k\theta)\\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x)\operatorname{sen}((2n-1)\theta),\end{aligned}$$

de manera que los coeficientes de Fourier son

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(x \operatorname{sen}(\theta))\cos(k\theta)\,d\theta = 0 \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.26}$$

y

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(x \operatorname{sen}(\theta))\operatorname{sen}(k\theta)\,d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es par} \\ 2J_k(x) & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}. \tag{4.27}$$

Sumando las ecuaciones (4.24) y (4.27), tiene

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \operatorname{sen}(\theta))\cos(k\theta)\,d\theta + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(x \operatorname{sen}(\theta))\operatorname{sen}(k\theta)\,d\theta\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\theta - x\operatorname{sen}(\theta))\,d\theta = \begin{cases} 2J_k(x) & \text{si } k \text{ es par} \\ 2J_k(x) & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}.\end{aligned}$$

Así

$$J_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\theta - x\operatorname{sen}(\theta))\,d\theta \quad \text{para } k = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Para completar la prueba, sólo debe observar que cos(k$\theta - x$ sen(θ)) es una función par, de donde $\int_{-\pi}^{\pi} = 2\int_0^{\pi}$, así

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(k\theta - x\operatorname{sen}(\theta))\,d\theta \quad \text{para } k = 0, 1, 2, 3, \ldots. \ \blacksquare$$

4.2.8 Una relación recursiva para $J_\nu(x)$

Deducirá tres relaciones de tipo recursivo que involucran las funciones de Bessel de primera clase. Esto provee información acerca de la función o su derivada en términos de funciones del mismo tipo, pero de índice menor. Empezamos con dos relaciones que involucran derivadas.

TEOREMA 4.14

Si ν es un número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^\nu J_\nu(x)) = x^\nu J_{\nu-1}(x). \tag{4.28}$$

Prueba Empiece con el caso que ν no es un entero negativo. Por cálculo directo,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^\nu J_\nu(x)) &= \frac{d}{dx}\left[x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu} n!\Gamma(n+\nu+1)} x^{2n+\nu}\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu} n!\Gamma(n+\nu+1)} x^{2n+2\nu}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2(n+\nu)}{2^{2n+\nu} n!(n+\nu)\Gamma(n+\nu)} x^{2n+2\nu-1} \\
&= x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu-1} n!\Gamma(n+\nu)} x^{2n+\nu-1} = x^\nu J_{\nu-1}(x).
\end{aligned}$$

Ahora extienda este resultado al caso que ν es un entero negativo, a saber $\nu = -m$ con m un entero positivo, usando el hecho de que

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x).$$

Queda este detalle al estudiante. ■

TEOREMA 4.15

Si ν es un número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^{-\nu} J_\nu(x)) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x). \quad ■ \tag{4.29}$$

La verificación de esta relación es semejante a la usada en la ecuación (4.28).

Mediante estas dos fórmulas recursivas que involucran derivadas, puede deducir la siguiente relación entre las funciones de Bessel de primera clase de órdenes diferentes.

TEOREMA 4.16

Sea ν un número real. Entonces para $x > 0$,

$$\frac{2\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x). \tag{4.30}$$

Prueba Efectúe las diferenciaciones en las ecuaciones (4.28) y (4.29) para escribir

$$x^\nu J_\nu'(x) + \nu x^{\nu-1} J_\nu(x) = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

y

$$x^{-\nu}J_\nu'(x) - \nu x^{-\nu-1}J_\nu(x) = -x^{\nu}J_{\nu+1}(x).$$

Multiplique la primera ecuación por $x^{-\nu}$ y la segunda por x^{ν} para obtener

$$J_\nu'(x) + \frac{\nu}{x}J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x)$$

y

$$J_\nu'(x) - \frac{\nu}{x}J_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x).$$

Restando la segunda de estas ecuaciones de la primera, obtiene la conclusión del teorema. ■

EJEMPLO 4.4

Previamente se afirmó que

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sen}(x), \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x),$$

resultados obtenidos directamente de la serie infinita para estas funciones de Bessel. Poniendo $\nu = \frac{1}{2}$ en la ecuación (4.30), obtiene

$$\frac{1}{x}J_{1/2}(x) = J_{3/2}(x) + J_{-1/2}(x).$$

Entonces

$$\begin{aligned} J_{3/2}(x) &= \frac{1}{x}J_{1/2}(x) - J_{-1/2}(x) \\ &= \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sen}(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{1}{x}\operatorname{sen}(x) - \cos(x)\right). \end{aligned}$$

Entonces, poniendo $\nu = \frac{3}{2}$ en la ecuación (4.30), obtiene

$$\frac{3}{x}J_{3/2}(x) = J_{5/2}(x) + J_{1/2}(x).$$

Entonces

$$\begin{aligned} J_{5/2}(x) &= -J_{1/2}(x) + \frac{3}{x}J_{3/2}(x) \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sen}(x) + \frac{3}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{1}{x}\operatorname{sen}(x) - \cos(x)\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[-\operatorname{sen}(x) + \frac{3}{x^2}\operatorname{sen}(x) - \frac{3}{x}\cos(x)\right]. \end{aligned}$$

Este proceso puede continuarse indefinidamente. El punto es que ésta es una mejor manera de generar las funciones de Bessel $J_{n+1/2}(x)$ que refiriéndose cada vez a la serie infinita. ■

4.2.9 Ceros de $J_\nu(x)$

En varias de las aplicaciones revisadas se ha visto que algunas veces es necesario saber dónde $J_\nu(x) = 0$. Tales puntos son los ceros de $J_\nu(x)$. Probará que $J_\nu(x)$ tiene un número infinito de ceros simples positivos y también obtendrá estimaciones para sus localizaciones.

Como punto inicial, recuerde de la ecuación (4.12) que $y = J_\nu(kx)$ es una solución de

$$x^2y'' + y' + \left(k^2x^2 - \nu^2\right) y = 0.$$

Sea $k > 1$. Ahora ponga $u(x) = \sqrt{kx}\,J_\nu(kx)$. Sustituya éste en la ecuación de Bessel para obtener

$$u''(x) + \left(k^2 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) u(x) = 0. \tag{4.31}$$

La intuición dicta que, conforme x crece, el término $\left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)/x^2$ ejerce menos influencia en esta ecuación para u, la cual empieza a verse más como $u'' + k^2u = 0$, con soluciones en seno y coseno. Esto sugiere que para x grande, $J_\nu(kx)$ está aproximada por una función trigonométrica, dividida entre $\sqrt{kx}$. Debido a que tal función tiene un número infinito de ceros positivos, lo mismo $J_\nu(kx)$.

Para explotar esta intuición, considere la ecuación

$$v''(x) + v(x) = 0. \tag{4.32}$$

Ésta tiene solución $v(x) = \operatorname{sen}(x - \alpha)$, con α cualquier número positivo. Multiplique la ecuación (4.31) por v y la ecuación (4.32) por u y reste para obtener

$$uv'' - vu'' = \left(k^2 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) uv - uv.$$

Escriba esta ecuación como

$$(uv' - vu')' = \left(k^2 - 1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) uv.$$

Ahora calcule

$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^{\alpha+\pi} (uv' - vu')'\,dx \\
&= u(\alpha + \pi)v'(\alpha + \pi) - u(\alpha)v'(\alpha) - v(\alpha + \pi)u'(\alpha + \pi) + v(\alpha)u'(\alpha) \\
&= -u(\alpha + \pi) - u(\alpha) \\
&= \int_\alpha^{\alpha+\pi} \left(k^2 - 1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) u(x)v(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Aplique a la última integral, el teorema del valor medio para integrales. Existe algún número τ entre α y $\alpha + \pi$ tal que

$$-u(\alpha + \pi) - u(\alpha) = u(\tau) \int_\alpha^{\alpha+\pi} \left(k^2 - 1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) \operatorname{sen}(x - \alpha)\,dx.$$

Ahora $\operatorname{sen}(x - \alpha) > 0$ para $\alpha < x < \alpha + \pi$. Más aún, puede elegir α suficientemente grande (dependiendo de ν y k) que

$$k^2 - 1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2} > 0$$

para $\alpha \le x \le \alpha + \pi$. Por tanto, la integral de la derecha en la última ecuación es positiva. Entonces $u(\alpha + \pi)$, $u(\alpha)$ y $u(\tau)$ no pueden ser todas del mismo signo. Como u es continua, u debe tener un cero en algún sitio entre α y $\alpha + \pi$. Como $u(x) = \sqrt{kx}\,J_\nu(kx)$, esto prueba que $J_\nu(kx)$ tiene al menos un cero entre α y $\alpha + \pi$.

En general, si α es cualquier número suficientemente grande y $k > 1$, entonces $J_\nu(x)$ tiene un cero entre α y $\alpha + k\pi$.

Ahora es posible establecer un resultado general sobre los ceros positivos de las funciones de Bessel de la primera clase.

TEOREMA 4.17 Ceros de $J_\nu(x)$

Sea $k > 1$ y ν un número real. Entonces, para α suficientemente grande, existe un cero de $J_\nu(x)$ entre $\alpha + kn\pi$ y $\alpha + k(n+1)\pi$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Más aún, cada cero es simple.

Prueba El argumento, dado antes del teorema prueba que para cualquier número suficientemente grande (dependiendo de ν y la seleccionada $k > 1$), existe un cero de $J_\nu(x)$ en el intervalo de ese número a ese número más $k\pi$. Así existe un cero entre α y $\alpha + k\pi$, y entonces entre $(\alpha + k\pi)$ y $(\alpha + (k+1)\pi)$, y así sucesivamente.

Más aún, cada cero es simple. Porque si un cero β tiene multiplicidad mayor que 1, entonces $J_\nu(\beta) = J'_\nu(\beta) = 0$. Pero entonces $J_\nu(x)$ es una solución del problema con valor inicial

$$x^2 y'' + y' + \left(k^2x^2 - \nu^2\right) y = 0; \qquad y(\beta) = y'(\beta) = 0.$$

Debido a que la solución de este problema es única, y la función cero es una solución, esto implicará que $J_\nu(x) = 0$ para $x > 0$, una contradicción. Por tanto, cada cero es simple. ■

El teorema implica ordenar los ceros positivos de $J_\nu(x)$ en una sucesión creciente

$$j_1 < j_2 < j_3 < \cdots,$$

así que $\text{lím}_{n\to\infty} j_n = \infty$.

Se puede probar que para $\nu > -1$, $J_\nu(x)$ no tiene ceros complejos.

Probará que J_ν no tiene ceros positivos comunes con $J_{\nu+1}$ o $J_{\nu-1}$. Sin embargo, puede afirmar que ambos $J_{\nu-1}$ y $J_{\nu+1}$ tienen al menos un cero entre cualquier par de ceros positivos de J_ν. Éste es el lema de entrelazado enunciado como el teorema 4.18, y significa que las gráficas de estas tres funciones se entrelazan entre ellas, como se puede ver en la figura 4.12 para $J_7(x)$, $J_8(x)$ y $J_9(x)$. Primero necesita lo siguiente.

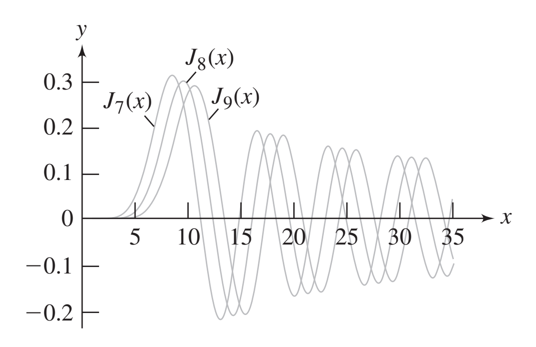


FIGURA 4.12 *Entrelazado de $J_7(x)$, $J_8(x)$ y $J_9(x)$.*

LEMA 4.1

Sea ν un número real. Entonces, excepto posiblemente para $x = 0$, J_ν no tiene un cero en común ni con $J_{\nu-1}$ ni con $J_{\nu+1}$. ■

Prueba Recuerde de la prueba del teorema 4.16 que

$$J'_\nu(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x).$$

Si $\beta \neq 0$ y $J_\nu(\beta) = J_{\nu-1}(\beta) = 0$, entonces también $J'_\nu(\beta) = 0$. Pero entonces β debe ser un cero de multiplicidad al menos 2 para J_ν, una contradicción.

Un uso similar de la relación

$$J'_\nu(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu+1}(x)$$

prueba que J_ν tampoco puede compartir un cero con $J_{\nu+1}$. ■

TEOREMA 4.18 **Lema de entrelazado**

Sea ν cualquier número real. Sean a y b ceros positivos distintos de J_ν. Entonces $J_{\nu-1}$ y $J_{\nu+1}$ cada uno tiene al menos un cero entre a y b.

Prueba Sea $f(x) = x^\nu J_\nu(x)$. Entonces $f(a) = f(b) = 0$. Debido a que f es diferenciable en todos los puntos entre a y b, por el teorema de Rolle, existe algún c entre a y b en donde $f'(c) = 0$. Pero

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^\nu J_\nu(x)) = x^\nu J_{\nu-1}(x),$$

de manera que $f'(c) = 0$ implica que $J_{\nu-1}(c) = 0$.

Un razonamiento análogo, aplicado a $g(x) = x^{-\nu} J_\nu(x)$, y usando la relación

$$\frac{d}{dx}(x^{-\nu} J_\nu(x)) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x),$$

probó que $J_{\nu+1}$ tiene un cero entre a y b. ■

La tabla siguiente da los primeros cinco ceros positivos de $J_\nu(x)$ para $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$. Aquí los números están redondeados al tercer lugar decimal. La propiedad de entrelazamiento de funciones de Bessel de índices sucesivos puede notarse observando hacia abajo las columnas. Por ejemplo, el segundo cero positivo de $J_2(x)$ cae entre el segundo cero positivo de $J_1(x)$ y $J_3(x)$.

	j_1	j_2	j_3	j_4	j_5
$J_0(x)$	2.405	5.520	8.654	11.792	14.931
$J_1(x)$	3.832	7.016	10.173	13.323	16.470
$J_2(x)$	5.135	8.417	11.620	14.796	17.960
$J_3(x)$	6.379	9.760	13.017	16.224	19.410
$J_4(x)$	7.586	11.064	14.373	17.616	20.827

4.2.10 Desarrollos de Fourier-Bessel

Tomando como guía los polinomios de Legendre, podría sospechar que las funciones de Bessel son ortogonales en algún intervalo. No lo son.

Sin embargo, sea ν cualquier número positivo. Sabe que J_ν tiene una infinidad de ceros positivos, los cuales puede ordenar en una sucesión ascendente

$$j_1 < j_2 < j_3 < \cdots.$$

Para cada j_n puede considerar la función $\sqrt{x}\,J_\nu(j_n x)$ para $0 \le x \le 1$ (así $j_n x$ varía de 0 a j_n). Estas funciones son ortogonales en [0, 1], en el sentido de que la integral del producto de cualesquiera de estas funciones en [0, 1], es cero.

TEOREMA 4.19 ***Ortogonalidad***

Sea $\nu \ge 0$. Entonces las funciones $\sqrt{x}\,J_\nu(j_n x)$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$, son ortogonales en [0, 1] en el sentido que

$$\int_0^1 x J_\nu(j_n x) J_\nu(j_m x)\,dx = 0 \quad \text{si } n \ne m. \ ■$$

Éste es el mismo sentido de la ortogonalidad de los polinomios de Legendre en $[-1, 1]$ y la ortogonalidad de las funciones

$$1, \cos(x), \cos(2x), \ldots, \operatorname{sen}(x), \operatorname{sen}(2x), \ldots$$

en $[-\pi, \pi]$.

Prueba Nuevamente invocando la ecuación (4.12), $u(x) = J_\nu(j_n x)$ satisface

$$x^2 u'' + x u' + (j_n^2 x^2 - \nu^2) u = 0.$$

Y $v(x) = J_\nu(j_m x)$ satisface

$$x^2 v'' + x v' + (j_m^2 x^2 - \nu^2) v = 0.$$

Multiplique la primera ecuación por v y la segunda por u y reste las ecuaciones resultantes para obtener

$$x^2 u'' v + x u' v + (j_n^2 x^2 - \nu^2) u v - x^2 v'' u - x v' u - (j_m^2 x^2 - \nu^2) u v = 0.$$

Esta ecuación se puede escribir

$$x^2 (u'' v - u v'') + x (u' v - u v') = (j_m^2 - j_n^2) x^2 u v.$$

Divida entre x:

$$x (u'' v - u v'') + (u' v - u v') = (j_m^2 - j_n^2) x u v.$$

Escriba esta ecuación como

$$[x (u' v - u v')]' = (j_m^2 - j_n^2) x u v.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_0^1 [x(u'v - uv')]' dx &= [x(u'v - uv')]_0^1 \\ &= J_\nu'(j_n) J_\nu(j_m) - J_\nu(j_n) J_\nu'(j_m) = 0 \\ &= (j_m^2 - j_n^2) \int_0^1 x J_\nu(j_n x) J_\nu(j_m x)\,dx.\end{aligned}$$

Como $j_n \ne j_m$, esto prueba la ortogonalidad de estas funciones en [0, 1]. ■

Como es usual, siempre que hay una relación de ortogonalidad debe intentar los desarrollos tipo Fourier. Sea f definida en [0, 1]. ¿Cómo debe elegir los coeficientes para tener un desarrollo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_\nu(j_n x)?$$

Use ahora una estrategia familiar, multiplique esta ecuación por $xJ_\nu(j_k x)$ e integre para obtener

$$\int_0^1 xf(x)J_\nu(j_k x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^1 xJ_\nu(j_n x)J_\nu(j_k x)\,dx = a_k \int_0^1 xJ_\nu^2(j_k x)\,dx.$$

La serie infinita de las integrales se ha colapsado en un solo término debido a la ortogonalidad. Entonces

$$a_k = \frac{\int_0^1 xf(x)J_\nu(j_k x)\,dx}{\int_0^1 xJ_\nu^2(j_k x)\,dx}.$$

Estos números son los *coeficientes de Fourier-Bessel* de f. Cuando estos números son usados en la serie, la $\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_\nu(j_n x)$ se llama *desarrollo de Fourier-Bessel*, o la *serie de Fourier-Bessel*, de f en términos de las funciones $\sqrt{x}\,J_\nu(j_n x)$.

Algunas veces se adopta un punto de vista diferente. Es común decir que las funciones $J_\nu(j_n x)$ son *ortogonales en* [0, 1] *respecto a la función de peso* $\rho(x) = x$. Esto significa simplemente que la integral del producto de cualesquiera dos de estas funciones, y también multiplicada por $\rho(x)$, es cero sobre el intervalo [0, 1]:

$$\int_0^1 \rho(x)J_\nu(j_n x)J_\nu(j_m x)\,dx = 0 \quad \text{si } n \neq m.$$

Ésta es la misma integral que ya se tenía para ortogonalidad, pero la integral está colocada en el contexto de la función de peso $\rho(x)$, un punto de vista que notará en breve con la teoría de Sturm-Liouville. Poner $\rho(x) = x$ en esta integral tiene el mismo efecto que poner un factor $\sqrt{x}$ con cada $J_\nu(j_n x)$.

Como con los desarrollos de Fourier y de Fourier-Legendre, el hecho de que puede calcular los coeficientes y escribir la serie no significa que esté relacionada con la función de alguna manera en particular. El siguiente teorema de convergencia trata este tema.

TEOREMA 4.20 ***Convergencia de la serie de Fourier-Bessel***

Sea f suave a pedazos en [0, 1]. Entonces, para $0 < x < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_\nu(j_n x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)),$$

donde a_n es el n-ésimo coeficiente de Fourier-Bessel de f. ■

Enseguida un ejemplo de un desarrollo de Fourier-Bessel antes de aprender más acerca de los coeficientes.

4.2.11 Coeficientes de Fourier-Bessel

La integral $\int_0^1 xJ_\nu^2(j_k x)\,dx$ aparece en el denominador de la expresión para los coeficientes de Fourier-Bessel de cualquier función, de manera que es útil evaluar esta integral.

TEOREMA 4.21

Si $\nu \geq 0$, entonces

$$\int_0^1 xJ_\nu^2(j_k x)\,dx = \frac{1}{2}J_{\nu+1}^2(j_k). \ ■$$

Observe aquí la importancia de que J_ν y $J_{\nu+1}$ no puedan tener un cero positivo en común. Sabiendo que $J_\nu(j_k) = 0$ implica que $J_{\nu+1}(j_k) \neq 0$.

Prueba A partir de la discusión anterior,

$$x^2u'' + xu' + (j_k^2x^2 - \nu^2)u = 0,$$

donde $u(x) = J_\nu(j_k x)$. Multiplique esta ecuación por $2u'(x)$ para obtener

$$2x^2u'u'' + 2x(u')^2 + 2(j_k^2x^2 - \nu^2)uu' = 0.$$

Puede escribir esta ecuación como

$$[x^2(u')^2 + (j_k^2x^2 - \nu^2)u^2]' - 2j_k^2xu^2 = 0.$$

Ahora integre, teniendo en mente que $u(1) = 0$:

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^1 [x^2(u')^2 + (j_k^2x^2 - \nu^2)u^2]'\,dx - 2j_k^2\int_0^1 xu^2\,dx\\ &= [x^2(u')^2 + (j_k^2x^2 - \nu^2)u^2]_0^1 - 2j_k^2\int_0^1 xu^2\,dx\\ &= (u'(1))^2 - 2j_k^2\int_0^1 xu^2\,dx\\ &= j_k^2[J_k'(j_k)]^2 - 2j_k^2\int_0^1 x[J_\nu(j_kx)]^2\,dx.\end{aligned}$$

Entonces

$$\int_0^1 xJ_\nu^2(j_kx)\,dx = \frac{1}{2}[J_\nu'(j_k)]^2.$$

Ahora en general

$$J_\nu'(x) - \frac{\nu}{x}J_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x).$$

Entonces

$$J_\nu'(j_k) - \frac{\nu}{j_k}J_\nu(j_k) = -J_{\nu+1}(j_k)$$

así

$$J_\nu'(j_k) = -J_{\nu+1}(j_k).$$

Por tanto,

$$\int_0^1 xJ_\nu^2(j_kx)\,dx = \frac{1}{2}[J_{\nu+1}(j_k)]^2. \blacksquare$$

En vista de esta conclusión, el coeficiente de Fourier-Bessel de f es

$$a_n = \frac{2}{[J_{\nu+1}(j_k)]^2}\int_0^1 xf(x)J_\nu(j_nx)\,dx.$$

La serie de Fourier-Bessel aparecerá más adelante al resolver la ecuación de calor para cierto tipo de regiones. Entonces enfrentará la tarea de desarrollar la función de temperatura inicial en una serie de Fourier-Bessel. También verá un desarrollo de Fourier-Bessel cuando estudie las maneras normales de vibración en una membrana circular.

Generalmente, los coeficientes de Fourier-Bessel son complicados de calcular debido a que las funciones de Bessel son difíciles de evaluar en puntos particulares, e incluso sus ceros deben ser aproximados. Sin embargo, con el poder computacional moderno frecuentemente hará aproximaciones con cualquier grado de exactitud que necesite.

EJEMPLO 4.5

Sea $f(x) = x(1 - x)$ para $0 \leq x \leq 1$. Como f es continua con una derivada continua, su serie de Fourier-Bessel convergirá a $f(x)$ en (0, 1):

$$x(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_1(j_n x) \quad \text{para } 0 < x < 1,$$

donde

$$a_n = \frac{2}{[J_2(j_n)]^2} \int_0^1 x^2(1-x) J_1(j_n x)\, dx.$$

Calcule a_1 hasta a_4, usando ocho lugares decimales en los primeros cuatro ceros de $J_1(x)$:

$$j_1 = 3.83170597, \quad j_2 = 7.01558667, \quad j_3 = 10.17346814, \quad j_4 = 13.32369194.$$

Pese a que estas integraciones son aproximaciones, calcule:

$$a_1 = \frac{2}{[J_2(3.83170597)]^2} \int_0^1 x^2(1-x) J_1(3.83170597x)\, dx$$
$$= 12.32930609 \int_0^1 x^2(1-x) J_1(3.83170597x)\, dx = 0.45221702,$$
$$a_2 = \frac{2}{[J_2(7.01558667)]^2} \int_0^1 x^2(1-x) J_1(7.01558667x)\, dx$$
$$= 22.20508362 \int_0^1 x^2(1-x) J_1(7.01558667x)\, dx = -0.03151859,$$
$$a_3 = \frac{2}{[J_2(10.17346814)]^2} \int_0^1 x^2(1-x) J_1(10.17346814x)\, dx$$
$$= 32.07568554 \int_0^1 x^2(1-x) J_1(10.17346814x)\, dx = 0.03201789,$$

y

$$a_4 = \frac{2}{[J_2(13.32369194)]^2} \int_0^1 x^2(1-x) J_1(13.32369194x)\, dx$$
$$= 41.94557796 \int_0^1 x^2(1-x) J_1(13.32369194x)\, dx$$
$$= -0.00768864.$$

Entonces, para $0 < x < 1$.

$$x(1-x) \approx 0.45221702 J_1(3.83170597x) - 0.03151859 J_1(7.01558667x)$$
$$+ 0.03201794 J_1(10.17346814x) - 0.00768864 J_1(13.32369194x)$$

La figura 4.13 muestra una gráfica de $x(1 - x)$ y una gráfica de esta suma de cuatro términos de las funciones de Bessel en [0, 1]. La gráfica está dibujada en $[-1, \frac{3}{2}]$ para enfatizar que fuera de [0, 1], no se puede

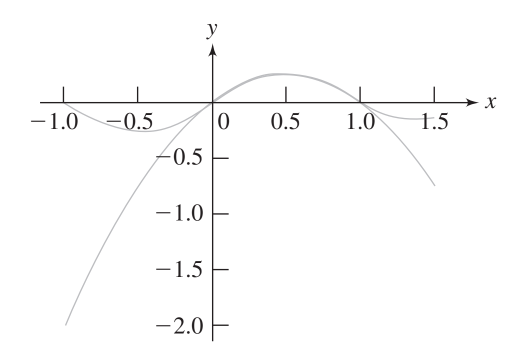


FIGURA 4.13 *Aproximación de* $x(1-x)$ *en* $[0, 1]$ *por una serie de Fourier-Bessel.*

afirmar que $x(1-x)$ está aproximada por la serie de Fourier-Bessel, y de hecho, las gráficas divergen una de la otra fuera de $[0, 1]$. La exactitud en $[0, 1]$ puede mejorarse calculando más términos de la serie. ■

SECCIÓN 4.2 PROBLEMAS

1. Pruebe que $x^a J_\nu(bx^c)$ es una solución de

$$y'' - \left(\frac{2a-1}{x}\right)y' + \left(b^2c^2x^{2c-2} + \frac{a^2-\nu^2c^2}{x^2}\right)y = 0.$$

En cada uno de los problemas 2 al 9, escriba la solución general de la ecuación diferencial en términos de las funciones $x^a J_\nu(bx^c)$ y $x^a J_{-\nu}(bx^c)$.

2. $y'' + \dfrac{1}{3x}y' + \left(1 + \dfrac{7}{144x^2}\right)y = 0$

3. $y'' + \dfrac{1}{x}y' + \left(4x^2 - \dfrac{4}{9x^2}\right)y = 0$

4. $y'' - \dfrac{5}{x}y' + \left(64x^6 + \dfrac{5}{x^2}\right)y = 0$

5. $y'' + \dfrac{3}{x}y' + \left(16x^2 - \dfrac{5}{4x^2}\right)y = 0$

6. $y'' - \dfrac{3}{x}y' + 9x^4 y = 0$

7. $y'' - \dfrac{7}{x}y' + \left(36x^4 + \dfrac{175}{16x^2}\right)y = 0$

8. $y'' + \dfrac{1}{x}y' - \dfrac{1}{16x^2}y = 0$

9. $y'' + \dfrac{5}{x}y' + \left(81x^4 + \dfrac{7}{4x^2}\right)y = 0$

10. Use el cambio de variables $by = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}$ para transformar la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + by^2 = cx^m$$

en la ecuación diferencial

$$\frac{d^2u}{dx^2} - bcx^m u = 0.$$

Use el resultado del problema 1 para encontrar la solución general de esta ecuación diferencial en términos de las funciones de Bessel, y use esta solución para resolver la ecuación diferencial original. Suponga que b es una constante positiva.

En cada uno de los problemas del 11 al 16, use el cambio de variables dado para transformar la ecuación diferencial en una, cuya solución general puede escribirse en términos de las funciones de Bessel. Use ésta para escribir la solución general de la ecuación diferencial original.

11. $4x^2y'' + 4xy' + (x-9)y = 0$; $z = \sqrt{x}$

12. $4x^2y'' + 4xy' + (9x^3 - 36)y = 0$; $z = x^{3/2}$

13. $9x^2y'' + 9xy' + (4x^{2/3} - 16)y = 0$; $z = 2x^{1/3}$

14. $9x^2y'' - 27xy' + (9x^2 + 35)y = 0$; $u = y/x^2$

15. $36x^2y'' - 12xy' + (36x^2 + 7)y = 0$; $u = x^{-2/3}y$

16. $4x^2y'' + 8xy' + (4x^2 - 35)y = 0$; $u = y\sqrt{x}$

17. Pruebe que $y(x) = \sqrt{x}J_{1/3}(2kx^{3/2}{}'3)$ es una solución de $y'' + k^2xy = 0$.

En cada uno de los problemas del 18 al 22, escriba la solución general de la ecuación diferencial en términos de las funciones $x^a J_\nu(bx^c)$ y $x^a Y_\nu(bx^c)$.

18. $y'' - \dfrac{3}{x}y' + \left(4 - \dfrac{5}{x^2}\right)y = 0$

19. $y'' - \dfrac{1}{x}y' + \left(1 - \dfrac{3}{x^2}\right)y = 0$

20. $y'' - \dfrac{5}{x}y' + \left(1 - \dfrac{7}{x^2}\right)y = 0$

21. $y'' - \dfrac{3}{x}y' + \left(\dfrac{1}{4x} + \dfrac{3}{x^2}\right)y = 0$

22. $y'' - \dfrac{1}{x}y' + \left(16x^2 - \dfrac{15}{x^2}\right)y = 0$

23. Pruebe que

$$J_{5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\left(\frac{3}{x^2} - 1\right)\operatorname{sen}(x) - \frac{3}{x}\cos(x)\right].$$

24. Pruebe que

$$J_{-5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\left(\frac{3}{x^2} - 1\right)\cos(x) + \frac{3}{x}\operatorname{sen}(x)\right].$$

25. Sea α un cero positivo de $J_0(x)$. Pruebe que $\int_0^1 J_1(\alpha x)\,dx = 1/\alpha$.

26. Sean $u(x) = J_0(\alpha x)$ y $v(x) = J_0(\beta x)$.
(a) Pruebe que $xu'' + u' + \alpha^2 xu = 0$. Obtiene una ecuación diferencial similar para v.
(b) Multiplique la ecuación diferencial para u por v y la ecuación diferencial para v por u y reste para probar que

$$[x(u'v - v'u)]' = (\beta^2 - \alpha^2)xuv.$$

(c) Pruebe a partir de la parte (b) que

$$(\beta^2 - \alpha^2)\int xJ_0(\alpha x)J_0(\beta x)\,dx$$
$$= x\left[\alpha J_0'(\alpha x)J_0(\beta x) - \beta J_0'(\beta x)J_0(\alpha x)\right].$$

Éste es uno de los conjuntos de fórmulas llamadas *integrales de Lommel*.

27. Pruebe que $[xI_0'(x)]' = xI_0(x)$.

28. En cada uno de los incisos (a) al (d), encuentre (aproximadamente) los primeros cinco términos en el desarrollo de Fourier-Bessel $\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_1(j_n x)$ de $f(x)$, cada uno está definido para $0 \le x \le 1$. Compare la gráfica de esta función con la gráfica de la suma de los primeros cinco términos en la serie.

(a) $f(x) = x$

(b) $f(x) = e^{-x}$

(c) $f(x) = xe^{-x}$

(d) $f(x) = x^2e^{-x}$

29. Lleve a cabo el programa del problema 28, sólo que ahora use un desarrollo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_2(j_n x)$.

4.3 Teoría de Sturm-Liouville y desarrollos en funciones propias

4.3.1 El problema de Sturm-Liouville

En esencia, el mismo escenario ha aparecido tres veces:

ecuación diferencial $\longrightarrow$ soluciones que son ortogonales en $[a, b]$

$\longrightarrow$ desarrollos en series de funciones arbitrarias de esas soluciones

$\longrightarrow$ teorema de convergencia para el desarrollo.

Primero las series (trigonométricas) de Fourier, luego polinomios de Legendre y series de Fourier-Legendre, y después funciones de Bessel y desarrollos de Fourier-Bessel.

Esto fuerza la imaginación para pensar que las similitudes en los teoremas de convergencia no son pura coincidencia. Ahora se desarrolla una teoría general en la cual estos teoremas de convergencia encajan naturalmente. Esto también ampliará su arsenal de herramientas en preparación para resolver ecuaciones diferenciales parciales.

Considere la ecuación diferencial

$$y'' + R(x)y' + (Q(x) + \lambda P(x))y = 0. \tag{4.33}$$

Dado un intervalo (a, b) en que los coeficientes son continuos, busque valores de λ para los cuales esta ecuación tenga soluciones no triviales. Como verá, en algunos casos habrá condiciones en la frontera que deben satisfacerse (condiciones específicas en a y b), y algunas veces no.

Primero ponga la ecuación diferencial en una forma estándar conveniente. Multiplique la ecuación (4.33) por

$$r(x) = e^{\int R(x)\,dx}$$

para obtener

$$y''e^{\int R(x)\,dx} + R(x)y'e^{\int R(x)\,dx} + (Q(x) + \lambda P(x))e^{\int R(x)\,dx}y = 0.$$

Como $r(x) \neq 0$, esta ecuación tiene las mismas soluciones que la ecuación (4.33). Ahora reconoce que la última ecuación puede escribirse como

$$(ry')' + (q + \lambda p)y = 0. \tag{4.34}$$

La ecuación (4.34) es llamada la *ecuación diferencial de Sturm-Liouville*, o la *forma Sturm-Liouville de la ecuación* (4.33). Suponga que p, q y r y r' son continuas en $[a, b]$, o al menos en (a, b) y $p(x) > 0$ y $r(x) > 0$ en (a, b).

EJEMPLO 4.6

La ecuación diferencial de Legendre es

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0.$$

Inmediatamente, escriba ésta en la forma de Sturm-Liouville como

$$((1 - x^2)y')' + \lambda y = 0,$$

para $-1 \leq x \leq 1$. Correspondientes a los valores $\lambda = n(n + 1)$, con $n = 0, 1, 2, \ldots$, los polinomios de Legendre son soluciones. Como vio en la sección 4.1, también existen soluciones no polinomiales correspondientes a otras elecciones de λ. Sin embargo, estas soluciones no polinomiales no están acotadas en $[-1, 1]$. ■

EJEMPLO 4.7

La ecuación (4.12), con $a = 0$, $c = 1$ y $b = \sqrt{\lambda}$, puede escribirse

$$(xy')' + \left(\lambda x - \frac{\nu^2}{x}\right)y = 0.$$

Ésta es la forma de Sturm-Liouville de la ecuación de Bessel. Para $\lambda > 0$, esta ecuación tiene soluciones en términos de las funciones de Bessel de orden ν de la primera y segunda clase, $J_\nu(\sqrt{\lambda}x)$ y $Y_\nu(\sqrt{\lambda}x)$. ■

Ahora tres clases de problemas de Sturm-Liouville.

El problema de Sturm-Liouville regular Si quiere números λ para los cuales existen soluciones no triviales de

$$(ry')' + (q + \lambda p)y = 0$$

en un intervalo $[a, b]$. Estas soluciones deben satisfacer *condiciones regulares en la frontera*, que tienen la forma

$$A_1 y(a) + A_2 y'(a) = 0, \quad B_1 y(b) + B_2 y'(b) = 0.$$

A_1 y A_2 son constantes dadas, no ambas cero, y similarmente para B_1 y B_2.

El problema periódico de Sturm-Liouville Ahora suponga $r(a) = r(b)$. Busque números λ y las soluciones no triviales correspondientes de la ecuación de Sturm-Liouville en $[a, b]$ satisfaciendo las *condiciones periódicas en la frontera*

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b).$$

El problema singular de Sturm-Liouville Busque números λ y las soluciones no triviales correspondientes de la ecuación de Sturm-Liouville en (a, b), sujetas a una de las siguientes tres clases de condiciones en la frontera:

Tipo 1. $r(a) = 0$ y no hay condiciones en la frontera en a, mientras en b la condición en la frontera es

$$B_1 y(b) + B_2 y'(b) = 0,$$

donde B_1 y B_2 no son cero.

Tipo 2. $r(b) = 0$ y no hay condiciones en la frontera en b, mientras en a la condición es

$$A_1 y(a) + A_2 y'(a) = 0,$$

con A_1 y A_2 no son cero.

Tipo 3. $r(a) = r(b) = 0$, y no hay condiciones en la frontera en a ni en b. En este caso requiere soluciones que sean funciones acotadas en $[a, b]$.

Cada uno de estos problemas es un *problema con valor en la frontera*, en el que se especifican ciertas condiciones en los extremos de un intervalo, en contraste con un problema con valor inicial, el cual especifica información acerca de la función y su derivada (en el caso de segundo orden) en un punto. Los problemas con valores en la frontera usualmente no tienen soluciones únicas. De hecho, exactamente es esta falta de unicidad la que puede ser explotada para resolver muchos problemas importantes.

En cada uno de estos problemas, un número λ para el cual la ecuación diferencial de Sturm-Liouville tiene solución no trivial se llama un *valor propio* del problema. La solución no trivial correspondiente se llama una *función propia asociada con este valor propio*. La función cero no puede ser una función propia. Sin embargo, cualquier múltiplo constante distinto de cero de una función propia asociada con un valor propio particular también es una función propia para este valor propio. En los modelos matemáticos de los problemas en física e ingeniería, los valores propios usualmente tienen algún significado físico. Por ejemplo, en el estudio del movimiento de onda los valores propios son frecuencias fundamentales de vibración del sistema.

Se considerarán ejemplos de estos géneros de problemas. Los dos primeros serán importantes en el análisis de problemas que involucran condiciones de calor y propagación de onda.

EJEMPLO 4.8 Un problema regular

Considere el problema regular

$$y'' + \lambda y = 0; \qquad y(0) = y(L) = 0$$

en un intervalo $[0, L]$. Encontrará los valores propios y las funciones propias considerando casos sobre λ. Como se probará más adelante, un problema de Sturm-Liouville no puede tener valores propios complejos, hay tres casos.

Caso 1 $\lambda = 0$

Entonces $y(x) = cx + d$ para c y d constantes. Ahora $y(0) = d = 0$ y $y(L) = cL = 0$ requieren que $c = 0$. Esto significa que $y(x) = cx + d$ debe ser la solución trivial. En la ausencia de una solución no trivial, $\lambda = 0$ no es un valor propio de este problema.

Caso 2 λ es negativo, $\lambda = -k^2$ para $k > 0$.

Ahora $y'' - k^2y = 0$ tiene solución general

$$y(x) = c_1e^{kx} + c_2e^{-kx}.$$

Como

$$y(0) = c_1 + c_2 = 0,$$

entonces $c_2 = -c_1$, de donde $y = 2c_1 \operatorname{senh}(kx)$. Pero entonces

$$y(L) = 2c_1 \operatorname{senh}(kL) = 0.$$

Como $kL > 0$, $\operatorname{senh}(kL) > 0$, de donde $c_1 = 0$. Este caso también nos lleva a la solución trivial, entonces este problema de Sturm-Liouville no tiene valores propios negativos.

Caso 3 λ es positivo, $\lambda = k^2$.
La solución general de $y'' + k^2y = 0$ es

$$y(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \operatorname{sen}(kx).$$

Ahora

$$y(0) = c_1 = 0,$$

así $y(x) = c_2 \operatorname{sen}(kx)$. Finalmente, necesita

$$y(L) = c_2 \operatorname{sen}(kL) = 0.$$

Para evitar la solución trivial, necesita $c_2 \neq 0$. Entonces debe elegir k de manera que $\operatorname{sen}(kL) = 0$, lo que significa que kL debe ser un entero positivo múltiplo de π, $kL = n\pi$. Entonces

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Cada uno de estos números es un valor propio de este problema de Sturm-Liouville. Correspondiente a cada n, las funciones propias son

$$y_n(x) = c \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

en donde c puede ser cualquier número real distinto de cero. ■

EJEMPLO 4.9 Un problema periódico de Sturm-Liouville

Considere el problema

$$y'' + \lambda y = 0; \qquad y(-L) = y(L),\ y'(-L) = y'(L)$$

en un intervalo $[-L, L]$. Comparando esta ecuación diferencial con la ecuación (4.34), tiene $r(x) = 1$, así $r(-L) = r(L)$, como se requiere para un problema periódico de Sturm-Liouville. Considere casos en λ.

Caso 1 $\lambda = 0$
Entonces $y = cx + d$. Ahora

$$y(-L) = -cL + d = y(L) = cL + d$$

implica que $c = 0$. La función constante $y = d$ satisface ambas condiciones en la frontera. Así $\lambda = 0$ es un valor propio con funciones propias constantes distintas de cero.

Caso 2 $\lambda < 0$, $\lambda = -k^2$.
Ahora

$$y(x) = c_1e^{kx} + c_2e^{-kx}.$$

Como $y(-L) = y(L)$, entonces

$$c_1 e^{-kL} + c_2 e^{kL} = c_1 e^{kL} + c_2 e^{-kL}. \tag{4.35}$$

y $y'(-L) = y'(L)$ da (después de dividir entre el factor común k)

$$c_1 e^{-kL} - c_2 e^{kL} = c_1 e^{kL} - c_2 e^{-kL}. \tag{4.36}$$

Reescriba la ecuación (4.35) como

$$c_1(e^{-kL} - e^{kL}) = c_2(e^{-kL} - e^{kL}).$$

Esto implica que $c_1 = c_2$. Entonces la ecuación (4.36) se convierte en

$$c_1(e^{-kL} - e^{kL}) = c_1(e^{kL} - e^{-kL})$$

Pero esto implica que $c_1 = -c_1$, de donde $c_1 = 0$. La solución es por tanto trivial, así este problema no tiene valor propio negativo.

Caso 3 λ es positivo, $\lambda = k^2$.
Ahora

$$y(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \operatorname{sen}(kx).$$

Ahora

$$y(-L) = c_1 \cos(kL) - c_2 \operatorname{sen}(kL) = y(L) = c_1 \cos(kL) + c_2 \operatorname{sen}(kL).$$

Pero esto implica que

$$c_2 \operatorname{sen}(kL) = 0.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} y'(-L) &= kc_1 \operatorname{sen}(kL) + kc_2 \cos(kL) \\ &= y'(L) = -kc_1 \operatorname{sen}(kL) + kc_2 \cos(kL). \end{aligned}$$

Entonces

$$kc_1 \operatorname{sen}(kL) = 0.$$

Si $\operatorname{sen}(kL) \neq 0$, entonces $c_1 = c_2 = 0$, obteniendo la solución trivial. Así suponga $\operatorname{sen}(kL) = 0$. Esto requiere que $kL = n\pi$ para algún entero positivo n. Por tanto, los números

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

son los valores propios para $n = 1, 2, \ldots$, con las funciones propias correspondientes

$$y_n(x) = c_1 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

con c_1 y c_2 sin ser cero.

Puede combinar los casos 1 y 3 permitiendo $n = 0$, de manera que el valor propio $\lambda = 0$ tiene las funciones propias constantes distintas de cero correspondientes. ■

EJEMPLO 4.10 Las funciones de Bessel como funciones propias de un problema singular

Considere la ecuación de Bessel de orden ν,

$$(xy')' + \left(\lambda x - \frac{\nu^2}{x}\right) y = 0,$$

en el intervalo $(0, R)$. Aquí ν es cualquier número real no negativo dado, y $R > 0$. En el contexto de la ecuación diferencial de Sturm-Liouville, $r(x) = x$, y $r(0) = 0$, de manera que no hay condiciones de frontera en 0. Sea la condición frontera en R

$$y(R) = 0.$$

Si $\lambda > 0$, entonces la solución general de la ecuación de Bessel es

$$y(x) = c_1 J_\nu(\sqrt{\lambda}x) + c_2 Y_\nu(\sqrt{\lambda}x).$$

Para tener una solución que esté acotada conforme $x \to 0+$, debe elegir $c_2 = 0$. Esto lo lleva a soluciones de la forma $y = c_1 J_\nu(\sqrt{\lambda}x)$. Para satisfacer las condiciones de la frontera en $x = R$, debe tener

$$y(R) = c_1 J_\nu(\sqrt{\lambda}R) = 0.$$

Necesita $c_1 \neq 0$ para evitar la solución trivial, de manera que debe elegir λ para que $J_\nu(\sqrt{\lambda}R) = 0$. Si $j_1, j_2, \ldots$ son los ceros positivos de $J_\nu(x)$, entonces $\sqrt{\lambda}R$ pueden ser elegidos como cualquier j_n. Esto lleva a una sucesión infinita de valores propios

$$\lambda_n = \frac{j_n^2}{R^2},$$

con funciones propias correspondientes

$$cJ_\nu\left(\frac{j_n x}{R}\right),$$

con c constante pero distinta de cero.

Éste es un ejemplo del problema de Sturm-Liouville singular del tipo 1. ■

EJEMPLO 4.11 Polinomios de Legendre como funciones propias de un problema singular

Considere la ecuación diferencial de Legendre

$$((1 - x^2)y')' + \lambda y = 0.$$

En el contexto de la teoría de Sturm-Liouville, $r(x) = 1 - x^2$. En el intervalo $[-1, 1]$, tiene $r(-1) = r(1) = 0$, de manera que no hay condiciones de frontera y éste es un problema de Sturm-Liouville singular del tipo 3. Quiere soluciones acotadas en este intervalo, de manera que elige $\lambda = n(n+1)$, con $n = 0, 1, 2, \ldots$. Estos son los valores propios de este problema. Las funciones propias correspondientes son constantes distintas de cero múltiplos de los polinomios de Legendre $P_n(x)$. ■

Finalmente, aquí hay un problema con condiciones en la frontera más complicadas.

EJEMPLO 4.12

Considere el problema regular

$$y'' + \lambda y = 0; \qquad y(0) = 0, 3y(1) + y'(1) = 0.$$

Este problema está definido en $[0, 1]$. Para encontrar los valores y funciones propios, considere casos en λ.

Caso 1 $\lambda = 0$.
Ahora $y(x) = cx + d$ y $y(0) = d = 0$. Entonces $y = cx$. Pero de la segunda condición de frontera,

$$3y(1) + y'(1) = 3c + c = 0$$

fuerza $c = 0$, de manera que este caso tiene solamente la solución trivial. Esto significa que 0 no es un valor propio de este problema.

Caso 2 $\lambda < 0$.
Escriba $\lambda = -k^2$ con $k > 0$, de donde $y'' - k^2y = 0$, con solución general

$$y(x) = c_1e^{kx} + c_2e^{-kx}.$$

Ahora $y(0) = 0 = c_1 + c_2$, así $c_2 = -c_1$ y $y(x) = 2c_1 \operatorname{senh}(kx)$. Siguiente,

$$3y(1) + y'(1) = 0 = 6c_1 \operatorname{senh}(k) + 2c_1k \cosh(k)$$

Pero para $k > 0$, $\operatorname{senh}(k)$ y $k \cosh(k)$ son positivos, así esta ecuación obliga a $c_1 = 0$ y nuevamente obtiene sólo la solución trivial. Este problema no tiene valor propio negativo.

Caso 3 $\lambda > 0$, $\lambda = k^2$.
Ahora $y'' + k^2y = 0$, con solución general

$$y(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \operatorname{sen}(kx).$$

Entonces $y(0) = c_1 = 0$, así $y(x) = c_2 \operatorname{sen}(kx)$. La segunda condición de la frontera da

$$0 = 3c_2 \operatorname{sen}(k) + kc_2 \cos(k).$$

Necesita $c_2 \neq 0$ para evitar la solución trivial, así busque k tal que

$$3 \operatorname{sen}(k) + k \cos(k) = 0.$$

Esto significa que

$$\tan(k) = -\frac{k}{3}.$$

Esta ecuación no se puede resolver algebraicamente. Sin embargo, la figura 4.14 muestra las gráficas de $y = \tan(k)$ y $y = -k/3$ en el mismo conjunto de ejes. Estas gráficas se cortan una infinidad de veces en

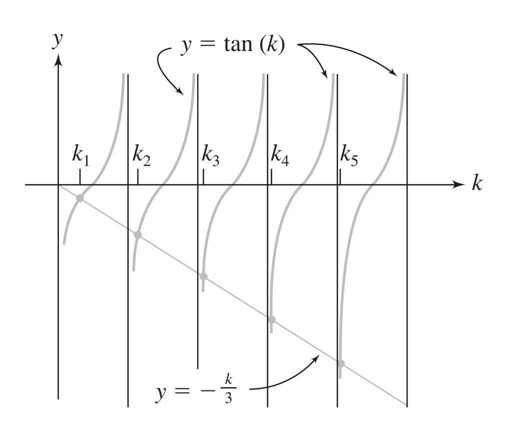


FIGURA 4.14

el semiplano $k > 0$. Sean las k coordenadas de estos puntos de intersección $k_1, k_2, \ldots$ Los números $\lambda_n = k_n^2$ son los valores propios de este problema, con las funciones propias correspondientes $c \operatorname{sen}(k_n x)$ para $c \neq 0$. ■

4.3.2 El teorema de Sturm-Liouville

Con estos ejemplos como antecedente, he aquí el teorema fundamental de la teoría de Sturm-Liouville.

TEOREMA 4.22

1. Cada problema regular y cada problema periódico de Sturm-Liouville tiene un número infinito real de valores propios distintos. Si éstos están etiquetados como $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ de manera que $\lambda_n < \lambda_{n+1}$, entonces $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.
2. Si λ_n y λ_m son valores propios distintos de cualquiera de las tres clases de problemas de Sturm-Liouville definidos en un intervalo (a, b), y φ_n y φ_m son las funciones propias correspondientes, entonces

$$\int_a^b p(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = 0.$$

3. Todos los valores propios de un problema de Sturm-Liouville son números reales.
4. Para un problema regular de Sturm-Liouville, cualesquiera dos funciones propias correspondientes a un solo valor propio son múltiplos constantes una de la otra. ■

La conclusión (1) nos asegura la existencia de valores propios, al menos para problemas regulares y periódicos. Un problema singular también puede tener una sucesión infinita de valores propios, como en el ejemplo 4.10 con las funciones de Bessel. La conclusión (1) también afirma que los valores propios "se esparcen", de manera que si se acomodan en orden creciente, crecen sin límite. Por ejemplo, los números $1-1/n$ no podrían ser valores propios de un problema de Sturm-Liouville, ya que estos números tienden a 1 conforme $n\to\infty$.

En (2) se denota $f \cdot g = \int_a^b p(x)f(x)g(x)\,dx$. Este producto punto para funciones tiene muchas de las propiedades vistas para el producto punto de vectores. En particular, para funciones f, g y h que son integrables en $[a, b]$,

$$f \cdot g = g \cdot f,$$
$$f \cdot (g+h) = f \cdot g + f \cdot h,$$
$$(\alpha f) \cdot g = \alpha(f \cdot g)$$

para cualquier número real α, y

$$f \cdot f \geq 0.$$

La última propiedad cuenta con la suposición hecha para la ecuación de Sturm-Liouville que $p(x) > 0$ en (a, b). Si f también es continua en $[a, b]$, entonces $f \cdot f = 0$ sólo si f es la función cero, como en este caso $\int_a^b p(x) f(x)^2\,dx = 0$ puede ser cierto sólo si $f(x) = 0$ para $a \leq x \leq b$.

Esta analogía entre vectores y funciones es útil en la visualización de ciertos procesos y conceptos, y ahora es el momento apropiado para formalizar la terminología.

DEFINICIÓN 4.1

Sea p continua en $[a, b]$ y $p(x) > 0$ para $a < x < b$.

1. Si f y g son integrables en $[a, b]$, entonces el producto punto de f con g, respecto a la función de peso p, está dado por

$$f \cdot g = \int_a^b p(x) f(x) g(x)\, dx.$$

2. f y g son ortogonales en $[a, b]$, respecto a la función de peso p, si $f \cdot g = 0$.

La definición de ortogonalidad está motivada por el hecho de que dos vectores **F** y **G** en el espacio tridimensional son ortogonales exactamente cuando $\mathbf{F} \cdot \mathbf{G} = 0$.

Ahora se puede exponer la conclusión (2): Las funciones propias asociadas con valores propios distintos son ortogonales en $[a, b]$, con función de peso $p(x)$. La función de peso p es el coeficiente de λ en la ecuación de Sturm-Liouville.

Como se ha visto explícitamente para las series (trigonométricas) de Fourier, las series de Fourier-Legendre y las series de Fourier-Bessel, esta ortogonalidad de funciones propias es la clave para los desarrollos de funciones en series de funciones propias de un problema de Sturm-Liouville. Esto se convertirá en un resultado significativo cuando resuelva ciertas ecuaciones diferenciales parciales al modelar fenómenos de onda y de radiación.

La conclusión (3) formula que un problema de Sturm-Liouville puede no tener valores propios complejos. Esto es consistente con el hecho que los valores propios para ciertos problemas tienen significado físico, tales como la medición de los modos de vibración de un sistema.

Finalmente, la conclusión (4) se aplica sólo a problemas regulares de Sturm-Liouville. Por ejemplo, el problema periódico de Sturm-Liouville del ejemplo 4.9 tiene funciones propias $\cos(n\pi x/L)$ y $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$ asociadas con el único valor propio $n^2\pi^2/L^2$, y estas funciones ciertamente no son múltiplos constantes una de la otra.

Se probarán partes del teorema de Sturm-Liouville.

Prueba La prueba de (1) requiere de algún análisis delicado que aquí no se reflejará.

Para (2), esencialmente, se reproducen los argumentos hechos previamente para los polinomios de Legendre y las funciones de Bessel. Empiece con el hecho que

$$(r\varphi_n')' + (q + \lambda_n p)\varphi_n = 0$$

y

$$(r\varphi_m')' + (q + \lambda_m p)\varphi_m = 0.$$

Multiplique la primera ecuación por φ_m y la segunda por φ_n y reste para obtener

$$(r\varphi_n')'\varphi_m - (r\varphi_m')'\varphi_n = (\lambda_m - \lambda_n) p\varphi_n\varphi_m.$$

Entonces

$$\int_a^b \left[(r(x)\varphi_n'(x))'\varphi_m(x) - (r(x)\varphi_m'(x))'\varphi_n(x)\right] dx = (\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b p(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)\, dx.$$

Como $\lambda_n \neq \lambda_m$, la conclusión (2) será probada si demuestra que el lado izquierdo de la última ecuación es cero. Integrando por partes:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (r(x)\varphi_n'(x))'\varphi_m(x)dx - \int_a^b (r(x)\varphi_m'(x))'\varphi_n(x)dx \\
&= [\varphi_m(x)r(x)\varphi_n'(x)]_a^b - \int_a^b r(x)\varphi_n'(x)\varphi_m'(x)dx \\
&\quad - [\varphi_n(x)r(x)\varphi_m'(x)]_a^b + \int_a^b r(x)\varphi_n'(x)\varphi_m'(x)dx \\
&= r(b)\varphi_m(b)\varphi_n'(b) - r(a)\varphi_m(a)\varphi_n'(a) \\
&\quad - r(b)\varphi_n(b)\varphi_m'(b) + r(a)\varphi_n(a)\varphi_m'(a) \\
&= r(b)\left[\varphi_m(b)\varphi_n'(b) - \varphi_n(b)\varphi_m'(b)\right] - r(a)\left[\varphi_m(a)\varphi_n'(a) - \varphi_n(a)\varphi_m'(a)\right]. \qquad (4.37)
\end{aligned}$$

Para probar que esta cantidad es cero, use las condiciones de la frontera dadas. Suponga primero que tiene un problema regular, con condiciones en la frontera

$$A_1 y(a) + A_2 y'(a) = 0, \quad B_1 y(b) + B_2 y'(b) = 0.$$

Aplicando las condiciones de la frontera en a para φ_n y φ_m, tiene

$$A_1\varphi_n(a) + A_2\varphi_n'(a) = 0$$

y

$$A_1\varphi_m(a) + A_2\varphi_m'(a) = 0.$$

Como supone que A_1 y A_2 no son cero en el problema regular, entonces el sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned}
\varphi_n(a)X + \varphi_n'(a)Y &= 0, \\
\varphi_m(a)X + \varphi_m'(a)Y &= 0
\end{aligned}$$

tiene una solución no trivial (a saber, $X = A_1$, $Y = A_2$). Esto requiere que el determinante de los coeficientes sea cero:

$$\begin{vmatrix} \varphi_n(a) & \varphi_n'(a) \\ \varphi_m(a) & \varphi_m'(a) \end{vmatrix} = \varphi_n(a)\varphi_m'(a) - \varphi_m(a)\varphi_n'(a) = 0.$$

Usando la condición de la frontera en b, obtiene

$$\varphi_n(b)\varphi_m'(b) - \varphi_m(b)\varphi_n'(b) = 0.$$

Por tanto, el lado derecho de la ecuación (4.37) es cero, probando la relación de ortogonalidad en el caso de un problema regular de Sturm-Liouville. La conclusión se prueba similarmente para las otras clases de problemas de Sturm-Liouville, aplicando las condiciones de la frontera pertinentes en la ecuación (4.37).

Para probar la conclusión (3), suponga que un problema de Sturm-Liouville tiene un valor propio complejo $\lambda = \alpha + i\beta$. Sea $\varphi(x) = u(x) + iv(x)$ la función propia correspondiente. Ahora

$$(r\varphi')' + (q + \lambda p)\varphi = 0.$$

Aplicando el conjugado complejo de esta ecuación, observe que $\varphi'(x) = u'(x) + iv'(x)$ y

$$\overline{\varphi'(x)} = u'(x) - iv'(x) = \left(\overline{\varphi(x)}\right)'.$$

Como $r(x)$, $p(x)$ y $q(x)$ son de variable real, estas cantidades son sus propios conjugados, y obtiene

$$(r\overline{\varphi}')' + (q + \overline{\lambda}p)\overline{\varphi} = 0.$$

Esto significa que $\overline{\lambda}$ también es un valor propio, con función propia $\overline{\varphi}$. Ahora, si $\beta \neq 0$, entonces λ y $\overline{\lambda}$ son valores propios distintos, ahora

$$\int_a^b p(x)\varphi(x)\overline{\varphi(x)}\,dx = 0.$$

Pero entonces

$$\int_a^b p(x)[u(x)^2 + v(x)^2]\,dx = 0.$$

Pero para un problema de Sturm-Liouville, se supone que $p(x) > 0$ para $a < x < b$. Por tanto, $u(x)^2 + v(x)^2 = 0$, así

$$u(x) = v(x) = 0$$

en $[a, b]$ y $\varphi(x)$ es la solución trivial. Esto contradice que φ sea una función propia. Concluya que $\beta = 0$, así λ es real.

Por último, para probar (4), suponga que λ es un valor propio de un problema regular de Sturm-Liouville y φ y ψ son funciones propias asociadas con λ. Use las condiciones en la frontera en a, y siguiendo el razonamiento aplicado en la prueba de (2) muestre que

$$\varphi(a)\psi'(a) - \psi(a)\varphi'(a) = 0.$$

Pero entonces el Wronskiano de φ y ψ se hace cero en a, así φ y ψ son linealmente dependientes y uno es un múltiplo constante del otro. ■

Ahora posee la maquinaria necesaria para los desarrollos en funciones propias generales.

4.3.3 Desarrollo en funciones propias

En la resolución de ecuaciones diferenciales, con frecuencia encontrará la necesidad de desarrollar una función en una serie de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria asociada, un problema de Sturm-Liouville. La serie de Fourier, la serie de Fourier-Legendre y la serie de Fourier-Bessel son ejemplos de tales desarrollos. La función a ser desarrollada tendrá algún significado en el problema. Podría ser, por ejemplo, una función de temperatura inicial, o el desplazamiento inicial o la velocidad de una onda.

Para crear un contexto unificado en donde tales desarrollos en serie puedan ser entendidos, considere la analogía con los vectores en el espacio tridimensional. Dado un vector **F**, siempre encontrará números reales a, b y c de manera que

$$\mathbf{F} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}.$$

A pesar de que es fácil encontrar las constantes, se sigue un proceso formal para identificar un patrón. Primero,

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{i} = a\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + b\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + c\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = a,$$

ya que

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1 \quad \text{y} \quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0.$$

Análogamente,

$$b = \mathbf{F}\cdot\mathbf{j} \quad \text{y} \quad c = \mathbf{F}\cdot\mathbf{k}.$$

La ortogonalidad de **i**, **j** y **k** provee un mecanismo adecuado para determinar los coeficientes en el desarrollo por medio del producto punto.

Más generalmente, suponga que **U**, **V** y **W** son cualesquiera vectores distintos de cero en el espacio tridimensional que son mutuamente ortogonales, es decir

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}=\mathbf{U}\cdot\mathbf{W}=\mathbf{V}\cdot\mathbf{W}=0.$$

Estos vectores no tienen que ser unitarios y no tienen que estar alineados con los ejes. Sin embargo, debido a su ortogonalidad, también es posible escribir fácilmente **F** en términos de estos tres vectores. De hecho, si

$$\mathbf{F}=\alpha\mathbf{U}+\beta\mathbf{V}+\gamma\mathbf{W}$$

entonces

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{U}=\alpha\mathbf{U}\cdot\mathbf{U}+\beta\mathbf{V}\cdot\mathbf{U}+\gamma\mathbf{W}\cdot\mathbf{U}=\alpha\mathbf{U}\cdot\mathbf{U},$$

de manera que

$$\alpha=\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{U}}{\mathbf{U}\cdot\mathbf{U}}.$$

Análogamente,

$$\beta=\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{V}}{\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}}\quad\text{y}\quad\gamma=\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{W}}{\mathbf{W}\cdot\mathbf{W}}.\tag{4.38}$$

De nuevo, una fórmula simple con producto punto para los coeficientes.

La idea de expresar un vector como suma de constantes multiplicadas por vectores mutuamente ortogonales, con las fórmulas para los coeficientes, se extiende para escribir las funciones en serie de funciones propias de problemas de Sturm-Liouville, con una fórmula semejante a la ecuación (4.38) para los coeficientes. Ya ha visto tres de tales instancias, que se revisan brevemente en el contexto del teorema de Sturm-Liouville.

Serie de Fourier El problema de Sturm-Liouville es

$$y''+\lambda y=0;\qquad y(-L)=y(L)=0$$

(un problema periódico) con valores propios $n^2\pi^2/L^2$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ y funciones propias

$$1, \cos(\pi x/L), \cos(2\pi x/L), \ldots, \operatorname{sen}(\pi x/L), \operatorname{sen}(2\pi x/L), \ldots$$

Aquí $p(x) = 1$ y el producto punto utilizado es

$$f\cdot g=\int_{-L}^{L} f(x)g(x)\,dx.$$

Si f es suave a pedazos en $[-L, L]$, entonces para $-L < x < L$,

$$\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-))=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+b_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

donde

$$a_n=\frac{\int_{-L}^{L} f(x)\cos(n\pi x/L)\,dx}{\int_{-L}^{L}\cos^2(n\pi x/L)\,dx}=\frac{f(x)\cdot\cos(n\pi x/L)}{\cos(n\pi x/L)\cdot\cos(n\pi x/L)}\quad\text{para } n=0,1,2,\ldots$$

y

$$b_n=\frac{\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}(n\pi x/L)\,dx}{\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}^2(n\pi x/L)\,dx}=\frac{f(x)\cdot\operatorname{sen}(n\pi x/L)}{\operatorname{sen}(n\pi x/L)\cdot\operatorname{sen}(n\pi x/L)}\quad\text{para } n=1,2,\ldots.$$

Serie de Fourier-Legendre El problema de Sturm-Liouville es

$$((1 - x^2)y')' + \lambda y = 0,$$

sin condiciones en la frontera en $[-1, 1]$ ya que $r(x) = 1 - x^2$ se anula en estos extremos. Sin embargo, busca soluciones acotadas. Los valores propios son $n(n + 1)$ cuyas funciones propias correspondientes son los polinomios de Legendre $P_0(x), P_1(x), \ldots$. Como $p(x) = 1$, use el producto punto

$$f \cdot g = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

Si f es suave a pedazos en $[-1, 1]$, entonces para $-1 < x < 1$,

$$\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$$

donde

$$c_n = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx}{\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx} = \frac{f \cdot P_n}{P_n \cdot P_n}.$$

Serie de Fourier-Bessel Considere el problema de Sturm-Liouville

$$(xy')' + \left(\lambda x - \frac{\nu^2}{x}\right) y = 0$$

con condiciones en la frontera $y(1) = 0$ en $(0, 1)$. Los valores propios son $\lambda = j_n^2$ para $n = 1, 2, \ldots$, donde $j_1, j_2, \ldots$ son los ceros positivos de $J_\nu(x)$, y las funciones propias son $J_\nu(j_n x)$. En este problema de Sturm-Liouville, $p(x) = x$ y el producto punto es

$$f \cdot g = \int_0^1 xf(x)g(x)\,dx.$$

Si f es suave a pedazos en $[0, 1]$, entonces para $0 < x < 1$ puede escribir la serie

$$\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_\nu(j_n x),$$

donde

$$c_n = \frac{\int_0^1 xf(x)J_\nu(j_n x)\,dx}{\int_0^1 xJ_\nu^2(j_n x)\,dx} = \frac{f(x) \cdot J_\nu(j_n x)}{J_\nu(j_n x) \cdot J_\nu(j_n x)},$$

nuevamente se ajusta al patrón visto en las otras clases de desarrollos.

Estos desarrollos son casos especiales de una teoría general de desarrollos en series de funciones propias de problemas de Sturm-Liouville.

TEOREMA 4.23 ***Convergencia de los desarrollos de funciones propias***

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ los valores propios de la ecuación diferencial de Sturm-Liouville

$$(ry')' + (q + \lambda p)y = 0$$

en $[a, b]$, con uno de los conjuntos de las condiciones en la frontera especificado previamente. Sean $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ las funciones propias correspondientes y defina el producto punto

$$f \cdot g = \int_a^b p(x)f(x)g(x)\,dx.$$

Sea f suave a pedazos en $[a, b]$. Entonces, para $a < x < b$,

$$\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x),$$

donde

$$c_n = \frac{f \cdot \varphi_n}{\varphi_n \cdot \varphi_n}. \blacksquare$$

Llame a los números

$$\frac{f \cdot \varphi_n}{\varphi_n \cdot \varphi_n} \tag{4.39}$$

los *coeficientes de Fourier de f respecto a las funciones propias de este problema de Sturm-Liouville*. Con esta elección de los coeficientes, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ es el *desarrollo en funciones propias de f* respecto a estas funciones propias.

Si la ecuación diferencial generadora de los valores propios y las funciones propias tienen un nombre especial (tal como la ecuación de Legendre, o la ecuación de Bessel), entonces el desarrollo en función propia se llama usualmente la *serie de Fourier...*, por ejemplo, la serie de Fourier-Legendre y la serie de Fourier-Bessel.

EJEMPLO 4.13

Considere el problema de Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0; \qquad y'(0) = y'(\tfrac{\pi}{2}) = 0.$$

Encuentre de manera rutinaria que los valores propios de este problema son $\lambda = 4n^2$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Correspondiente a $\lambda = 0$, puede elegir $\varphi_0(x) = 1$ como una función propia. Correspondiente a $\lambda = 4n^2$, $\varphi_n(x) = \cos(2nx)$ como una función propia. Esto da el conjunto de funciones propias

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = \cos(2x), \quad \varphi_2(x) = \cos(4x), \ldots.$$

Debido a que el coeficiente de λ en la ecuación diferencial es $p(x) = 1$, y el intervalo es $[0, \pi/2]$, el producto punto para este problema es

$$f \cdot g = \int_0^{\pi/2} f(x)g(x)\,dx.$$

Escribirá el desarrollo en funciones propias de $f(x) = x^2(1 - x)$ para $0 \le x \le \pi/2$. Como f y f' son continuas, este desarrollo convergirá a $x^2(1 - x)$ para $0 < x < \pi/2$. Los coeficientes en este desarrollo son

$$c_0 = \frac{f \cdot 1}{1 \cdot 1} = \frac{\int_0^{\pi/2} x^2(1-x)\,dx}{\int_0^{\pi/2} dx} = \frac{-(1/64)\pi^4 + (1/24)\pi^3}{\pi/2} = \pi^2\left(\frac{1}{12} - \frac{\pi}{32}\right)$$

y, para $n = 1, 2, \ldots,$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{f \cdot \cos(2nx)}{\cos(2nx) \cdot \cos(2nx)} \\ &= \frac{\int_0^{\pi/2} x^2(1-x)\cos(2nx)\,dx}{\int_0^{\pi/2} \cos^2(2nx)\,dx} \\ &= -\frac{1}{4\pi n^4}\left(-4\pi n^2(-1)^n + 3\pi^2 n^2(-1)^n - 6(-1)^n + 6\right). \end{aligned}$$

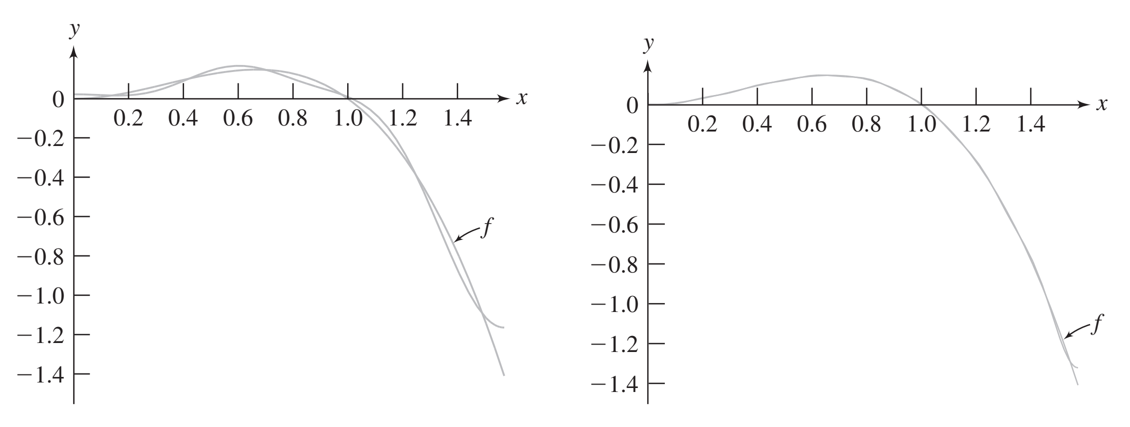


FIGURA 4.15(a) *Quinta suma parcial en el ejemplo 4.13.*

FIGURA 4.15(b) *Décimoquinta suma parcial.*

Por tanto, para $0 < x < \pi/2$,

$$x^2(1-x) = \pi^2\left(\frac{1}{12} - \frac{\pi}{32}\right)$$
$$- \frac{1}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\left(-4\pi n^2(-1)^n + 3\pi^2 n^2(-1)^n - 6(-1)^n + 6\right)\cos(2nx).$$

La figura 4.15(a) muestra la quinta suma parcial de esta serie, comparada con f, y la figura 4.15(b) muestra la décimoquinta suma parcial de este desarrollo. Claramente este desarrollo en función propia está convergiendo rápidamente a $x^2(1 - x)$ en este intervalo. ■

4.3.4 Aproximación en la media y la desigualdad de Bessel

En ésta y en las siguientes dos secciones se discuten algunas propiedades adicionales de los coeficientes de Fourier, así como algunas sutilezas en la convergencia de la serie de Fourier. Para esta discusión, sean $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ funciones propias normalizadas de un problema de Sturm-Liouville en $[a, b]$. *Normalizada* significa que cada función propia φ_n ha sido multiplicada por una constante positiva de manera que $\varphi_n \cdot \varphi_n = 1$. Esto se puede hacer siempre debido a que un múltiplo constante distinto de cero de una función propia es nuevamente una función propia. Ahora tiene

$$\varphi_n \cdot \varphi_m = \int_a^b p(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}.$$

Para estas funciones propias normalizadas, el n-ésimo coeficiente de Fourier es

$$c_n = \frac{f \cdot \varphi_n}{\varphi_n \cdot \varphi_n} = f \cdot \varphi_n. \tag{4.40}$$

Ahora se definirá una medida de qué tan bien aproxima una combinación lineal $\sum_{n=1}^{n} k_n\varphi_n$ a una función dada f.

DEFINICIÓN 4.2 ***Mejor aproximación en la media***

Sea N un entero positivo y sea f una función integrable en $[a, b]$. Una combinación lineal

$$\sum_{n=1}^{N} k_n \varphi_n(x)$$

de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ es la *mejor aproximación en la media* de f *en* $[a, b]$ si los coeficientes $k_1, \ldots, k_N$ minimizan la cantidad

$$I_N(f) = \int_a^b p(x)\left(f(x) - \sum_{n=1}^{N} k_n\varphi_n(x)\right)^2 dx.$$

$I_N(f)$ es el producto punto de $f(x) - \sum_{n=1}^{N} k_n\varphi_n(x)$ con ella misma (con función de peso p). Para vectores en R^3, el producto punto de un vector $\mathbf{V} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ con él mismo es el cuadrado de su longitud:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = a^2 + b^2 + c^2 = (\text{longitud de } \mathbf{V})^2.$$

Esto sugiere que debe definir una longitud para funciones mediante

$$g \cdot g = \int_a^b p(x)g(x)^2\,dx = (\text{longitud de } g)^2.$$

Ahora $I_N(f)$ tiene la interpretación geométrica de ser el (cuadrado de) la longitud de $f(x) - \sum_{n=1}^{N} k_n\varphi_n(x)$. Cuanto más pequeña sea esta longitud, mejor aproxima la combinación lineal $\sum_{n=1}^{N} k_n\varphi_n(x)$ a $f(x)$ en $[a, b]$. Esta aproximación es un promedio sobre todo el intervalo, en contraste a la aproximación en un punto particular, de ahí el término "aproximación en la media". Debe elegir las k_n' para hacer de $\sum_{n=1}^{N} k_n\varphi_n(x)$ la mejor aproximación media posible de f en $[a, b]$, lo que significa hacer la longitud de $f(x) - \sum_{n=1}^{N} k_n\varphi_n(x)$ tan pequeña como sea posible.

Para determinar cómo elegir las k_n', escriba

$$\begin{aligned}
0 \le I_N(f) &= \int_a^b p(x)\left(f(x)^2 - 2\sum_{n=1}^{N} f(x)\varphi_n(x) + \left(\sum_{n=1}^{N} k_n\varphi_n(x)\right)^2\right) dx \\
&= \int_a^b p(x)f(x)^2\,dx - 2\sum_{n=1}^{N} k_n \int_a^b p(x)f(x)\varphi_n(x)\,dx \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} k_n k_m \int_a^b p(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx \\
&= f \cdot f - 2\sum_{n=1}^{N} k_n f \cdot \varphi_n + \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} k_n k_m \varphi_n \cdot \varphi_m \\
&= f \cdot f - 2\sum_{n=1}^{N} k_n f \cdot \varphi_n + \sum_{n=1}^{N} k_n^2 \varphi_n \cdot \varphi_n \\
&= f \cdot f - 2\sum_{n=1}^{N} k_n f \cdot \varphi_n + \sum_{n=1}^{N} k_n^2,
\end{aligned}$$

ya que $\varphi_n \cdot \varphi_n = 1$ para este conjunto normalizado de funciones propias. Ahora sea $c_n = f \cdot \varphi_n$, el n-ésimo coeficiente de Fourier de f para este conjunto normalizado de funciones propias. Complete el cuadrado escribiendo la última desigualdad como

$$\begin{aligned} 0 &\leq f \cdot f - 2\sum_{n=1}^{N} k_n c_n + \sum_{n=1}^{N} k_n^2 - \sum_{n=1}^{n} c_n^2 + \sum_{n=1}^{n} c_n^2 \\ &= f \cdot f + \sum_{n=1}^{N}(c_n - k_n)^2 - \sum_{n=1}^{N} c_n^2. \end{aligned} \tag{4.41}$$

En esta formulación, es obvio que el lado derecho alcanza su mínimo cuando cada $k_n = c_n$. Ha probado el siguiente.

TEOREMA 4.24

Sea f integrable en $[a, b]$ y N un entero positivo. Entonces, la combinación lineal $\sum_{n=1}^{N} k_n\varphi_n$ que es la mejor aproximación en la media de f en $[a, b]$ se obtiene poniendo

$$k_n = f \cdot \varphi_n$$

para $n = 1, 2, \ldots$. ■

Así, para una N dada, la N-ésima suma parcial $\sum_{n=1}^{N} (f \cdot \varphi_n)\varphi_n$ de la serie de Fourier $\sum_{n=1}^{\infty}(f \cdot \varphi_n)\varphi_n$ de f es la mejor aproximación en la media de f por una combinación lineal de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$.

El argumento principal del teorema tiene otra consecuencia importante. Poniendo $k_n = c_n = f \cdot \varphi_n$ en la igualdad (4.41) para obtener

$$0 \leq f \cdot f - \sum_{n=1}^{N}(f \cdot \varphi_n)^2,$$

o

$$\sum_{n=1}^{N}(f \cdot \varphi_n)^2 \leq f \cdot f.$$

Como N puede ser cualquier entero positivo, la serie de los cuadrados de los coeficientes de Fourier de f converge, y la suma de esta serie no puede exceder el producto punto de f con ella misma. Ésta es la desigualdad de Bessel y fue probada en la sección 2.5 (teorema 2.7) para series de Fourier trigonométrica.

TEOREMA 4.25 **Desigualdad de Bessel**

Sea f integrable en $[a, b]$. Entonces la serie de los cuadrados de los coeficientes de Fourier de f respecto a las funciones propias normalizadas $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ converge. Más aún,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f \cdot \varphi_n)^2 \leq f \cdot f. \quad ■$$

Bajo ciertas circunstancias, la desigualdad puede ser reemplazada por una igualdad. Esto lleva a considerar el concepto de convergencia en la media.

4.3.5 Convergencia en la media y el teorema de Parseval

Continuando con el tema de la subsección anterior, suponga que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ son las funciones propias normalizadas de un problema de Sturm-Liouville en $[a, b]$. Si f es continua en $[a, b]$ con derivada continua a pedazos, entonces para $a < x < b$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(f \cdot \varphi_n)\varphi_n(x).$$

Esta convergencia se llama *convergencia puntual*, porque trata con la convergencia de la serie de Fourier individualmente en cada x en (a, b). Bajo ciertas circunstancias, esta serie también puede converger uniformemente.

Además de estas dos clases de convergencia, en el contexto de los desarrollos en funciones propias también se utiliza con frecuencia la convergencia en la media.

DEFINICIÓN 4.3 *Convergencia en la media*

Sea f integrable en $[a, b]$. La serie de Fourier $\sum_{n=1}^{\infty}(f \cdot \varphi_n)\varphi_n$ de f, respecto a las funciones propias normalizadas $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, se dice que converge a f en la media en $[a, b]$ si

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b p(x)\left(f(x) - \sum_{n=1}^{N}(f \cdot \varphi_n)\varphi_n\right)^2 dx = 0.$$

La convergencia en la media de una serie de Fourier de f, a f, sucede cuando la longitud de $f(x) - \sum_{n=1}^{N}(f \cdot \varphi n)\varphi_n(x)$ tiende a cero conforme N tiende a infinito. Ciertamente, esto pasa si la serie de Fourier converge a f, porque entonces $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(f \cdot \varphi_n)\varphi_n(x)$, y esto sucede si f es continua con derivada continua a pedazos.

Para el resto de esta sección, sea $C'[a, b]$ el conjunto de funciones que son continuas en $[a, b]$, con derivadas continuas a pedazos en (a, b).

TEOREMA 4.26

1. Si $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(f \cdot \varphi_n)\varphi_n(x)$ para $a < x < b$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(f \cdot \varphi_n)\varphi_n$ también converge en la media a f en $[a, b]$.
2. Si f está en $C'[a, b]$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(f \cdot \varphi_n)\varphi_n$ converge en la media a f en $[a, b]$. ■

El recíproco de (1) es falso. Es posible que la longitud de $f(x) - \sum_{n=1}^{N}(f \cdot \varphi_n)\varphi_n(x)$ tienda a cero conforme $N \to \infty$ pero que la serie de Fourier no converja a $f(x)$ en el intervalo. Esto es porque la integral en la definición de la convergencia media es un proceso de promedios y no se enfoca en el comportamiento de la serie de Fourier en ningún punto particular.

Se probará que la convergencia en la media para funciones en $C'[a, b]$ es equivalente a poder convertir la desigualdad de Bessel en una igualdad para todas las funciones en esta clase.

TEOREMA 4.27

$\sum_{n=1}^{\infty}(f \cdot \varphi_n)\varphi_n$ converge en la media de f para toda f en $C'[a, b]$ si, y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f \cdot \varphi_n)^2 = f \cdot f$$

para toda f en $C'[a, b]$.

Prueba A partir de los cálculos hechos en la prueba del teorema 4.24, con $k_n = f \cdot \varphi_n$,

$$0 \leq I_N(f) = \int_a^b p(x)\left(f(x) - \sum_{n=1}^{N}(f \cdot \varphi_n)\varphi_n\right)^2 dx = f \cdot f - \sum_{n=1}^{N}(f \cdot \varphi_n)^2.$$

Por tanto,

$$\lim_{N \to \infty} \int_a^b p(x)\left(f(x) - \sum_{n=1}^{N}(f \cdot \varphi_n)\varphi_n\right)^2 dx = 0$$

si, y sólo si

$$f \cdot f - \sum_{n=1}^{\infty}(f \cdot \varphi_n)^2 = 0. \blacksquare$$

Al reemplazar la desigualdad con una igualdad en la desigualdad de Bessel llega a la relación de Parseval. Ahora puede enunciar una condición bajo la cual esto sucede.

COROLARIO 4.1 Teorema de Parseval

Si f está en $C'[a, b]$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f \cdot \varphi_n)^2 = f \cdot f. \blacksquare$$

Esto se sigue inmediatamente a partir de los dos últimos teoremas. Sabe por el teorema 4.26(2) que si f está en $C'[a, b]$, entonces la serie de Fourier de f converge a f en la media. Entonces, por el teorema 4.27, $\sum_{n=1}^{\infty}(f \cdot \varphi_n)^2 = f \cdot f$. Con más esfuerzo, la ecuación de Parseval puede ser probada bajo condiciones más débiles sobre f.

4.3.6 Completez de las funciones propias

La completez es un concepto que quizá se entiende mejor en términos de vectores.

En el espacio tridimensional, el vector $\mathbf{k}$ no se puede escribir como una combinación lineal $\alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$, a pesar de que los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ son ortogonales. La razón para esto es que hay otra dirección en el espacio tridimensional que es ortogonal al plano de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$, e $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ no llevan información acerca de la componente que un vector puede tener en esta tercera dirección. Los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ son incompletos en R^3. En contraste, no existe ningún vector distinto de cero que sea ortogonal a cada uno de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, así, estos vectores son completos en R^3. Cualquier vector tridimensional puede escribirse como combinación lineal de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$.

Ahora considere las funciones propias normalizadas $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ Piense que cada φ_j define una dirección diferente o eje, en el espacio de funciones en consideración, que en este caso es $C'[a, b]$. Estas funciones propias son *completas* en $C'[a, b]$ si la única función en $C'[a, b]$ que es ortogonal a toda función propia es la función cero. En cambio, si existe una función no trivial f en $C'[a, b]$ que sea ortogonal a toda función propia, se dice que las funciones propias son *incompletas*. En este caso hay otro eje, o dirección,

en $C'[a, b]$ que no está determinado por todas las funciones propias. Una función que tiene una componente en esta otra dirección posiblemente no pueda ser representada en una serie de las funciones propias incompletas.

Por tanto, las funciones propias son completas en el espacio de funciones continuas con derivadas continuas a pedazos en (a, b):

TEOREMA 4.28

Las funciones propias normalizadas $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ son completas en $C'[a, b]$. ■

Prueba Suponga que las funciones propias no son completas. Entonces, existe alguna función no trivial f en $C'[a, b]$ que es ortogonal a cada φ_n. Pero debido a que f es ortogonal a cada φ_n, cada $(f, \varphi_n) = 0$, así

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f \cdot \varphi_n)\varphi_n(x) = 0 \quad \text{para } a < x < b.$$

Esta contradicción prueba el teorema. ■

EJEMPLO 4.14

Las funciones propias normalizadas del problema de Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0; \qquad y'(0) = y'(\pi/2) = 0$$

son

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos(2x), \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos(4x), \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos(6x), \ldots.$$

Las constantes se eligen para normalizar a las funciones propias, como

$$\varphi_n \cdot \varphi_n = \int_0^{\pi/2} \varphi_n^2\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{4}{\pi}\cos^2(2nx)\, dx = 1.$$

Este conjunto E de las funciones propias es completo en $C'[0, \pi/2]$. Esto significa que excepto para $f(x) \equiv 0$, no existe f en $C'[a, b]$ que es ortogonal a cada función propia.

Observe el efecto si quita una función propia. Por ejemplo, el conjunto E_1 de funciones propias

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos(4x), \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos(6x), \ldots,$$

está formado quitando $f(x) = (2/\sqrt{\pi})\cos(2x)$ de E. Ahora $\cos(2x)$ no tiene desarrollo en términos de E_1, a pesar que $\cos(2x)$ es continua con derivada continua en $(0, \pi/2)$. Suponga que

$$\cos(2x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}c_0 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos(2nx),$$

entonces

$$c_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \cos(2x) = 0$$

y, para $n = 2, 3, \ldots,$

$$c_n = \cos(2x) \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos(2nx) = 0,$$

lo que implica que $\cos(2x) = 0$ para $0 < x < \pi/2$. Esto es un absurdo. El conjunto agujereado de funciones propias E_1, al que se le quitó una función de E, no es completo en $C'[0, \pi/2]$. ■

SECCIÓN 4.3 PROBLEMAS

En cada uno de los problemas del 1 al 12, clasifique los problemas de Sturm-Liouville como regular, periódico, o singular; indique el intervalo relevante; encuentre los valores propios; y, para cada valor propio, encuentre una función propia. En algunos casos los valores propios pueden ser definidos implícitamente por una ecuación.

1. $y'' + \lambda y = 0;\ y(0) = 0,\ y'(L) = 0$

2. $y'' + \lambda y = 0;\ y'(0) = 0,\ y'(L) = 0$

3. $y'' + \lambda y = 0;\ y'(0) = y(4) = 0$

4. $y'' + \lambda y = 0;\ y(0) = y(\pi),\ y'(0) = y'(\pi)$

5. $y'' + \lambda y = 0;\ y(-3\pi) = y(3\pi),\ y'(-3\pi) = y'(3\pi)$

6. $y'' + \lambda y = 0;\ y(0) = 0,\ y(\pi) + 2y'(\pi) = 0$

7. $y'' + \lambda y = 0;\ y(0) - 2y'(0) = 0,\ y'(1) = 0$

8. $y'' + 2y' + (1 + \lambda)y = 0;\ y(0) = y(1) = 0$

9. $(e^{2x}y')' + \lambda e^{2x}y = 0;\ y(0) = y(\pi) = 0$

10. $(e^{-6x}y')' + (1 + \lambda)e^{-6x}y = 0;\ y(0) = y(8) = 0$

11. $(x^3y')' + \lambda xy = 0;\ y(1) = y(e^3) = 0$

12. $(x^{-1}y')' + (4 + \lambda)x^{-3}y = 0;\ y(1) = y(e^4) = 0$

En cada uno de los problemas del 13 al 18, encuentre el desarrollo en funciones propias de la función dada en las funciones propias del problema de Sturm-Liouville. En cada caso, determine a qué converge el desarrollo en funciones propias en el intervalo y dibuje la gráfica de la función y la suma de los primeros N términos del desarrollo en funciones propias en el mismo conjunto de ejes para el intervalo dado y la N dada. (En el problema 13, haga la gráfica para $L = 1$).

13. $f(x) = 1 - x$ para $0 \le x \le L$
$y'' + \lambda y = 0;\ y(0) = y(L) = 0;\ N = 40$

14. $f(x) = |x|$ para $0 \le x \le \pi$
$y'' + \lambda y = 0;\ y(0) = y'(\pi) = 0;\ N = 30$

15. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } 0 \le x \le 2 \\ 1 & \text{para } 2 < x \le 4 \end{cases}$
$y'' + \lambda y = 0;\ y'(0) = y(4) = 0;\ N = 40$

16. $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ para $0 \le x \le \pi$
$y'' + \lambda y = 0;\ y'(0) = y'(\pi) = 0;\ N = 30$

17. $f(x) = x^2$ para $-3\pi \le x \le 3\pi$
$y'' + \lambda y = 0;\ y(-3\pi) = y(3\pi),\ y'(-3\pi) = y'(3\pi);$
$N = 10$

18. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1 & \text{para } \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$
$y'' + 2y' + (1 + \lambda)y = 0;\ y(0) = y(1) = 0;\ N = 30$

19. Escriba la desigualdad de Bessel para la función $f(x) = x(4 - x)$ para las funciones propias del problema de Sturm-Liouville del problema 3.

20. Escriba la desigualdad de Bessel para la función $f(x) = e^{-x}$ para las funciones propias del problema de Sturm-Liouville del problema 6.

4.4 Las onduletas

4.4.1 La idea detrás de las onduletas

Los años recientes han visto una explosión tanto en el desarrollo matemático de onduletas como en sus aplicaciones, que incluye el análisis de señales, compresión de datos, filtrado y electromagnetismo. Aquí nuestro propósito es introducir suficientes ideas que están detrás de las onduletas para permitir al estudiante proseguir con los tratamientos más completos.

Piense en una función definida en la recta real como una señal. Si la señal contiene una frecuencia fundamental ω_0, entonces f es una función periódica con periodo $2\pi/\omega_0$ y la serie de Fourier de $f(t)$ es una

herramienta para analizar el contenido de frecuencia de la señal. El espectro de amplitud de f consiste de un trazo de puntos $(n\omega_0, c_n/2)$ en el cual

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

con a_0 y b_n los coeficiente de Fourier de f. Bajo ciertas condiciones sobre f, esto permite representar una señal como una serie trigonométrica visualizando las frecuencias naturales

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t).$$

Con frecuencia se modela la señal tomando una suma parcial de la serie de Fourier:

$$f(t) \approx \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t).$$

Aunque este proceso ha probado ser útil en muchas instancias, la representación trigonométrica en serie de Fourier no siempre es el mejor dispositivo para analizar señales. Primero, puede estar interesado en una señal que no es periódica, o aún general, puede tener una señal que está definida sobre toda la recta real sin periodicidad, y sólo requiere que su energía sea finita. Esto significa que $\int_{-\infty}^{\infty} (f(t))^2\, dt$ es finita o, si $f(t)$ es de variable compleja, que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt$ es finita. Esta integral es el contenido de energía de la señal, y las funciones que tienen energía finita se dice que son *cuadrado integrables*. En general, los desarrollos de Fourier no son la mejor herramienta para el análisis de tales funciones.

Hay otras desventajas para las series trigonométricas de Fourier. Para una f dada, podría tener que elegir N muy grande para modelar $f(t)$ mediante una suma parcial de una serie de Fourier. Finalmente, si está interesado en el comportamiento de $f(t)$ en algún intervalo finito de tiempo, o cerca de algún tiempo en particular, no le es factible aislar esos términos en el desarrollo de Fourier que describen este comportamiento, sino que debe tomar toda la serie de Fourier, o toda su suma parcial, si está modelando la señal.

Para ilustrar lo anterior considere la señal mostrada en la figura 4.16. Explícitamente,

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \le t < \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{5} & \text{para } \frac{1}{4} \le t < \frac{3}{8} \\ \frac{11}{5} & \text{para } \frac{3}{8} \le t < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{para } \frac{1}{2} \le t < \frac{3}{4} \\ -3 & \text{para } \frac{3}{4} \le t < 1 \\ -\frac{4}{5} & \text{para } 1 \le t < \frac{5}{4} \\ \frac{14}{5} & \text{para } \frac{5}{4} \le t < \frac{11}{8} \\ \frac{4}{5} & \text{para } \frac{11}{8} \le t < \frac{3}{2} \\ 0 & \text{para } t \ge \frac{3}{2} \quad \text{y para } t < 0 \end{cases}.$$

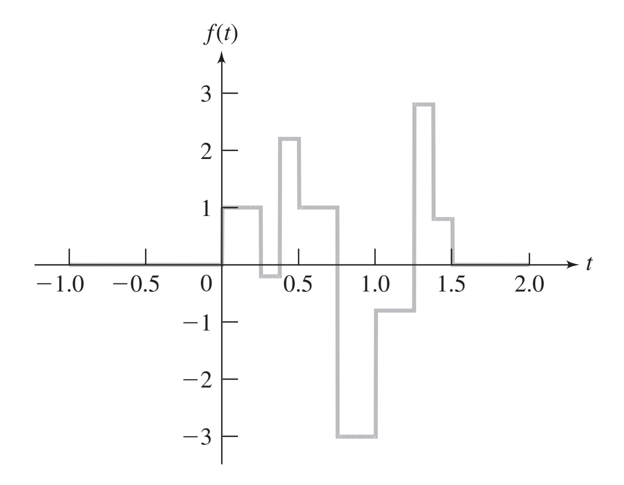


FIGURA 4.16 *La señal f (t).*

La serie de Fourier de f en $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ es

$$\frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{3}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{3}\right),$$

donde

$$a_n = -\frac{1}{5n\pi}\left[-6 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{6}\right) + 12 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right) - 6 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) - 20 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 11 \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + 18 \operatorname{sen}\left(\frac{5n\pi}{6}\right) - 10 \operatorname{sen}\left(\frac{11n\pi}{12}\right)\right]$$

y

$$b_n = \frac{1}{5n\pi}\left[-6 \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + 5 + 12 \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - 6 \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - 20 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 11 \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + 18 \cos\left(\frac{5n\pi}{6}\right) - 10 \cos\left(\frac{11n\pi}{12}\right) - 4 \cos(n\pi)\right].$$

Esta serie converge muy despacio a la función. La figura 4.17(a) muestra la octagésima suma parcial de esta serie, y la figura 4.17(b) la centésima suma parcial. Aun con este número de términos, esta suma parcial no modela muy bien la señal. Además, si está interesado en sólo parte de la señal, no hay manera de distinguir los términos de la serie de Fourier que llevan la mayor información acerca de esta parte de la señal. Dicho de otra manera, la serie de Fourier no localiza información.

Estas consideraciones sugieren que busque otros conjuntos de funciones ortogonales completas en las cuales las funciones cuadrado integrables puedan ser expandidas y que superen algunas de las dificultades recién mencionadas para las series trigonométricas de Fourier. Esta es una motivación primaria para las onduletas. La discusión de onduletas comienza desarrollando una onduleta importante en detalle, esta construcción servirá después para sugerir algunas de las ideas detrás de las onduletas en general.

4.4.2 Las onduletas de Haar

Construirá un ejemplo que es importante tanto históricamente como para las aplicaciones en nuestros días. Las onduletas de Haar fueron las primeras en ser descubiertas (alrededor de 1910) y sirven como modelo de una aproximación al desarrollo de otras onduletas.

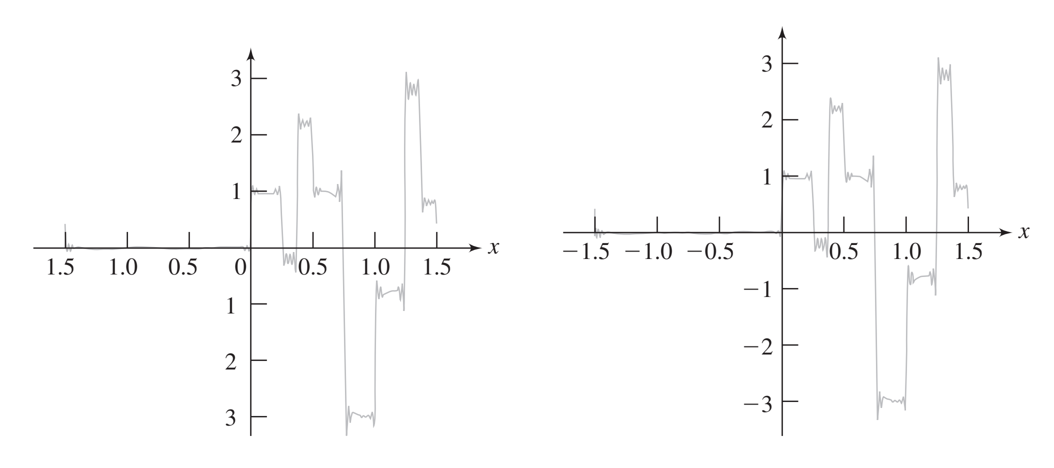


FIGURA 4.17(a) *Octagésima suma parcial de la serie de Fourier de la señal.*

FIGURA 4.17(b) *Centésima suma parcial de la serie de Fourier de la señal.*

Sea $L^2(R)$ el conjunto de todas las funciones con valores reales que están definidas en toda la recta real y son cuadrado integrables. $L^2(R)$ tiene la estructura de un espacio vectorial, ya que las combinaciones lineales $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_n$ de funciones cuadrado integrables son cuadrado integrables. El producto punto para las funciones en $L^2(R)$ es

$$f \cdot g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\, dt.$$

Ahora considere la función característica de un intervalo I (o de cualquier conjunto de números en la recta real). Esta función se denota por χ_I y tiene el valor 1 para t en I y cero para t que no esté en I. Esto es,

$$\chi_I(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \text{ está en } I \\ 0 & \text{si } t \text{ no está en } I \end{cases}.$$

Use la función característica del intervalo unitario semiabierto:

$$\chi_{[0,1)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{si } t < 0 \quad \text{o si } t \geq 1 \end{cases}.$$

En la figura 4.18 se muestra la gráfica de $\chi_{[0,1)}$.

Se trata de introducir nuevas funciones tanto por escalamiento como por traslación, con el objetivo de producir un conjunto ortonormal completo de funciones en $L^2(R)$. Recuerde que la gráfica de $f(t-k)$

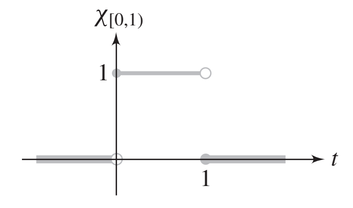


FIGURA 4.18 $\chi_{[0,1)}$

es la gráfica de $f(t)$ trasladada k unidades a la derecha si k es positiva, y $|k|$ unidades a la izquierda si k es negativa. Por ejemplo, la figura 4.19(a) muestra la gráfica de

$$f(t) = \begin{cases} t\,\text{sen}(t) & \text{para } 0 \leq t \leq 15 \\ 0 & \text{para } t < 0 \quad \text{y para } t > 15 \end{cases}.$$

La figura 4.19(b) es la gráfica de $f(t+5)$ (gráfica de $f(t)$ corrida cinco unidades a la izquierda), y la figura 4.19(c) es la gráfica de $f(t-5)$ (la gráfica de $f(t)$ corrida cinco unidades a la derecha). Además, $f(kt)$ es un escalamiento de la gráfica de f. $f(kt)$ comprime (si $k > 1$) o estira (si $0 < k < 1$) la gráfica de $f(t)$ para $a \leq t \leq b$ sobre el intervalo $[a/k, b/k]$. Por ejemplo, la figura 4.20(a) muestra una gráfica de

$$f(t) = \begin{cases} t\,\text{sen}(\pi t) & \text{para } -2 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{para } t < -2 \quad \text{y para } t > 0 \end{cases}.$$

La figura 4.20(b) muestra la gráfica de $f(3t)$, comprimiendo la gráfica de la figura 4.20(a) a la derecha e izquierda, y la figura 4.20(c) muestra la gráfica de $f(t/3)$, estirando la gráfica de la figura 4.20(a).

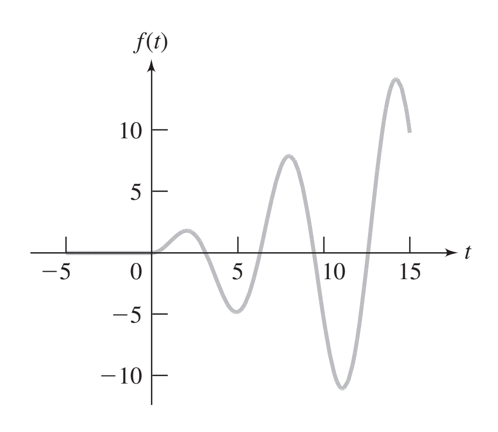


FIGURA 4.19(a)

$$f(t) = \begin{cases} t\,\text{sen}(t) & \text{para } 0 \leq t \leq 15 \\ 0 & \text{para } t < 0 \quad \text{y para } t > 15 \end{cases}.$$

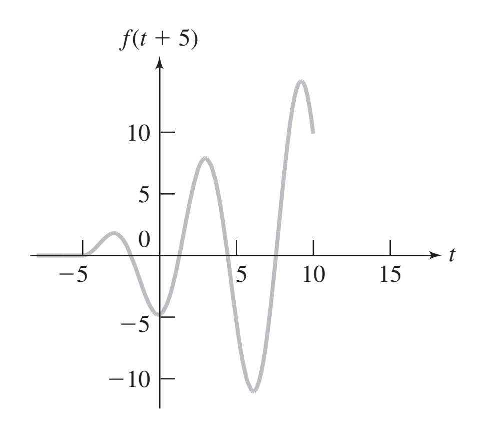


FIGURA 4.19(b) $f(t+5)$.

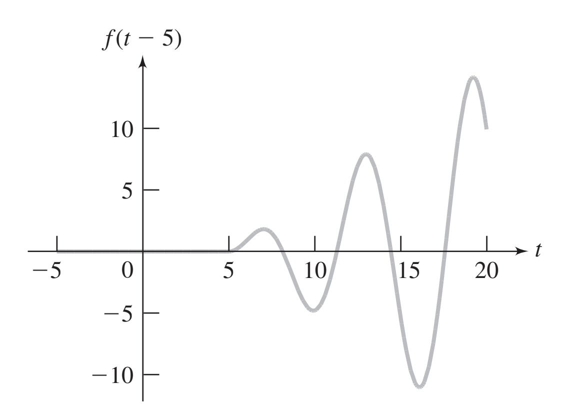


FIGURA 4.19(c) $f(t-5)$.

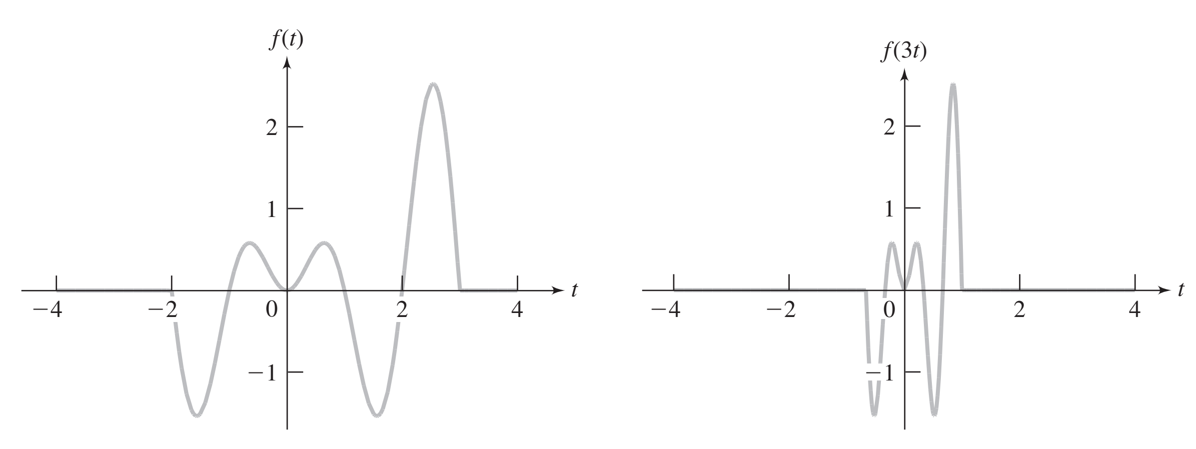


FIGURA 4.20(a)

$$f(t) = \begin{cases} t\,\mathrm{sen}(\pi t) & \text{para } -2 \le t \le 3 \\ 0 & \text{para } t < -2 \quad \text{y para } t > 0 \end{cases}.$$

FIGURA 4.20(b) $f(3t)$.

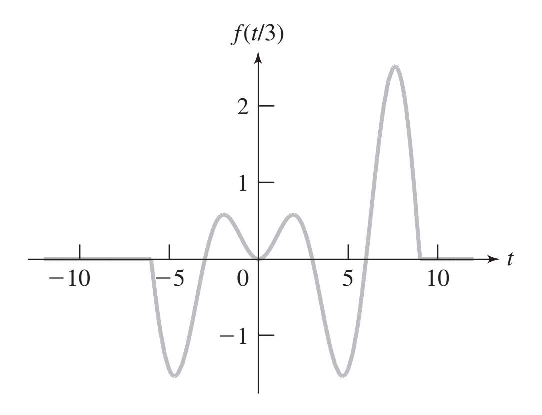


FIGURA 4.20(c) $f(t/3)$.

Sea $\varphi(t) = \chi_{[0,1)}(t)$ y defina

$$\psi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t-1) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \le t < \dfrac{1}{2} \\ -1 & \text{para } \dfrac{1}{2} \le t < 1 \\ 0 & \text{para } t < 0 \quad \text{y para } t \ge 1 \end{cases}.$$

En la figura 4.21 se muestra una gráfica de ψ.

Después, considere las traslaciones $\psi(t-n)$, en donde n es cualquier entero. Esta es la función

$$\begin{aligned} \psi(t-n) &= \varphi(2(t-n)) - \varphi(2(t-n)-1) \\ &= \varphi(2t-2n) - \varphi(2t-2n-1) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{para } n \le t < n + \dfrac{1}{2} \\ -1 & \text{para } n + \dfrac{1}{2} \le t < n+1 \\ 0 & \text{para } t < n \quad \text{y para } t \ge n+1 \end{cases}. \end{aligned}$$

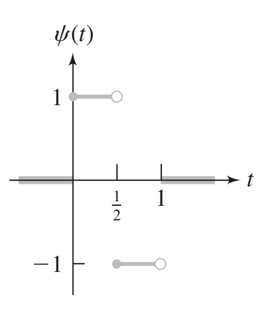


FIGURA 4.21
$\psi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t - 1)$,
con $\varphi(t) = \chi_{[0,1)}$.

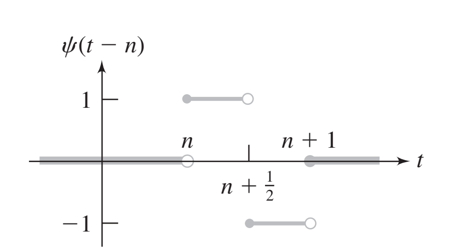


FIGURA 4.22
$\psi(t - n) = \varphi(2(t - n)) - \varphi(2(t - n) - 1)$.

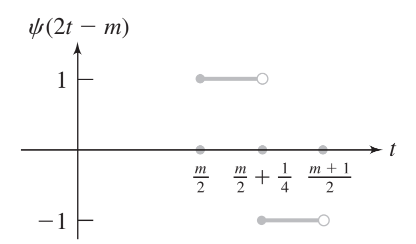


FIGURA 4.23 $\psi(2t - m) = \varphi(2(2t - m)) - \varphi(2(2t - m) - 1)$.

En la figura 4.22 se muestra la gráfica de $\psi(t - n)$.

Ahora combine la traslación con el escalamiento. Considere la función

$$\begin{aligned}
\psi(2t - m) &= \varphi(2(2t - m)) - \varphi(2(2t - m) - 1) \\
&= \varphi(4t - 2m) - \varphi(4t - 2m - 1) \\
&= \begin{cases} 1 & \text{para } \dfrac{m}{2} \leq t < \left(\dfrac{m}{2}\right) + \dfrac{1}{4} \\[2ex] -1 & \text{para } \left(\dfrac{m}{2}\right) + \dfrac{1}{4} \leq t < \dfrac{(m+1)}{2} \\[2ex] 0 & \text{para } t < \dfrac{m}{2} \quad \text{y para } t \geq \dfrac{(m+1)}{2} \end{cases},
\end{aligned}$$

en donde m es cualquier entero. Se muestra la gráfica de esta función en la figura 4.23.

Antes de proseguir, observe que estas funciones de traslación y de escalamiento son ortogonales en $L^2(R)$.

LEMA 4.2

1. Para enteros distintos n y m,

$$\psi(t - n) \cdot \psi(t - m) = 0$$

y

$$\psi(2t - n) \cdot \psi(2t - m) = 0.$$

2. Para cualesquiera enteros n y m,

$$\psi(t-n)\cdot\psi(2t-m)=0.$$

Prueba Si $n \neq m$, entonces los intervalos $[n, n+1)$ en los cuales $\psi(t-n)$ toma sus valores distintos de cero, y $[m, m+1)$ en el cual $\psi(t-m)$ toma sus valores distintos de cero, son ajenos. Entonces $\psi(t-n)\psi(t-m)=0$ para todo t y

$$\psi(t-n)\cdot\psi(t-m)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t-n)\psi(t-m)\,dt=0.$$

Análogamente, para $n \neq m$, los intervalos $[n/2, (n+1)/2)$ y $[m/2, (m+1)/2)$ en los cuales $\psi(2t-n)$ y $\psi(2t-m)$, respectivamente, toman sus valores distintos de cero, son ajenos, así $\psi(2t-n)\cdot\psi(2t-m)=0$.

Para (2), sean n y m enteros cualesquiera. Si los intervalos en los cuales $\psi(t-n)$ y $\psi(2t-m)$ toman valores distintos de cero son ajenos, entonces estas funciones son ortogonales. Hay dos casos en los que estos intervalos no son ajenos.

Caso 1 $n=m/2$
En este caso

$$\psi(t-n)\psi(2t-m)=\begin{cases}1 & \text{para } n\le t<n+\dfrac{1}{4}\\[2ex] -1 & \text{para } n+\dfrac{1}{4}\le t<n+\dfrac{1}{2}\\[2ex] 0 & \text{para } t<n \quad \text{y para } t\ge n+\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Entonces

$$\psi(t-n)\cdot\psi(2t-m)=\int_{n}^{n+1/4}dt-\int_{n+1/4}^{n+1/2}dt=0.$$

Caso 2 $n+1/2=m/2$
Ahora

$$\psi(t-n)\psi(2t-m)=\begin{cases}-1 & \text{para } n+\dfrac{1}{2}\le t<n+\dfrac{3}{4}\\[2ex] 1 & \text{para } n+\dfrac{3}{4}\le t<n+1\\[2ex] 0 & \text{para } t<n+\dfrac{1}{2} \quad \text{y para } t\ge n+\dfrac{3}{4}\end{cases}$$

así

$$\psi(t-n)\cdot\psi(2t-m)=-\int_{n+1/2}^{n+3/4}dt+\int_{n+3/4}^{n+1}dt=0. \quad ■$$

Aunque las funciones $\psi(t-n)$ y $\psi(2t-m)$ son ortogonales en $L^2(R)$, no forman un conjunto completo, cuando n y m varían sobre los enteros. Queda para el estudiante encontrar funciones cuadrado integrables no triviales (esto es, distintas de cero al menos en algún intervalo) que sean ortogonales a todas estas funciones trasladadas y escaladas.

Ahora la idea es extender este conjunto de funciones usando factores de escalamiento 2^m para m entero, para obtener funciones que tomen valores constantes distintos de cero en los intervalos que puedan hacerse más cortos (m positiva) o más largos (m negativa). Sea

$$\sigma_{m,n}(t)=\psi(2^m t-n)$$

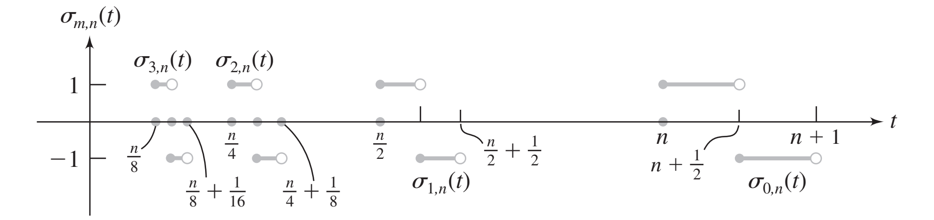


FIGURA 4.24 $\sigma_{m,n}(t)$ *para* $m = 0, 1, 2, 3$.

para cada entero m y cada entero n. Entonces

$$\sigma_{m,n}(t) = \varphi(2^{m+1}t - 2n) - \varphi(2^{m+1}t - 2n - 1)$$
$$= \begin{cases} 1 & \text{para } \dfrac{n}{2^m} \le t < \dfrac{n}{2^m} + \dfrac{1}{2^{m+1}} \\ -1 & \text{para } \dfrac{n}{2^m} + \dfrac{1}{2^{m+1}} \le t < \dfrac{n}{2^m} + \dfrac{1}{2^m} \\ 0 & \text{para } t < \dfrac{n}{2^m} \quad \text{y para } t \ge \dfrac{n}{2^m} + \dfrac{1}{2^m} \end{cases}.$$

La figura 4.24 muestra las gráficas de $\sigma_{0,n}(t)$, $\sigma_{1,n}(t)$, $\sigma_{2,n}(t)$ y $\sigma_{3,n}(t)$ en el mismo conjunto de ejes, para compararlas. Observe que n determina qué tan lejos sobre el eje t aparece la gráfica, mientras que m controla el tamaño del intervalo sobre el cual la función es distinta de cero (más corto para m creciente y positiva, más largo para $|m|$ creciente pero m negativa). En el dibujo n es un entero positivo, pero n también puede elegirse negativo, en cuyo caso las gráficas están a la izquierda del eje vertical.

Estas funciones forman un conjunto ortogonal en $L^2(R)$.

TEOREMA 4.29

Si n, m, n' y m' son enteros, y $(m, n) \neq (m', n')$, entonces

$$\sigma_{m,n} \cdot \sigma_{m',n'} = 0. \ \blacksquare$$

Se deja al estudiante que pruebe este resultado.

Un último detalle antes de abordar el punto principal. Las $\sigma'_{m,n}$ son ortogonales, pero no son ortonormales. Esto se arregla fácilmente. Divida cada una de estas funciones entre su longitud, como se definió por el producto punto en $L^2(R)$. Calcule

$$(\text{longitud de } \sigma_{m,n})^2 = \sigma_{m,n} \cdot \sigma_{m,n} = \int_{n/2^m}^{n/2^m+1/2^m} \sigma_{m,n}^2(t)\, dt = \int_{n/2^m}^{n/2^m+1/2^m} dt = \frac{1}{2^m}.$$

Esto sugiere que defina las funciones

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{m/2}\sigma_{m,n}(t) = 2^{m/2}\left[\varphi(2^{m+1}t - 2n) - \varphi(2^{m+1}t - 2n - 1)\right]$$
$$= \begin{cases} 2^{m/2} & \text{para } \dfrac{n}{2^m} \le t < \dfrac{n}{2^m} + \dfrac{1}{2^{m+1}} \\ -2^{m/2} & \text{para } \dfrac{n}{2^m} + \dfrac{1}{2^{m+1}} \le t < \dfrac{n}{2^m} + \dfrac{1}{2^m} \\ 0 & \text{para } t < \dfrac{n}{2^m} \quad \text{y para } t \ge \dfrac{n}{2^m} + \dfrac{1}{2^m} \end{cases}.$$

Las funciones $\psi_{m,n}$ forman un conjunto ortonormal en $L^2(R)$. Estas funciones son las *onduletas de Haar*. En la construcción, φ es llamada la *función de escalamiento*, y $\psi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t - 1)$ es la *onduleta madre*. Las gráficas de estas onduletas son similares a las gráficas de la figura 4.24, pero el segmento en

la altura 1 en la figura 4.24 está ahora en la altura $2^{m/2}$, y el segmento en la altura -1 en la figura 4.24 está ahora en la altura $-2^{m/2}$.

Las onduletas de Haar son completas en $L^2(R)$. La idea detrás de esto se puede visualizar como sigue. Si f es cuadrado integrable, entonces $f(t)$ puede ser aproximada tan exactamente como desee por una función g que tiene soporte compacto ($g(t) = 0$ fuera de algún intervalo cerrado) y que tiene valores constantes en los intervalos semiabiertos de la forma $[n/2^m, (n+1)/2^m)$, con n y m enteros. Tales intervalos son de longitud $1/2^m$, los cuales se pueden hacer más largos o más cortos debido a la elección del entero m. Por su lado, g puede ser aproximada tanto como quiere por una suma de constantes multiplicadas por las onduletas de Haar, las cuales están definidas en tales intervalos, con el error en la aproximación tendiendo a cero conforme el número de términos en la suma es más grande.

4.4.3 Un desarrollo en onduletas

Suponga que f es una función cuadrado integrable. Puede intentar un desarrollo de f en una serie de las onduletas de Haar, que forman un conjunto ortonormal completo en $L^2(R)$. Tal desarrollo tiene la forma

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{mn}\psi_{m,n}(t).$$

La igualdad en esta expresión significa que la serie de la derecha converge en la media a $f(t)$. Esto significa que

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(t) - \sum_{m=-\infty}^{M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{mn}\psi_{m,n}(t) \right)^2 dt = 0.$$

Los coeficientes c_{mn} pueden ser encontrados en la forma usual usando la ortonormalidad de las onduletas de Haar:

$$f \cdot \psi_{m_0,n_0} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{mn}\psi_{m,n} \cdot \psi_{m_0,n_0} = c_{m_0 n_0}.$$

Complete el ejemplo que empezó en la sección 4.5.1, en el cual f es la señal cuya gráfica se muestra en la figura 4.16. Como vio en las figuras 4.17(a) y (b), debe usar un número muy grande de términos para modelar esta señal con la suma parcial de su desarrollo de Fourier en $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$. Sin embargo, si calcula los coeficientes en el desarrollo de Haar, encuentra que

$$f(t) = \psi_{0,0}(t) + \sqrt{2}\psi_{1,1}(t) - 0.6\psi_{2,1}(t) - 0.4\sqrt{2}\psi_{1,2}(t) + \psi_{2,5}(t).$$

Para algunos propósitos querrá los desarrollos trigonométricos de Fourier, pero para esta señal las onduletas de Haar proveen un desarrollo muy eficiente.

4.4.4 El análisis de multirresolución con las onduletas de Haar

El término *análisis de multirresolución* se refiere a una sucesión de subespacios cerrados de $L^2(R)$ que están relacionados con el uso del escalamiento en la definición de un conjunto de onduletas. Enseguida se analiza lo que significa esto en el contexto de las onduletas de Haar.

Debido a que $L^2(R)$ tiene la estructura de un espacio vectorial, se satisfacen las siguientes tres condiciones:

1. Las combinaciones lineales $\sum_{j=1}^{n} c_j f_j$ de funciones en $L^2(R)$ también están en $L^2(R)$.
2. La función cero, $\theta(t) = 0$ para todo t, está en $L^2(R)$ y sirve como el vector cero de $L^2(R)$. Para cualquier función f en $L^2(R)$, $f + \theta = f$.
3. Si f está en $L^2(R)$, $-f$, definida por $(-f)(t) = -f(t)$, también está en $L^2(R)$.

Un conjunto S de funciones cuadrado integrables se dice que es un subespacio de $L^2(R)$ si S tiene al menos una función en él, y siempre que f y g estén en S, entonces $f - g$ está en S. Por ejemplo, el conjunto de todos los múltiplos constantes de $\chi_{[0,1]}$ forman un subespacio de $L^2(R)$.

Un subespacio S es cerrado si las sucesiones convergentes de funciones en S tienen sus funciones límite en S. Por ejemplo, el subespacio de todas las funciones continuas cuadrado integrables no es cerrado, ya que un límite (en el sentido de convergencia en la media) de funciones continuas puede no ser continuo.

Si un subespacio S no es cerrado, es posible formar el "menor" de los subespacios de $L^2(R)$ que contiene a todas las funciones en S, junto con los límites de convergencia de las sucesiones de funciones en S. Este subespacio, que puede ser todo $L^2(R)$, se llama la *cerradura* de S, y se denota por $\overline{S}$. $\overline{S}$ es cerrado, ya que por su construcción tiene todos los límites de sucesiones convergentes de funciones que están en este espacio.

Enseguida se probará cómo las onduletas de Haar generan una sucesión de subespacios cerrados de $L^2(R)$, que puede ser indexada con los enteros de manera que cada uno esté contenido en el siguiente en la lista. Los espacios están generados por diferentes escalas de la función de escalamiento φ y pueden ser pensados como asociados con los diferentes grados de resolución de la señal.

Para empezar a definir estos espacios, sea S_0 el conjunto de todas las combinaciones lineales de la función de escalamiento trasladada. Estas funciones de escalamiento trasladadas tienen la forma $\varphi(t - n)$ para n entero, y una función típica en S_0 tiene la forma

$$\sum_{j=1}^{N} c_j \varphi(t - n_j),$$

donde N es un entero positivo, los c_j' son números reales, y cada n_j es un entero. Ahora, sea V_0 la cerradura de S_0:

$$V_0 = \overline{S_0}.$$

Ahora, sea S_m el espacio de todas las combinaciones lineales de las funciones $\varphi(2^m t - n)$, donde n varía en los enteros y m es un entero fijo en la definición de S_m. Sea

$$V_m = \overline{S_m}.$$

A partir de la propiedad de escalamiento de la función de escalamiento,

$$\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t - 1),$$

ha encontrado que $f(t)$ está en V_m exactamente cuando $f(2t)$ está en V_{m+1}, y cada V_m está contenida dentro de V_{m+1} (escrito $V_m \subset V_{m+1}$). Así los subespacios cerrados V_m, con m entero, forman una cadena ascendente:

$$\cdots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots$$

Esta cadena tiene dos propiedades adicionales de importancia. Primero, no hay ninguna función no trivial contenida en todo V_m. La intersección de todos los subespacios cerrados V_m consiste sólo de la función cero y, finalmente, la cadena ascendente termina en $L^2(R)$. Esto significa que toda función en $L^2(R)$ tiene un desarrollo en serie en términos de las funciones de Haar, un hecho ya referido.

Se dice que los espacios V_m forman un *análisis de multirresolución* de $L^2(R)$. Este análisis de multirresolución está generado por la función de escalamiento φ.

4.4.5 La construcción general de onduletas y el análisis de multirresolución

Las onduletas de Haar han sido conocidas por cerca de un siglo, junto con la cadena de subespacios que forman el análisis de multirresolución de $L^2(R)$. Sin embargo, por algún tiempo no se supo cómo se podría

duplicar esta construcción, para obtener un análisis de multirresolución a partir de funciones de escalamiento distintas. Para este fin sirve la clave de la construcción de Haar para dar una definición de una función de escalamiento y el análisis de multirresolución asociado.

DEFINICIÓN 4.4 ***La función de escalamiento y el análisis de multirresolución asociado***

Sea φ en $L^2(R)$. Entonces φ es una función de escalamiento con análisis de multirresolución $\{V_m\}$ si

$$\cdots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots$$

es una cadena ascendente de subespacios cerrados de $L^2(R)$ que satisface las condiciones:

1. Las funciones trasladadas $\varphi(t-n)$, para n entero, son ortonormales, y toda función en V_0 es una combinación lineal de las funciones de esta forma.
2. No existe ninguna función no trivial que pertenezca a todo V_m (esto es, los V'_m tienen intersección trivial).
3. $f(t)$ está en V_m exactamente cuando $f(2t)$ está en V_{m+1}.
4. Toda función en $L^2(R)$ puede ser desarrollada en una serie de funciones de los V'_m.

V_0 es un subespacio de V_1, el cual contiene funciones ortogonales a toda función en V_0. El subespacio de V_1 que contiene a todas estas funciones es llamado el *complemento ortogonal* de V_0 en V_1. Para hacer una analogía con los vectores en R^3, los múltiplos constantes de **k** forman un subespacio de R^3 que es el complemento ortogonal del plano definido por **i** y **j**. Todo vector en este complemento ortogonal es ortogonal a cada combinación lineal $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.

Ahora use la función de escalamiento para producir una onduleta madre ψ, con la propiedad que toda función en este complemento ortogonal de V_0 en V_1 es una combinación lineal de trasladados $\psi(t-n)$. Si existe tal onduleta madre, entonces forme la familia de onduletas

$$\psi_{mn} = 2^{m/2}\psi(2^m t - n)$$

para enteros m y n.

4.4.6 Las onduletas de Shannon

Las onduletas de Haar forman un prototipo para las onduletas y el análisis de multirresolución, en parte porque fueron las primeras y en parte porque es relativamente fácil trabajar con ellas y visualizarlas. La razón por la cual pasaron tantos años antes de encontrar otros ejemplos de función de escalamiento/onduleta/análisis de multirresolución es que involucra un análisis bastante pesado. Sin embargo, hay otros ejemplos relativamente simples. Uno consiste de las onduletas de Shannon. Para éstas, empiece con la transformada de Fourier de una función potencial de escalamiento. Sea

$$\hat{\varphi}(\omega) = \chi_{[-\pi,\pi)}.$$

Tomando la transformada inversa de Fourier, obtiene

$$\varphi(t) = \frac{\operatorname{sen}(\pi t)}{\pi t}.$$

Esta función aparece en la reconstrucción del teorema de Shannon, que fue probado en la sección 3.4.7 para funciones de ancho de banda $\leq L$. En el caso que $L = \pi$, el teorema establece que una señal f cuya

transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$ vale cero fuera del intervalo $[-\pi, \pi]$ (esto es, f tiene un ancho de banda $\leq \pi$) puede ser reconstruida con muestreo sobre sus valores en los enteros. Específicamente,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\operatorname{sen}(\pi(t-n))}{\pi(t-n)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\varphi(t-n).$$

El espacio V_0 en este contexto consiste de las funciones en $L^2(R)$ de ancho de banda que no excede π.

Por escalamiento (sea $g(t) = f(2t)$) considere el espacio V_1 de funciones de ancho de banda que no excede 2π, y así sucesivamente, formando un análisis de multirresolución. Así φ es una función de escalamiento. Ahora necesita una onduleta madre ψ que sea ortogonal a cada $\varphi(t - n)$ para n entero. Por un argumento que no se llevará a cabo (pero cuyas conclusiones pueden ser verificadas de manera directa), obtiene una ψ conveniente a partir de φ en este caso haciendo

$$\psi(t) = \varphi\left(t - \frac{1}{2}\right) - 2\varphi(2t-1) = \frac{\operatorname{sen}(2\pi t) - \cos(\pi t)}{\pi\left(t - \frac{1}{2}\right)}.$$

El contenido de frecuencia de esta función es obtenido de su transformada de Fourier,

$$\hat{\psi}(\omega) = -e^{-i\omega/2}\chi_A(\omega),$$

donde A consiste de todas las ω en $[-2\pi, -\pi)$, junto con todas las ω en $(\pi, 2\pi]$. Esto es, en cada uno de estos intervalos, $\hat{\psi}(\omega) = -e^{-i\omega/2}$, y para ω fuera de estos intervalos, $\hat{\psi}(\omega) = 0$. La figura 4.25 muestra la gráfica de la onduleta madre ψ, y la figura 4.26 la gráfica de su espectro de amplitud. Esto da el contenido de frecuencia de ψ.

Las onduletas de Shannon son las funciones

$$\begin{aligned}\psi_{mn}(t) &= 2^{m/2}\psi(2^m t - n) \\ &= \frac{2^{m/2}}{\pi\left(t - \frac{1}{2}\right)}\left(\operatorname{sen}(2\pi(2^m t - n)) - \cos(\pi(2^m t - n))\right).\end{aligned}$$

Queda para el estudiante explorar las propiedades de estas onduletas. En las figuras 4.27(a) y (b) se dan las gráficas de $\psi_{10}(t)$ y $\psi_{21}(t)$.

Hay muchas otras familias de onduletas, incluyendo las onduletas de Meyer, las onduletas de Daubechies y las onduletas de Stömberg. Éstas requieren mucho trabajo preliminar para sus definiciones. Diferentes onduletas son construidas para propósitos específicos, y tienen aplicaciones en áreas como análisis

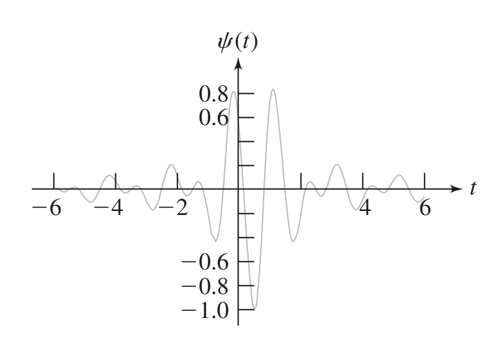


FIGURA 4.25 *Onduleta madre de Shannon* $\psi(t) = \dfrac{\operatorname{sen}(2\pi t) - \cos(\pi t)}{\pi\left(t - \frac{1}{2}\right)}$.

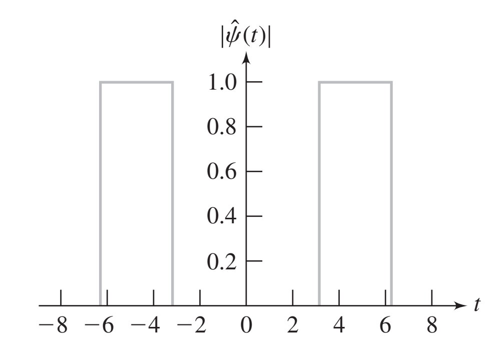


FIGURA 4.26 *Espectro de amplitud de la onduleta madre de Shannon.*

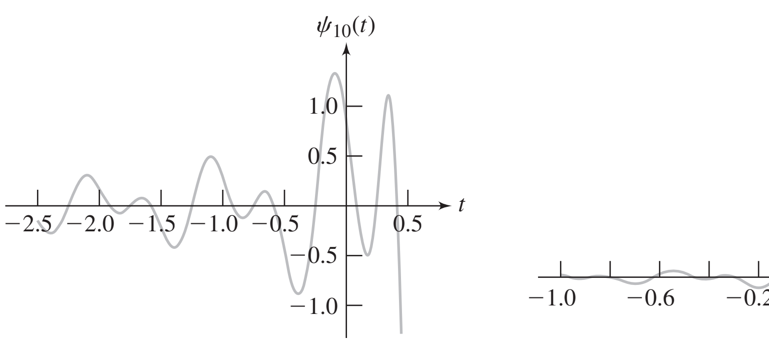


FIGURA 4.27(a) *Onduleta de Shannon* $\psi_{10}(t)$.

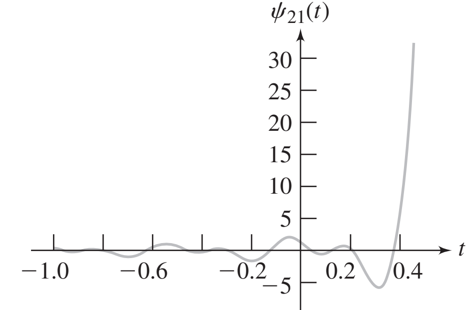


FIGURA 4.27(b) *Onduleta de Shannon* $\psi_{21}(t)$.

de señales, compresión de datos y solución de ecuaciones integrales. Para una aplicación al problema de usar el patrón de colores en el iris del ojo como un medio de identificación, véase el artículo *Iris Recognition*, de John Daugman, aparecido en *American Scientist*, julio-agosto, 2001, pp. 326-333.

SECCIÓN 4.4 PROBLEMAS

1. Pruebe que $\sigma_{m,n}(t) \cdot \sigma_{m',n}(t) = 0$ si $(m, n) \neq (m', n')$.

2. En el mismo sistema de ejes, dibuje la gráfica de $\sigma_{1,1}(t)$ y $\sigma_{1,2}(t)$. Explique a partir de la gráfica de estas dos funciones por qué son ortogonales.

3. En el mismo sistema de ejes, dibuje la gráfica de $\sigma_{1,3}(t)$ y $\sigma_{-2,1}(t)$. Explique a partir de la gráfica de estas dos funciones por qué son ortogonales.

4. En el mismo sistema de ejes, dibuje la gráfica de $\sigma_{2,1}(t)$ y $\sigma_{1,1}(t)$. Explique a partir de la gráfica de estas dos funciones por qué son ortogonales.

5. Dibuje la gráfica de $\psi(2t - 3)$.

6. Dibuje la gráfica de $\psi(2t + 6)$.

7. Sea $f(t) = 4\sigma_{-3,-2}(t) + 6\sigma_{-1,1}(t)$. Escriba la serie de Fourier $f(t)$ en $[-5, 5]$. Dibuje la gráfica de la quincuagésima suma parcial de esta serie en el mismo conjunto de ejes con la gráfica de $f(t)$.

8. Sea $f(t) = -3\sigma_{2,-2}(t) + 4\sigma_{2,0}(t) + 7\sigma_{1,-1}(t)$. Escriba la serie de Fourier $f(t)$ en $[-4, 4]$. Dibuje la gráfica de la quincuagésima suma parcial de esta serie en el mismo conjunto de ejes con la gráfica de $f(t)$.

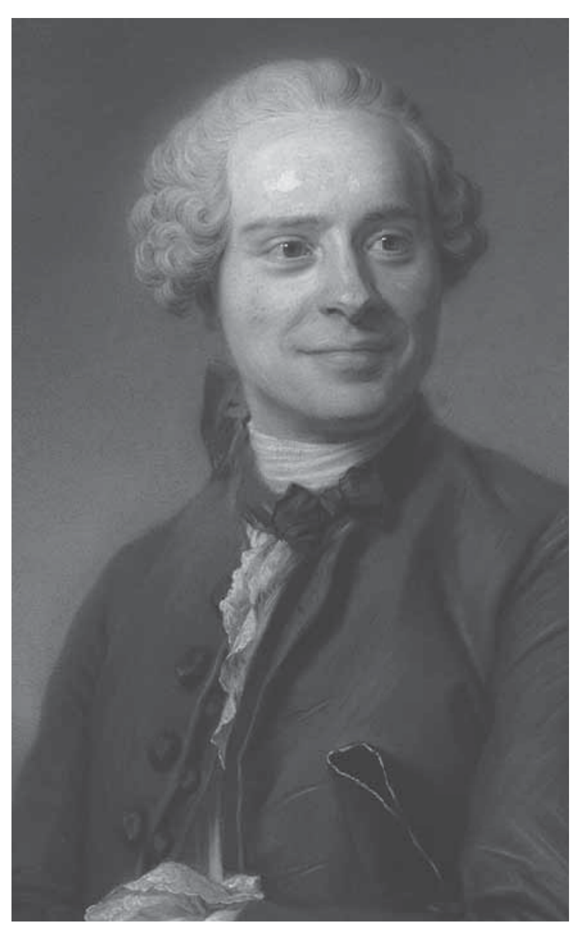
9. Sea $f(t) = 3\sigma_{-4,-1}(t) + 8\sigma_{-2,1}(t)$. Escriba la serie de Fourier $f(t)$ en $[-6, 6]$. Dibuje la gráfica de la quincuagésima suma parcial de esta serie en el mismo conjunto de ejes con la gráfica de $f(t)$.

10. Sea $f(t) = \sigma_{-2,-2}(t) + 4\sigma_{1,3}(t) + 2\sigma_{1,-2}(t)$. Escriba la serie de Fourier $f(t)$ en $[-7, 7]$. Dibuje la gráfica de la quincuagésima suma parcial de esta serie en el mismo conjunto de ejes con la gráfica de $f(t)$.

LA ECUACIÓN DE ONDA Y COND
CIONES INICIALES Y CONDICION
EN LA FRONTERA SERIE DE FOU
SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN

CAPÍTULO 5

La ecuación de onda



Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717-1783) fue un matemático, físico, filósofo y teórico de la música francés. Hasta 1759 fue también uno de los editores, junto con con Denis Diderot, de la Enciclopedia. *La ecuación de onda es también conocida como la ecuación de d'Alembert en su honor, debido a que él fue uno de los primeros en describirla y utilizarla.*

5.1 La ecuación de onda y las condiciones inicial y en la frontera

Las vibraciones en una membrana o un tambor, o las oscilaciones inducidas en una cuerda de guitarra o violín, son gobernadas por una ecuación diferencial parcial llamada *ecuación de onda*. Deducirá esta ecuación en una situación sencilla.

Considere una cuerda elástica estirada entre dos clavijas, como en una guitarra. Se trata de describir el movimiento de una cuerda a la cual se le da un desplazamiento pequeño y se libera para que vibre en un plano.

Coloque la cuerda a lo largo del eje x de 0 a L y suponga que vibra en el plano xy. Busque una función $y(x, t)$ tal que en cualquier tiempo $t > 0$, la gráfica de la función $y = y(x, t)$ de x sea la forma de la cuerda en ese tiempo. Así, $y(x, t)$ permite tomar un instante de la cuerda en cualquier tiempo, mostrándola como una curva en el plano. Por esta razón $y(x, t)$ es llamada la *función posición* para la cuerda. La figura 5.1 muestra una configuración típica.

Para empezar un caso sencillo, desprecie las fuerzas de amortiguamiento tales como la resistencia del aire y el peso de la cuerda y suponga que la tensión $\mathbf{T}(x, t)$ en la cuerda siempre actúa tangencialmente a la cuerda y que las partículas individuales de la cuerda se mueven sólo verticalmente. También suponga que la masa ρ por unidad de longitud es constante.

Ahora considere un segmento típico de la cuerda entre x y $x + \Delta x$ y aplique la segunda ley del movimiento de Newton para escribir

fuerza neta en este segmento debida a la tensión = aceleración del centro de masa del segmento por su masa.

Esta es una ecuación vectorial. Para Δx pequeña, la componente vertical de esta ecuación (figura 5.2) da aproximadamente

$$T(x + \Delta x, t)\,\mathrm{sen}(\theta + \Delta\theta) - T(x, t)\,\mathrm{sen}(\theta) = \rho\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(\overline{x}, t),$$

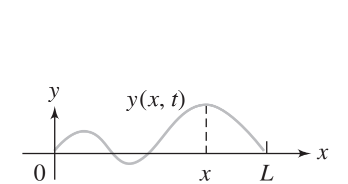


FIGURA 5.1 *Perfil de la cuerda en el tiempo t.*

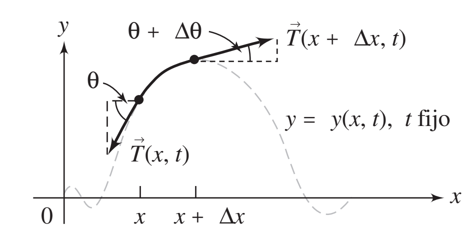


FIGURA 5.2

donde $\overline{x}$ es el centro de masa del segmento y $T(x, t) = \|\mathbf{T}(x, t)\|$ = la magnitud de $\mathbf{T}$. Entonces

$$\frac{T(x + \Delta x, t)\,\mathrm{sen}(\theta + \Delta\theta) - T(x, t)\,\mathrm{sen}(\theta)}{\Delta x} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(\overline{x}, t).$$

Ahora $v(x, t) = T(x, t)\,\mathrm{sen}(\theta)$ es la componente vertical de la tensión, así la última ecuación se vuelve

$$\frac{v(x + \Delta x, t) - v(x, t)}{\Delta x} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(\overline{x}, t).$$

En el límite conforme $\Delta x \to 0$, también $\overline{x} \to x$ y la última ecuación se vuelve

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{5.1}$$

La componente horizontal de la tensión es $h(x, t) = T(x, t)\cos(\theta)$, así

$$v(x, t) = h(x, t)\tan(\theta) = h(x, t)\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Sustituya ésta en la ecuación (5.1) para obtener

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t). \tag{5.2}$$

Para calcular el lado izquierdo de esta ecuación, use el hecho de que la componente horizontal de la tensión del segmento es cero, de manera que

$$h(x + \Delta x, t) - h(x, t) = 0.$$

Así h es independiente de x y la ecuación (5.2) puede ser escrita como

$$h\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Haciendo $c^2 = h/\rho$, esta ecuación se escribe frecuentemente

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Esta es la *ecuación de onda unidimensional* (*espacio de dimensión 1*). Si usa la notación de subíndices para las derivadas parciales, en donde

$$y_x = \frac{\partial y}{\partial x} \quad \text{y} \quad y_t = \frac{\partial y}{\partial t}$$

entonces la ecuación de onda es

$$y_{tt} = c^2 y_{xx}.$$

Para modelar el movimiento de la cuerda, necesita más que tan sólo la ecuación de onda. Debe incorporar información acerca de las restricciones en los extremos de la cuerda y acerca de la velocidad inicial y la posición de la cuerda que obviamente influirá en el movimiento.

Si los extremos de la cuerda están fijos, entonces

$$y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0.$$

Estas son las *condiciones de la frontera*.

Las *condiciones iniciales* especifican la posición inicial (en el tiempo cero)

$$y(x, 0) = f(x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq L$$

y la velocidad inicial

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad \text{para } 0 < x < L,$$

en donde f y g son funciones dadas que satisfacen ciertas condiciones de compatibilidad. Por ejemplo, si la cuerda está fija en sus extremos, entonces la función posición inicial debe reflejar esto satisfaciendo

$$f(0) = f(L) = 0.$$

Si la velocidad inicial es cero (la cuerda es soltada desde el reposo), entonces $g(x) = 0$.

La ecuación de onda, junto con las condiciones iniciales y de la frontera, constituyen un *problema con valores en la frontera* para la función posición $y(x, t)$ de la cuerda. Éstas dan suficiente información para determinar de manera única la solución $y(x, t)$.

Si hay una fuerza externa de magnitud F unidades de fuerza por unidad de longitud actuando sobre la cuerda en la dirección vertical, entonces este desarrollo puede modificarse para obtener

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} F.$$

Nuevamente, el problema con valores en la frontera consiste de esta ecuación de onda y de las condiciones de la frontera e inicial.

En el espacio bidimensional la ecuación de onda es

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right). \tag{5.3}$$

Esta ecuación gobierna los desplazamientos verticales $z(x, y, t)$ de la membrana cubriendo una región específica del plano (por ejemplo, las vibraciones de la superficie de un tambor).

De nuevo, las condiciones de la frontera e iniciales deben ser dadas para determinar una solución única. Típicamente, el marco está fijo en la frontera (el aro de la superficie del tambor), de manera que no habrá desplazamiento de los puntos en la frontera:

$$z(x, y, t) = 0 \quad \text{para } (x, y) \text{ en la frontera de la región y } t > 0.$$

Más aún, el desplazamiento inicial y la velocidad inicial deben ser dados. Estas condiciones iniciales tienen la forma

$$z(x, y, 0) = f(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial t}(x, y, 0) = g(x, y)$$

con f y g dados.

Habrá ocasión de usar la ecuación de onda bidimensional (5.3) expresada en coordenadas polares, así que obtendrá esta ecuación. Sea

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\,\text{sen}(\theta).$$

Entonces

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \theta = \tan^{-1}(y/x).$$

Sea

$$z(x, y) = z(r\cos(\theta), r\,\text{sen}(\theta)) = u(r, \theta).$$

Calcule

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{x^2 + y^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} \\
&= \frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r^2}\right) + \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{y}{r^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

$$= \frac{y^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2xy}{r^4}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2xy}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{y^2}{r^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Mediante un cálculo semejante, obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

y

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2xy}{r^4}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2xy}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{x^2}{r^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Entonces

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Por tanto, en coordenadas polares, la ecuación de onda bidimensional (5.3) es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right), \tag{5.4}$$

en donde $u(r, \theta, t)$ es el desplazamiento vertical de la membrana desde el plano xy en el punto (r, θ) y en el tiempo t.

Para el resto de este capítulo resolverá problemas con valores en la frontera involucrando el movimiento de onda en una variedad de situaciones, haciendo uso de varias técnicas.

SECCIÓN 5.1 PROBLEMAS

1. Sea $y(x, t) = \text{sen}(n\pi x/L)\cos(n\pi ct/L)$. Pruebe que y satisface la ecuación de onda unidimensional para cualquier entero n.

2. Pruebe que $z(x, y, t) = \text{sen}(nx)\cos(my)\cos\left(\sqrt{n^2+m^2}ct\right)$ satisface la ecuación de onda bidimensional para cualesquiera enteros n y m.

3. Sea f una función de una variable dos veces diferenciable. Pruebe que

$$y(x, t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)]$$

satisface la ecuación de onda unidimensional.

4. Pruebe que $y(x, t) = \text{sen}(x)\cos(ct) + \frac{1}{c}\cos(x)\,\text{sen}(ct)$ satisface la ecuación de onda unidimensional, junto con las condiciones en la frontera

$$y(0, t) = y(2\pi, t) = \frac{1}{c}\,\text{sen}(ct) \quad \text{para } t > 0$$

y las condiciones iniciales

$$y(x, 0) = \text{sen}(x),\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \cos(x) \quad \text{para } 0 < x < 2\pi.$$

5. Formule un problema con valores en la frontera (ecuación diferencial parcial, condiciones de la frontera e inicial) para vibraciones de una membrana rectangular ocupando la región $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ si la posición inicial es la gráfica de $z = f(x, y)$ y la velocidad inicial (en el tiempo cero) es $g(x, y)$. La membrana está atada a un marco rígido a lo largo de la frontera rectangular de la región.

6. Formule un problema con valores en la frontera para el movimiento de una cuerda elástica de longitud L, atada en ambos extremos y soltada desde el reposo con una posición inicial dada por $f(x)$. La cuerda vibra en el plano xy. Su movimiento es contrarrestado por la resistencia del aire, que tiene una fuerza en cada punto de magnitud proporcional al cuadrado de la velocidad en ese punto.

5.2 Soluciones de la serie de Fourier de la ecuación de onda

Ahora, problemas que involucran el movimiento de ondas en un intervalo acotado. Primero considere el problema cuando hay un desplazamiento inicial, pero sin velocidad inicial (soltar una cuerda desde el reposo). Posteriormente, con una velocidad inicial pero sin desplazamiento inicial (dando un impulso inicial a la cuerda, pero desde la posición horizontal de reposo). Después, aprenderá cómo combinar éstas para permitir una velocidad inicial combinada con un desplazamiento inicial.

5.2.1 Cuerda vibrante con velocidad inicial cero

Considere una cuerda elástica de longitud L, atada en sus extremos en el eje x en $x = 0$ y $x = L$. La cuerda es desplazada, después soltada desde el reposo para vibrar en el plano xy. Busque la función de desplazamiento $y(x, t)$, cuya gráfica es una curva en el plano xy que muestra la forma de la cuerda en el tiempo t. Si tomara una fotografía de la cuerda en el tiempo t, verá esta curva.

El problema con valores en la frontera para esta función de desplazamiento es

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < L, t > 0,$$

$$y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$

$$y(x, 0) = f(x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq L,$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq L.$$

La gráfica de $f(x)$ es la posición de la cuerda antes de soltarse.

El *método de Fourier*, o de *separación de variables*, consiste en intentar una solución de la forma $y(x, t) = X(x)T(t)$. Sustituya esto en la ecuación de onda para obtener

$$XT'' = c^2 X'' T,$$

donde $T' = dT/dt$ y $X' = dX/dx$. Entonces

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T}.$$

El lado izquierdo de esta ecuación depende sólo de x, y el lado derecho sólo de t. Debido a que x y t son independientes, puede elegir cualquier t_0 que quiera y fijar el lado derecho de esta ecuación en el valor constante $T''(t_0)/c^2T(t_0)$, mientras varía x en el lado izquierdo. Por tanto, X''/X debe ser constante para todo x en $(0, L)$. Pero entonces T''/c^2T debe igualar la misma constante para todo $t > 0$. Se denota esta constante por $-\lambda$ (el signo negativo es de costumbre y conveniente, pero se llega a la misma solución final si sólo usa λ). λ es llamada *la constante de separación*, y ahora tiene

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} = -\lambda.$$

Entonces

$$X'' + \lambda X = 0 \quad \text{y} \quad T'' + \lambda c^2 T = 0.$$

La ecuación de onda se ha separado en dos ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ahora considere las condiciones en la frontera. Primero,

$$y(0, t) = X(0)T(t) = 0$$

para $t \geq 0$. Si $T(t) = 0$ para todo $t \geq 0$, entonces $y(x, t) = 0$ para $0 \leq x \leq L$ y $t \geq 0$. Ésta es ciertamente la solución si $f(x) = 0$, ya que en ausencia de velocidad inicial o fuerza de impulso, y con desplazamiento cero, la cuerda permanece estacionaria para todo tiempo. Sin embargo, si $T(t) \neq 0$ para cualquier tiempo, entonces esta condición de la frontera puede satisfacerse sólo si

$$X(0) = 0.$$

Análogamente,

$$y(L, t) = X(L)T(t) = 0$$

para $t \geq 0$ requiere que

$$X(L) = 0.$$

Ahora tiene un problema con valores en la frontera para X:

$$X'' + \lambda X = 0; \quad X(0) = X(L) = 0.$$

Los valores de λ para los cuales este problema tiene soluciones no triviales son los *valores propios* de este problema, y las soluciones no triviales correspondientes para X son las *funciones propias*. Este problema regular de Sturm-Liouville fue resuelto en el ejemplo 4.8, obteniendo los valores propios

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}.$$

Las funciones propias son múltiplos contantes distintos de cero de

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

para $n = 1, 2, \ldots$ En este punto hay, por tanto, una infinidad de posibilidades para la constante de separación y para $X(x)$.

Ahora regrese a $T(t)$. Debido a que la cuerda es soltada desde el reposo,

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = X(x)T'(0) = 0.$$

Esto requiere que $T'(0) = 0$. El problema que debe resolverse para T es

$$T'' + \lambda c^2 T = 0; \qquad T'(0) = 0.$$

Sin embargo, sabe que λ puede tomar solamente valores de la forma $n^2\pi^2/L^2$, así este problema es realmente

$$T'' + \frac{n^2\pi^2c^2}{L^2}T = 0; \qquad T'(0) = 0.$$

La ecuación diferencial para T tiene solución general

$$T(t) = a\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b\,\text{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

Ahora

$$T'(0) = \frac{n\pi c}{L}b = 0,$$

así $b = 0$. Por tanto, hay soluciones para $T(t)$ de la forma

$$T_n(t) = c_n\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

para cada entero positivo n, con las constantes c_n aún indeterminadas.

Ahora tiene, para $n = 1, 2, \ldots,$ funciones

$$y_n(x,t) = c_n\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right). \tag{5.5}$$

Cada una de estas funciones satisface la ecuación de onda, las condiciones de la frontera y la condición inicial $y_t(x, 0) = 0$. Necesita satisfacer la condición $y(x, 0) = f(x)$.

Es posible elegir algún n de manera que $y_n(x, t)$ sea la solución para alguna elección de c_n. Por ejemplo, suponga que el desplazamiento inicial es

$$f(x) = 14\ \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right).$$

Ahora elija $n = 3$ y $c_3 = 14$ para obtener la solución

$$y(x,t) = 14\ \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{3\pi ct}{L}\right).$$

Esta función satisface la ecuación de onda, las condiciones $y(0) = y(L) = 0$, la condición inicial $y(x, 0) = 14\ \text{sen}(3\pi x/L)$ y la condición de velocidad inicial cero

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0.$$

Sin embargo, dependiendo de la función de desplazamiento inicial, es posible que no obtenga una n ni c_n particular simplemente escogiéndolas en la ecuación (5.5). Por ejemplo, si toma incialmente la cuerda por la mitad y tiene función de desplazamiento inicial

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 \le x \le \dfrac{L}{2} \\ L - x & \text{para } \dfrac{L}{2} < x \le L \end{cases}, \tag{5.6}$$

(como en la figura 5.3), entonces nunca podrá satisfacer $y(x, 0) = f(x)$ que es una de las y_n. Aún si intenta con una combinación lineal finita

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{N} y_n(x,t)$$

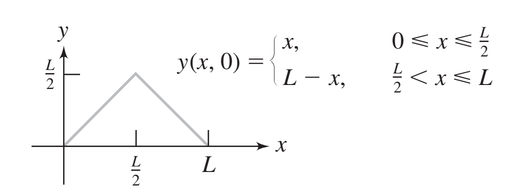


FIGURA 5.3

no puede elegir $c_1, \ldots, c_N$ para satisfacer $y(x, 0) = f(x)$ para esta función, ya que $f(x)$ no puede escribirse como una suma finita de funciones seno.

Por tanto, debe intentar la superposición infinita

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right).$$

Debemos elegir las c_n para satisfacer

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

¡Podemos hacer esto! Esta serie es el desarrollo de Fourier en senos de $f(x)$ en $[0, L]$. Así elegimos los coeficientes de Fourier en senos

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(\xi) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi.$$

Con esta elección, obtenemos la solución

$$y(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(\xi) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right). \tag{5.7}$$

Esta estrategia funcionará para cualquier función de desplazamiento inicial f que sea continua con derivada continua a pedazos en $[0, L]$ y que satisfaga $f(0) = f(L) = 0$. Estas condiciones garantizan que la serie de Fourier en senos de $f(x)$ en $[0, L]$ converge a $f(x)$ para $0 \leq x \leq L$.

En circunstancias específicas, cuando $f(x)$ está dada, por supuesto podemos calcular explícitamente los coeficientes en esta solución. Por ejemplo, si $L = \pi$ y la función de posición inicial $f(x) = x \cos(5x/2)$ en $[0, \pi]$. entonces el n-ésimo coeficiente en la solución (5.7) es

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \xi \cos(5\xi/2) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi \\ &= \frac{8}{\pi}\frac{n(-1)^{n+1}}{(5+2n)^2(5-2n)^2}. \end{aligned}$$

La solución para esta función de desplazamiento inicial, y velocidad inicial cero, es

$$y(x,t) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^{n+1}}{(5+2n)^2(5-2n)^2} \operatorname{sen}(nx) \cos(nct). \tag{5.8}$$

La figura 5.4(a) muestra las gráficas de esta función (perfiles de la cuerda) en los tiempos $t = 0, 0.2, 0.4, 0.7, 0.9$ y 1.3 segundos. La figura 5.4(b) muestra los perfiles en los tiempos $t = 1.2, 1.9, 3, 3.5, 4.2$ y 4.7. Y la figura 5.4(c) muestra las gráficas en los tiempos $t = 5.1, 5.6, 5.9, 6.4, 7$ y 8.3. Estas instantáneas se hacen en grupos en el mismo conjunto de ejes para transmitir cierto sentido del movimiento con el tiempo.

La solución obtenida por separación de las variables se puede poner en el contexto de la teoría de Sturm-Liouville (sección 4.3). El problema para X, a saber,

$$X'' + \lambda X = 0; \quad X(0) = X(L) = 0,$$

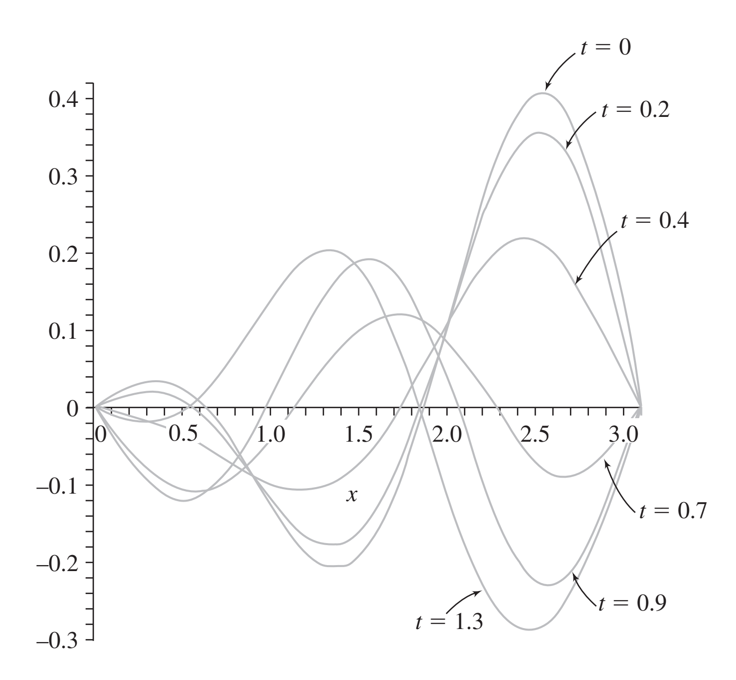


FIGURA 5.4(a) *Perfiles de las soluciones en los tiempos* $t = 0, 0.2, 0.4, 0.7, 0.9$ *y* 1.3.

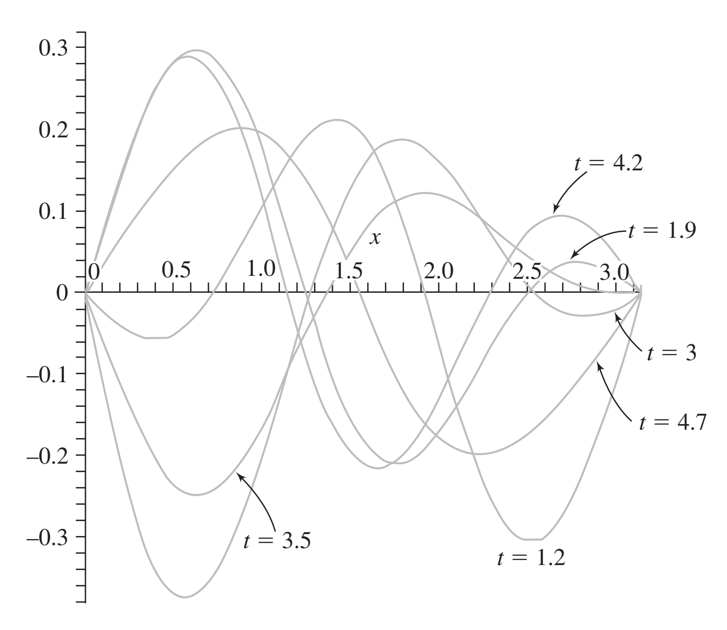


FIGURA 5.4(b) *Perfiles de la cuerda en los tiempos* $t = 1.2, 1.9, 3, 3.5, 4.2$ *y* 4.7.

es un problema regular de Sturm-Liouville, y ha encontrado sus valores propios y las funciones propias correspondientes. El paso final en la solución es desarrollar la función posición inicial en una serie de funciones propias. Para este problema esta serie es el desarrollo de Fourier en senos de $f(x)$ en $[0, L]$.

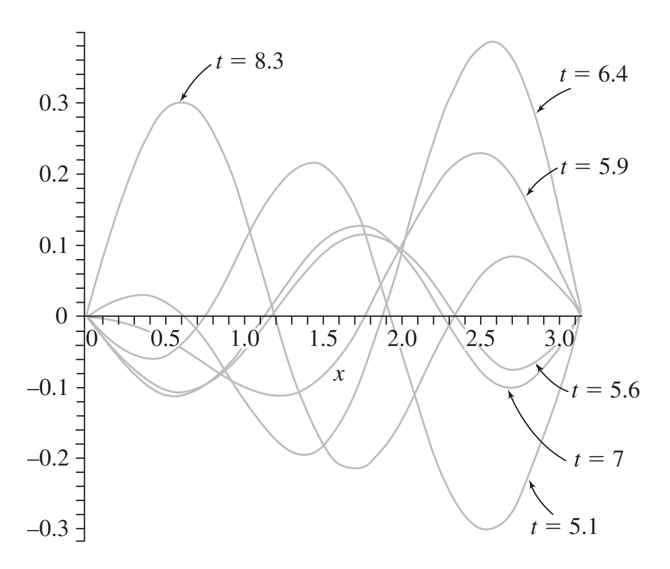


FIGURA 5.4(c) *Perfiles de la cuerda en los tiempos* $t = 5.1, 5.6, 5.9, 6.4, 7$ *y* 8.3.

5.2.2 Cuerda vibrante con velocidad inicial dada y desplazamiento inicial cero

Ahora considere el caso en que la cuerda es soltada desde su posición horizontal (desplazamiento inicial cero), pero con una velocidad inicial dada en x por $g(x)$. El problema con valores en la frontera para la función de desplazamiento es

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < L, t > 0,$$

$$y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$

$$y(x, 0) = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq L,$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq L.$$

Empiece como antes, con la separación de las variables. Ponga $y(x, t) = X(x)T(t)$. Como la ecuación diferencial parcial y las condiciones en la frontera son las mismas que antes, nuevamente obtiene

$$X'' + \lambda X = 0; \qquad X(0) = X(L) = 0,$$

con valores propios

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

y funciones propias constantes múltiplos de

$$X_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Ahora, sin embargo, el problema para T es diferente y tiene

$$y(x, 0) = 0 = X(x)T(0),$$

de manera que $T(0) = 0$. El problema para T es

$$T'' + \frac{n^2\pi^2 c^2}{L^2} T = 0; \qquad T(0) = 0.$$

(En el caso de velocidad inicial cero tenía $T(0) = 0$). La solución general de la ecuación diferencial para T es

$$T(t) = a\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right).$$

Como $T(0) = a = 0$, las soluciones para $T(t)$ son múltiplos constantes de $\mathrm{sen}(n\pi ct/L)$. Así, para $n = 1, 2, \ldots$, tiene las funciones

$$y_n(x, t) = c_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right).$$

Cada una de estas funciones satisfacen la ecuación de onda, las condiciones en la frontera y la condición de desplazamiento inicial cero. Para satisfacer la condición de velocidad inicial $y_t(x, 0) = g(x)$, debe intentar en general una superposición

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right).$$

Suponga que puede diferenciar esta serie término a término, entonces

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\frac{n\pi c}{L}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = g(x).$$

Este es el desarrollo de Fourier en senos de $g(x)$ en $[0, L]$. Elija el *todo el coeficiente* de $\mathrm{sen}(n\pi x/L)$ para ser el coeficiente de Fourier en senos de $g(x)$ en $[0, L]$:

$$c_n\frac{n\pi c}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L g(\xi)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)d\xi,$$

o

$$c_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(\xi)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)d\xi.$$

La solución es

$$y(x, t) = \frac{2}{\pi c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\int_0^L g(\xi)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)d\xi\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right). \tag{5.9}$$

Por ejemplo, suponga que la cuerda es soltada desde su posición horizontal con una velocidad inicial dada por $g(x) = x(1 + \cos(\pi x/L))$. Calcule

$$\int_0^L g(\xi)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)d\xi = \int_0^L \xi\left(1+\cos\left(\frac{\pi\xi}{L}\right)\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)d\xi$$
$$= \begin{cases} \frac{L^2(-1)^n}{n\pi(n^2-1)} & \text{si } n \neq 1 \\ \frac{3L^2}{4\pi} & \text{si } n = 1 \end{cases}.$$

La solución para esta función de velocidad inicial es

$$y(x, t) = \frac{2}{\pi c}\left(\frac{3L^2}{4\pi}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi ct}{L}\right) + \frac{2}{\pi c}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{L^2(-1)^n}{n^2\pi(n^2-1)}\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \tag{5.10}$$

Si $c = 1$ y $L = \pi$, obtiene

$$y(x, t) = \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(t) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n^2(n^2-1)}\mathrm{sen}(nx)\,\mathrm{sen}(nt).$$

La figura 5.5 muestra las gráficas de esta solución (posiciones de la cuerda) en los tiempos $t = 0.4$, 1.2, 1.7, 2.6, 3.5 y 4.3.

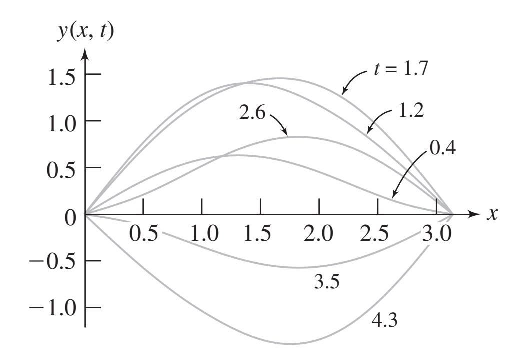


FIGURA 5.5 *Perfiles de la cuerda en los tiempos* $t = 0.4, 1.2, 1.7, 2.6, 3.5$ *y* 4.3.

5.2.3 Cuerda vibrante con desplazamiento y velocidad inicial

Considere el movimiento de la cuerda con desplazamiento inicial $f(x)$ y velocidad inicial $g(x)$.

Formule dos problemas separados, el primero con desplazamiento inicial $f(x)$ y velocidad inicial cero, y el segundo con desplazamiento inicial cero y velocidad inicial $g(x)$. Sabe cómo resolver ambos. Sea $y_1(x, t)$ la solución del primer problema, y $y_2(x, t)$ la solución del segundo. Ahora sea

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t).$$

Entonces y satisface la ecuación de onda y las condiciones en la frontera. Más aún,

$$y(x, 0) = y_1(x, 0) + y_2(x, 0) = f(x) + 0 = f(x)$$

y

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \frac{\partial y_1}{\partial t}(x, 0) + \frac{\partial y_2}{\partial t}(x, 0) = 0 + g(x) = g(x).$$

Así $y(x, t)$ es la solución para el caso con funciones de desplazamiento inicial y velocidad inicial distintas de cero.

Por ejemplo, sea la función de desplazamiento inicial

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 \le x \le \dfrac{L}{2} \\ L - x & \text{para } \dfrac{L}{2} < x \le L \end{cases},$$

y la velocidad inicial

$$g(x) = x\left(1 + \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right).$$

La solución de la función de desplazamiento es la suma de la solución $y_1(x, t)$ para desplazamiento $f(x)$, con velocidad inicial cero, y la solución $y_2(x, t)$ con desplazamiento inicial cero y velocidad inicial $g(x)$. Para $y_1(x, t)$, use la solución (5.7). Primero evalúe

$$\begin{aligned} &\frac{2}{L}\left(\int_0^L f(\xi)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi\right) \\ &= \frac{2}{L}\int_0^{L/2} \xi\,\text{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi + \frac{2}{L}\int_{L/2}^{L} (L-\xi)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi \\ &= \frac{4L}{n^2\pi^2}\,\text{sen}(n\pi/2). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$y_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}(n\pi/2) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right).$$

Ya se ha resuelto para $y_2(x, t)$, y se obtiene

$$y_2(x,t) = \frac{2}{\pi c}\left(\frac{3L^2}{4\pi}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi ct}{L}\right) + \frac{2}{\pi c}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{L^2(-1)^n}{n^2\pi(n^2-1)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right).$$

La solución con la posición inicial y la velocidad inicial dadas es $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$. Si $L = \pi$ y $c = 1$, esta solución es

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi} \operatorname{sen}(n\pi/2) \operatorname{sen}(nx) \cos(nt) + \left(\frac{3}{2}\right) \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2(n^2-1)} \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(nt).$$

Las gráficas de este perfil de la cuerda se muestran en la figura 5.6 para los tiempos $t = 0.125, 0.46, 0.93, 1.9, 2.5, 3.4$ y 5.2.

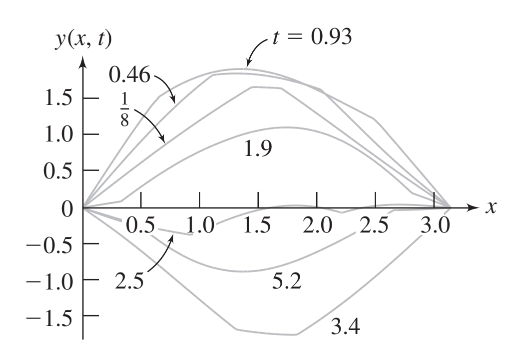


FIGURA 5.6 *Instantes de la cuerda en los tiempos* $t = \frac{1}{8}$, 0.46, 0.93, 1.9, 2.5, 3.4 *y* 5.2.

5.2.4 Verificación de las soluciones

En las soluciones obtenidas hasta aquí ha tenido que usar una serie infinita

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,t)$$

y determinar los coeficientes en las y_n usando un desarrollo de Fourier. La pregunta ahora es si esta suma infinita es verdaderamente una solución del problema con valores en la frontera.

Para ser específico, considere el problema con función posición inicial $f(x)$ y velocidad inicial cero. Deduzca la solución propuesta

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right), \tag{5.11}$$

en donde

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(\xi)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)d\xi.$$

Ciertamente, $y(0, t) = y(L, t) = 0$, ya que todo término en la serie para $y(x, t)$ tiende a cero en $x = 0$ y en $x = L$. Más aún, bajo condiciones razonables sobre f, la serie en senos de Fourier de $f(x)$ converge a $f(x)$ en $[0, L]$, así $y(x, 0) = f(x)$.

Sin embargo, no es obvio que $y(x, t)$ satisfaga la ecuación de onda, a pesar de que cada término en la serie ciertamente sí. La razón para esta incertidumbre es que no puede justificar la diferenciación término a término de la solución en serie propuesta.

Ahora se demostrará un hecho sobresaliente, el cual tiene también otras ramificaciones. Probará que la serie en la ecuación (5.11) puede ser sumada en forma cerrada. Para hacer esto, primero escriba

$$\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) = \frac{1}{2}\left[\text{sen}\left(\frac{n\pi(x+ct)}{L}\right) + \text{sen}\left(\frac{n\pi(x-ct)}{L}\right)\right].$$

La ecuación (5.11) se convierte en

$$y(x, t) = \frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\text{sen}\left(\frac{n\pi(x+ct)}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\text{sen}\left(\frac{n\pi(x-ct)}{L}\right)\right\}. \tag{5.12}$$

Si la serie de Fourier en senos para $f(x)$ converge a $f(x)$ en $[0, L]$, como normalmente podría esperarse para una función que pueda ser una función de desplazamiento de una cuerda, entonces

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

para $0 \le x \le L$, y la ecuación (5.12) se convierte en

$$y(x, t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right].$$

Si f es doblemente diferenciable, puede usar la regla de la cadena para verificar directamente que $y(x, t)$ dada por esta expresión satisface la ecuación de onda, siempre que $f(x + ct)$ y $f(x - ct)$ estén definidas.

Sin embargo, esto presenta una dificultad, ya que $f(x)$ está definida únicamente para $0 \le x \le L$. Pero t puede ser cualquier número no negativo, de manera que los números $x + ct$ y $x - ct$ pueden variar sobre toda la recta real. Así que, ¿cómo evaluar $f(x + ct)$ y $f(x - ct)$?

Esta dificultad puede superarse en dos pasos. Primero, extienda f a una función impar f_o definida en $[-L, L]$ haciendo

$$f_o(x) = \begin{cases} f(x) & \text{para } 0 \le x \le L \\ -f(-x) & \text{para } -L < x < 0 \end{cases}.$$

Observe que $f_o(0) = f_o(L) = f_o(-L) = 0$ debido a que los extremos de la cuerda están fijos.

Ahora extienda f_o a una función periódica F de periodo $2L$ reproduciendo la gráfica de f_o en intervalos sucesivos $[L, 3L]$, $[3L, 5L]$, . . . , $[-3L, -L]$, $[-5L, -3L]$, ... La figura 5.7(a) exhibe la extensión impar de f definida en $[0, L]$ a f_o definida en $[-L, L]$, y la figura 5.7(b) muestra la extensión periódica de f_o en la recta real.

Ahora tenemos

$$y(x, t) = \frac{1}{2}\left[F(x+ct) + F(x-ct)\right] \tag{5.13}$$

para $0 \le x \le L$ y $t > 0$. Suponga que f es doblemente diferenciable, y que las uniones en los extremos de los intervalos donde f ha sido extendida para producir F son suficientemente suaves, entonces F también es doblemente diferenciable, y se puede usar directamente la regla de la cadena para verificar que $y(x, t)$

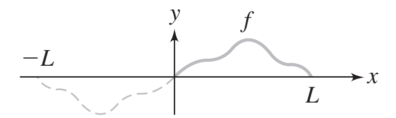


FIGURA 5.7(a) *Extensión impar de f en [−L, L].*

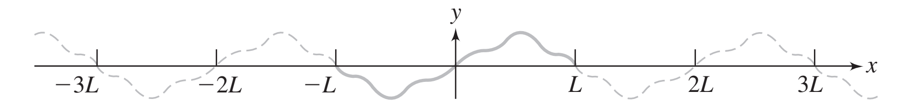


FIGURA 5.7(b) *Extensión periódica F de f_o en la recta real.*

satisface la ecuación de onda. Esta es una expresión elegante para la solución en términos de la función de desplazamiento inicial y el número c, que depende del material que está hecha la cuerda. Es razonable que el movimiento deba estar determinado por estas cantidades.

En la práctica, a menudo hay un número finito de puntos en $[0, L]$ en donde f no es diferenciable. Por ejemplo, la $f(x)$ dada por la ecuación (5.6) no es diferenciable en $L/2$. En tal caso, $y(x, t)$ dada por la ecuación (5.13) es la solución en un sentido restringido, debido a que hay puntos aislados en los cuales no se satisfacen todas las condiciones del problema con valores en la frontera.

La ecuación (5.13) tiene una interpretación física interesante. Si piensa en $F(x)$ como una onda, entonces $F(x + ct)$ es esta onda trasladada ct unidades a la izquierda, y $F(x - ct)$ es la onda trasladada ct unidades a la derecha. El movimiento de la cuerda (en este caso con velocidad inicial cero) es la suma de dos ondas, una moviéndose a la derecha con velocidad c, la otra a la izquierda con velocidad c, y ambas ondas están determinadas por la función de desplazamiento inicial. Habrá más acerca de esto cuando se discuta la solución de d'Alembert para el movimiento de una cuerda de longitud infinita.

5.2.5 Transformación de problemas con valores en la frontera que involucran la ecuación de onda

Hay problemas con valores en la frontera que involucran una ecuación de onda para los cuales la separación de las variables no lleva a la solución. Esto puede ocurrir debido a la forma de la ecuación de onda (por ejemplo, puede ser un término externo de fuerza), o debido a las condiciones de la frontera. Se mostrará un ejemplo de tal problema y una estrategia para superar la dificultad.

Considere el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Ax \quad \text{para } 0 < x < L, t > 0,$$

$$y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$

$$y(x, 0) = 0, \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 1 \quad \text{para } 0 < x < L.$$

A es una constante positiva. El término Ax en la ecuación de onda representa una fuerza externa que en x tiene magnitud Ax. Ha hecho $c = 1$ en este problema.

Si pone $y(x, t) = X(x)T(t)$ en la ecuación diferencial parcial, obtiene

$$XT'' = X''T + Ax,$$

y no hay manera de separar la dependencia de t en un lado de la ecuación y la dependencia de x en el otro.

Transforme este problema en uno para el cual funcione la separación de las variables. Sea

$$y(x, t) = Y(x, t) + \psi(x).$$

La idea es elegir ψ para reducir el problema dado en uno que ya haya resuelto. Sustituya $y(x, t)$ en la ecuación diferencial parcial para obtener

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \psi''(x) + Ax.$$

ésta será simplificada si elige ψ de manera que

$$\psi''(x) + Ax = 0.$$

Hay muchas de tales elecciones. Integrando dos veces, obtiene

$$\psi(x) = -A\frac{x^3}{6} + Cx + D,$$

con C y D constantes, todavía las puede elegir como quiera. Ahora, las condiciones de la frontera. Primero,

$$y(0, t) = Y(0, t) + \psi(0) = 0.$$

ésta sólo será $y(0, t) = Y(0, t)$ si elige

$$\psi(0) = D = 0.$$

Ahora,

$$y(L, t) = Y(L, t) + \psi(L) = Y(L, t) - A\frac{L^3}{6} + CL = 0.$$

ésta se reducirá a $y(L, t) = Y(L, t)$ si elige C de manera que

$$\psi(L) = -A\frac{L^3}{6} + CL = 0$$

o

$$C = \frac{1}{6}AL^2.$$

Esto significa que

$$\psi(x) = -\frac{1}{6}Ax^3 + \frac{1}{6}AL^2x = \frac{1}{6}Ax\left(L^2 - x^2\right).$$

Con esta elección de ψ,

$$Y(0, t) = Y(L, t) = 0.$$

Ahora relacione las condiciones iniciales para y con las condiciones iniciales para Y. Primero,

$$Y(x, 0) = y(x, 0) - \psi(x) = -\psi(x) = \frac{1}{6}Ax(x^2 - L^2)$$

y

$$\frac{\partial Y}{\partial t}(x, 0) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 1.$$

Ahora tiene un problema con valores en la frontera para $Y(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < L, t > 0,$$

$$Y(0, t) = 0, Y(L, t) = 0 \quad \text{para } t > 0,$$

$$Y(x, 0) = \frac{1}{6}Ax(x^2 - L^2), \frac{\partial Y}{\partial t}(x, 0) = 1 \quad \text{para } 0 < x < L.$$

Usando las ecuaciones (5.7) y (5.9), inmediatamente escriba la solución

$$\begin{aligned} Y(x, t) = &\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L \frac{1}{6}A\xi(\xi^2 - L^2)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)d\xi\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \\ &+ \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\int_0^L \text{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)d\xi\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \\ = &\frac{2AL^3}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \\ &+ \frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right). \end{aligned}$$

La solución del problema original es

$$y(x, t) = Y(x, t) + \frac{1}{6}Ax\left(L^2 - x^2\right).$$

La figura 5.8(a) muestra los instantes de la cuerda en los tiempos $t = 0.03, 0.2, 0.5, 0.9, 1.4$ y 2.2, con $c = 1$ y $L = \pi$. La figura 5.8(b) tiene tiempos $t = 2.8, 3.7, 4.4, 4.8, 5.3, 6.1$ y 6.7, éstas usan $L = \pi$ y $c = 1$.

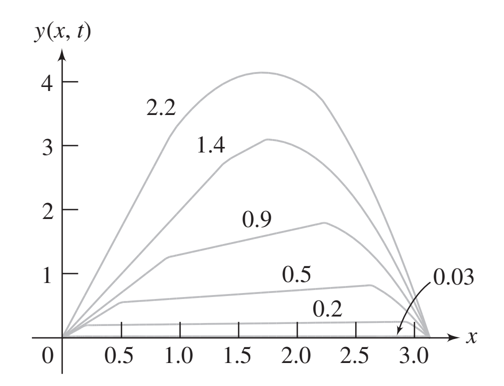


FIGURA 5.8(a) *Posición de la cuerda en los tiempos* $t = 0.03, 0.2, 0.5, 0.9, 1.4$ *y* 2.2.

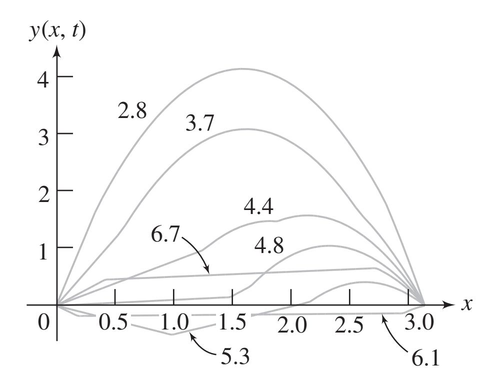


FIGURA 5.8(b) *Posición en los tiempos* $t = 2.8, 3.7, 4.4, 4.8, 5.3, 6.1$ *y* 6.7.

5.2.6 Efectos de las condiciones iniciales y las constantes en el movimiento

Usando la separación de las variables, ha obtenido las soluciones en serie de los problemas que involucran la vibración de una cuerda en un intervalo acotado. Es interesante examinar los efectos que las constantes, que aparecen en el problema, tienen en la solución. Empiece con un ejemplo investigando el efecto de la constante c en el movimiento de la cuerda.

EJEMPLO 5.1

Considere nuevamente el problema de la ecuación de onda con desplazamiento inicial cero y velocidad inicial dada por

$$g(x) = x\left(1 + \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right).$$

La solución obtenida anteriormente, con $L = \pi$, es

$$y(x,t) = \frac{3}{2c}\,\text{sen}(x)\,\text{sen}(ct) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2 c}\,\frac{1}{n^2 - 1}\,\text{sen}(nx)\,\text{sen}(nct)$$

La figura 5.5 muestra las gráficas de las posiciones de la cuerda en diferentes tiempos, con $c = 1$. Ahora debe enfocarse en cómo c influye en el movimiento. La figura 5.9(a) muestra el perfil de la cuerda en el tiempo $t = 5.3$ segundos, con $c = 1.05$. Las figuras 5.9(b) y (c) muestran el perfil en el mismo tiempo, pero con $c = 1.1$ y $c = 1.2$, respectivamente. Estas gráficas están colocadas en el mismo sistema de ejes para comparar con la figura 5.9(d). Se invita al estudiante a seleccionar otros tiempos y dibujar la gráfica de la solución para valores diferentes de c. ■

Ahora, considere un problema en donde los datos iniciales de éste dependen de un parámetro.

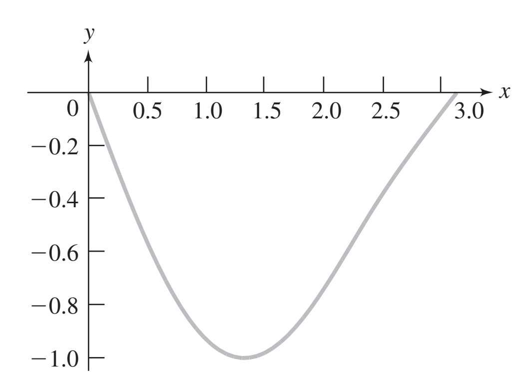


FIGURA 5.9(a) $t = 5.3$ y $c = 1.05$.

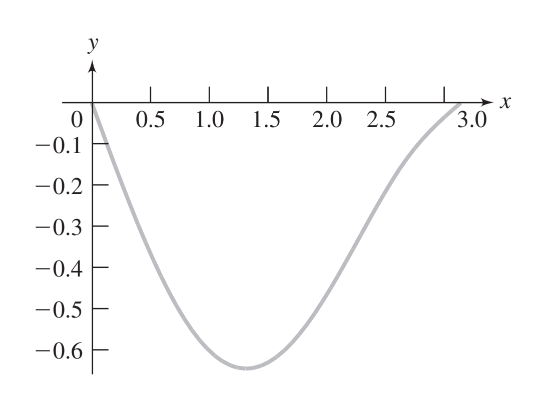


FIGURA 5.9(b) $t = 5.3$ y $c = 1.1$.

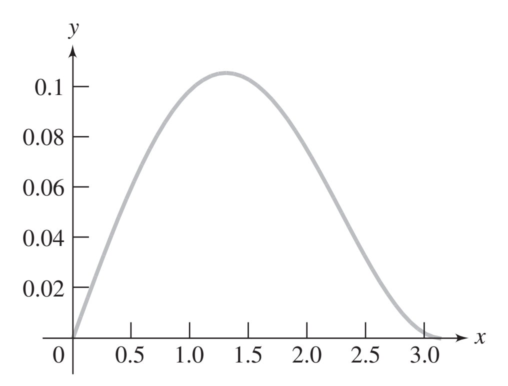


FIGURA 5.9(c) $t = 5.3$ y $c = 1.2$.

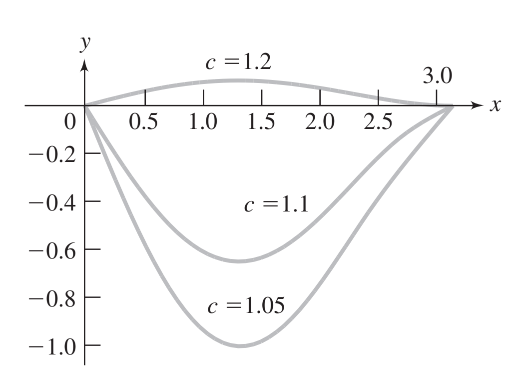


FIGURA 5.9(d) *Perfil de la cuerda en el tiempo* $t = 5.3$ *para* c *igual a* 1.05, 1.1 *y* 1.2.

EJEMPLO 5.2

Considere el problema

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 1.44\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < \pi, t > 0,$$

$$y(0, t) = y(\pi, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$

$$y(x, 0) = 0, \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \operatorname{sen}(\epsilon x) \quad \text{para } 0 < x < \pi,$$

en donde ϵ es un número positivo que no es un entero. Es de rutina escribir la solución

$$y(x, t) = \frac{5}{3\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi\epsilon)(-1)^{n+1}}{n^2 - \epsilon^2} \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(1.2nt).$$

Ahora compare las gráficas de esta solución en varios tiempos, con distintas elecciones de ϵ. La figura 5.10(a) muestra el perfil de la cuerda en $t = 0.5$ para ϵ igual a 0.7, 0.9, 1.5, 4.7 y 9.3. La figura 5.10(b) muestra las gráficas para estos valores de ϵ en $t = 1.1$, y la figura 5.10(c) muestra las gráficas en $t = 2.8$. También es posible seguir el movimiento de la cuerda en distintos tiempos para el mismo valor de ϵ. La figura 5.11(a) muestra los perfiles de la cuerda para $\epsilon = 0.7$ en los tiempos $t = 0.5$, 1.1 y 2.8. Las figuras 5.11(b), (c), (d) y (e) cada una muestra el perfil de la cuerda para una ϵ dada y para estos tres tiempos. ■

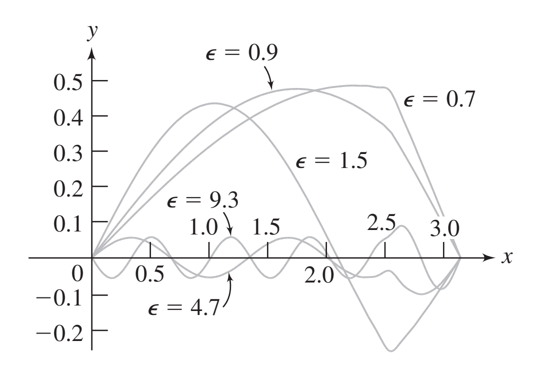


FIGURA 5.10(a) *Perfiles de la cuerda en* $t = 0.5$ *para* ϵ *igual a* 0.7, 0.9, 1.5, 4.7 y 9.3.

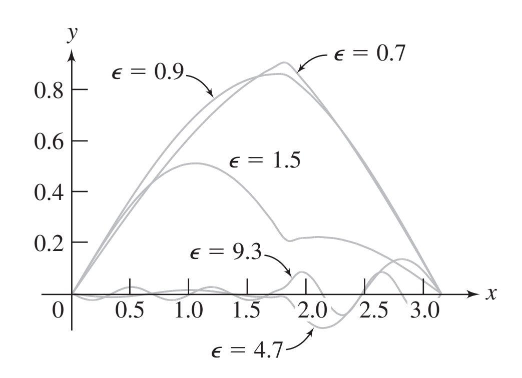


FIGURA 5.10(b) *Perfiles de la cuerda en* $t = 1.1$.

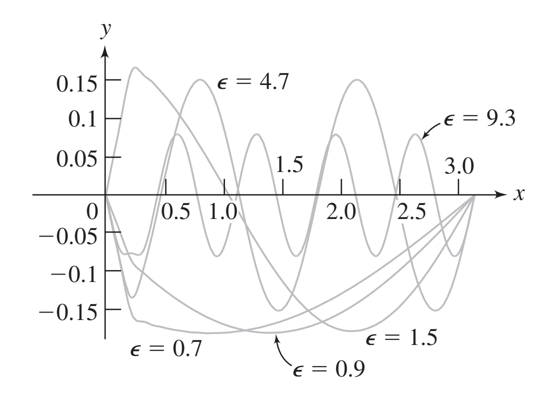


FIGURA 5.10(c) *Perfiles de la cuerda en* $t = 2.8$.

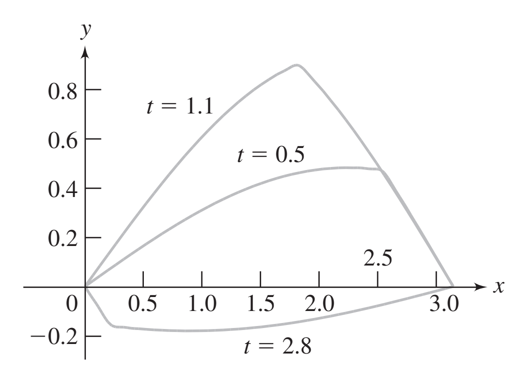


FIGURA 5.11(a) *Gráficas de la cuerda con* $\epsilon = 0.7$ *para los tiempos* $t = 0.5$, 1.1 *y* 2.8.

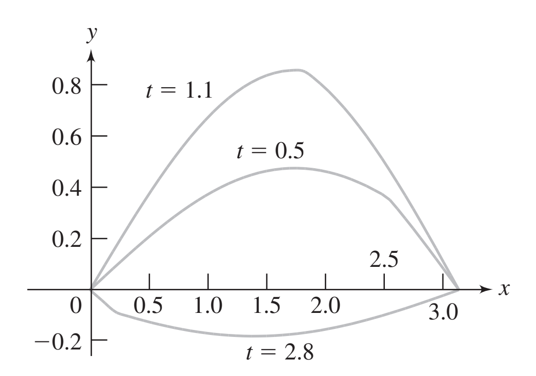


FIGURA 5.11(b) $\epsilon = 0.9$.

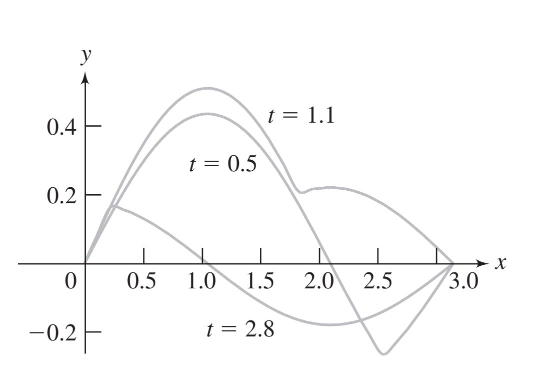


FIGURA 5.11(c) $\epsilon = 1.5$.

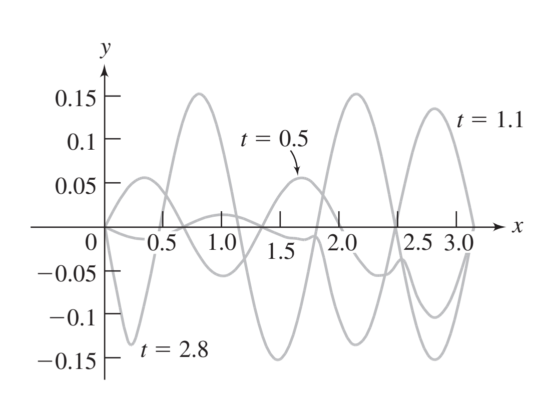


FIGURA 5.11(d) $\epsilon = 4.7$.

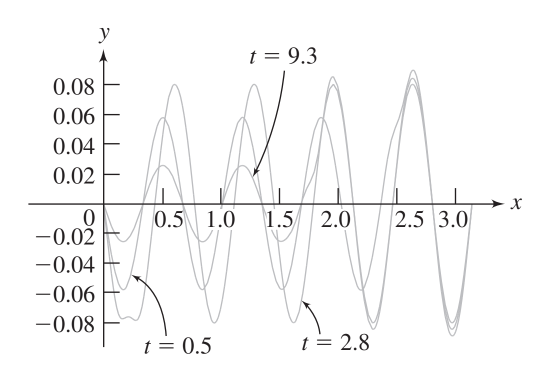


FIGURA 5.11(e) $\epsilon = 9.3$.

En algunos de los ejercicios siguientes, se le pedirá al alumno que emplee un paquete graficador para exhibir los perfiles de la cuerda en tiempos diferentes y bajo condiciones diferentes.

5.2.7 Solución numérica de la ecuación de onda

Se describirá un método para aproximar soluciones de la ecuación de onda en un intervalo. La idea subyacente es útil también para aproximar soluciones de la ecuación de calor, y tiene que ver con aproximacio-

nes de diferencias de la derivada. Para entender esta idea, comience con una función f de una sola variable que es derivable en x_0. Aproxime

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

y también

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$$

donde la aproximación mejora cuando se elige h cada vez más próxima a cero. Si $h > 0$, éstas son, respectivamente, las *aproximaciones por diferencias hacia adelante y hacia atrás* de $f'(x_0)$. Si se promedian éstas se obtiene

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}.$$

Ésta es la *aproximación por diferencias centrada* de $f'(x_0)$.

Si f es derivable dos veces en x_0, entonces

$$\begin{aligned} f''(x_0) &\approx \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h} \\ &\approx \frac{1}{2h}\left(\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{2h} - \frac{f(x_0)-f(x_0-2h)}{2h}\right) \\ &= \frac{f(x_0+2h)-2f(x_0)+f(x_0-2h)}{4h^2}. \end{aligned}$$

Al reemplazar $2h$ por h, puede escribir

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}.$$

Ésta es la *aproximación por diferencias centrada de la segunda derivada*.

Al aplicar estas ideas a $y(x, t)$, puede tomar incrementos Δx en x y Δt en t y escribir las aproximaciones por diferencias centradas de las segundas derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \approx \frac{y(x+\Delta x, t)-2y(x, t)+y(x-\Delta x, t)}{(\Delta x)^2}$$

y

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) \approx \frac{y(x, t+\Delta t)-2y(x, t)+y(x, t-\Delta t)}{(\Delta t)^2}.$$

Éstas las empleará para escribir ecuaciones numéricas de la solución al problema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < L,\ t > 0, \\ y(0, t) &= y(L, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0, \\ y(x, 0) &= f(x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq L, \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) &= g(x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

La región de interés x, t es la banda $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$. Elija un entero positivo N y sea $\Delta x = L/N$. La partición $[0, L]$ por puntos $x_j = j\Delta x$, por tanto.

$$0 < \frac{L}{N} < \frac{2L}{N} < \cdots < \frac{(N-1)L}{N} < \frac{NL}{N} = L.$$

Elija también un incremento Δt en el tiempo y sea $t_k = k\Delta t$ para $k = 0, 1, 2,\ldots$ De este modo forme una cuadrícula de puntos (x_j, t_k), llamados *puntos de retícula*, sobre la banda x, t, como se muestra en la figura 5.12.

Es conveniente escribir

$$y_{j,k} = y(x_j, t_k) = y(j\Delta x, k\Delta t).$$

Ahora reemplace las derivadas parciales en la ecuación de onda con aproximaciones por diferencias centradas para obtener

$$\frac{y_{j,k+1} - 2y_{j,k} + y_{j,k-1}}{(\Delta t)^2} = c^2\frac{y_{j+1,k} - 2y_{j,k} + y_{j-1,k}}{(\Delta x)^2}$$

en (x_j, y_k). Al despejar $y_{j,k+1}$, se obtiene

$$y_{j,k+1} = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left(y_{j+1,k} - 2y_{j,k} = y_{j-1,k}\right) + 2y_{j,k} - y_{j,k-1}. \tag{5.14}$$

En la figura 5.13 se muestra que esta ecuación es útil. Las líneas horizontales $t = t_k$, dividen la banda x, t en las capas de tiempo horizontales Δt unidades. Calcule los valores aproximados $y_{j,k}$ en los puntos de retícula (x_j, t_k). Los puntos (x_j, t_{k+1}), (x_{j-1}, t_k), (x_j, t_k), (x_{j+1}, t_k) y (x_j, t_{k-1}) aparecen como una configuración de diamante, con los tres puntos medios en el nivel t_k, el último punto en el nivel t_{k-1} y el primero en el nivel t_{k+1} superior. Si conoce el valor (aproximado) de $y(x, t)$ en cada uno de los últimos cuatro puntos (en los niveles t_k y t_{k-1}), entonces se conocen todos los términos del lado derecho de la ecuación (5.14) y, por consiguiente, se conoce el valor $y_{j,k+1}$ (aproximado) en el nivel t_{k+1}. Se pueden obtener tales configuraciones de cinco puntos al despejar siempre el valor de $y(x, t)$ en el nivel más alto, de los valores derivados antes en los dos niveles inferiores siguientes.

Este proceso falla en los bordes de la región x, t porque no se puede formar allí esta configuración de diamante de cinco puntos. Sin embargo, la información inicial y de frontera del problema da información acerca de $y(x, t)$ en los bordes. En particular:

$y(x, 0) = f(x)$ en cada punto del fondo ($t = 0$) de la banda, y

$y(0, t) = y(L, t) = 0$ en los lados izquierdo y derecho de la banda.

Así,

$$y(0, t_k) = y(L, t_k) = 0,$$

o de modo equivalente,

$$y_{0,k} = y_{L,k} = 0 \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

y

$$y(x_j, 0) = y_{j,0} = f(j\Delta x) \quad \text{para } j = 1, \ldots, N - 1.$$

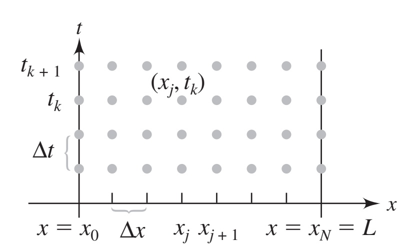


FIGURA 5.12 *Retícula de puntos en la que se hacen las aproximaciones.*

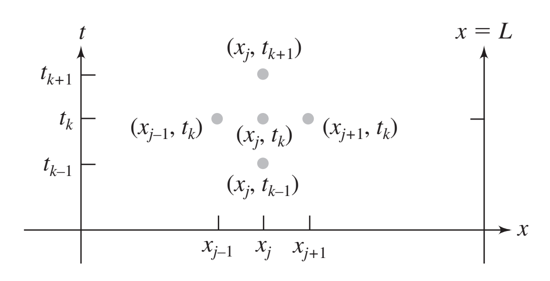


FIGURA 5.13 *Para la ecuación de onda, aproximación de $y(x_j, t_{k+1})$ de aproximaciones anteriores, tres al nivel t_k y una al nivel t_{k+1}.*

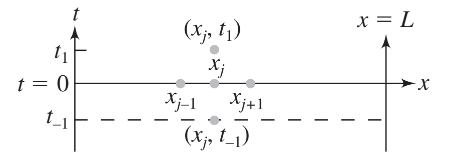


FIGURA 5.14 *Se debe crear una capa t_{-1} para poner en práctica el esquema de la figura 5.13 en la capa t_1.*

No se ha usado aún la condición inicial sobre la velocidad. Use la aproximación por diferencias hacia atrás de la primera derivada para escribir

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x_j, 0) \approx \frac{y(x_j, -\Delta t) - y(x_j, 0)}{-\Delta t}$$
$$= \frac{y_{j,-1} - y_{j,0}}{-\Delta t} = g(x_j) = g(j\Delta x), .j = 1, \ldots, N-1. \tag{5.15}$$

Observe que esta ecuación contiene un término $y_{j,-1}$, que está en la capa debajo del borde del fondo ($t = 0$) de la banda x, t. En realidad no hay tal capa en un sentido natural, pero se crea artificialmente por medio de la aproximación por diferencias hacia atrás a fin de usar la información inicial $(\partial y/\partial t)(x, 0) = g(x)$ para $0 \leq x \leq L$. De la ecuación (5.15) despeje $y_{j,-1}$ para obtener

$$y_{j,-1} = y_{j,0} - g(j\Delta x)\Delta t,$$

que permite determinar los valores apropiados por completar en esta capa inferior, en términos de valores conocidos en el nivel cero y la función de velocidad inicial. Esto proporciona la configuración de diamante de la figura 5.14 cuando $k = 0$.

La estrategia ahora es comenzar a completar los valores de $y(x, t)$ en los puntos de cuadrícula en los niveles $k = -1$ y $k = 0$. Luego, elabore las capas, usando la ecuación (5.14) para completar los valores aproximados de $y(x, t)$ en capas superiores sucesivas. Con la capacidad de cálculo actual, esto se puede hacer para un número muy grande de puntos de cuadrícula.

Un punto fino, el número $(c\Delta t/\Delta x)^2$ tiene un efecto en la estabilidad del método. Si este número es menor que 1/2, el método es estable y produce aproximaciones que mejoran cuando se elige a Δx y Δt más pequeñas (manteniendo a $(c\Delta t/\Delta x)^2 < 1/2$). Si $(c\Delta t/\Delta x)^2 < 1/2$, las aproximaciones numéricas pueden ser inestables, lo que produce resultados poco confiables.

EJEMPLO 5.3

Considere el problema

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < 1, t > 0$$
$$y(0, t) = y(1, t) = 0$$
$$y(x, 0) = x\cos(\pi x/2), \; \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0 & \text{para } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}.$$

La solución exacta es

$$y(x, t) = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(4n^2 - 1)^2} \right) \operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{sen}(n\pi t)$$
$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\cos(n\pi/2) - 1}{n\pi} \right) \operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{sen}(n\pi t)$$

Se elegirá $N = 10$, así que $\Delta x = 0.1$. Sea $\Delta t = 0.025$. Entonces $(c\Delta t/\Delta x)^2 = (0.025/0.1)^2 = 0.0625 < 1/2$. Las ecuaciones para las aproximaciones son

$$y_{j,k+1} = (0.0625)\left(y_{j+1,k} - 2y_{j,k} + y_{j-1,k}\right) + 2y_{j,k} - y_{j,k-1} \quad \text{para } j = 1, \ldots, 9,\ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5.16}$$

$$y_{j,0} = f(0.1j) \quad \text{para } j = 1, \ldots, 9,$$

y

$$y_{j,-1} = y_{j,0} - g(j\Delta x)\Delta t = f(0.1j) - 0.025g(0.1j) \quad \text{para } j = 1, \ldots, 9,$$

Note que se toma j del 1 a $N - 1 = 9$ porque $j = 0$ corresponde al lado izquierdo de la banda x, t, y $j = N = 10$ se refiere al lado derecho de esta banda, y la información se da en estos lados: $y(0, t) = y(1, t) = 0$.

Primero, calcule los valores $y_{j,-1}$ en el nivel horizontal inferior:

$$y_{1,-1} = 0.07377,\ y_{2,-1} = 0.16521,\ y_{3,-1} = 0.24230$$
$$y_{4,-1} = 0.29861,\ y_{5,-1} = 0.32855,\ y_{6,-1} = 0.35267,\ y_{7,-1} = 0.31779,$$
$$y_{8,-1} = 0.24721,\ y_{9,-1} = 0.14079.$$

A continuación, calcule los valores aproximados $y_{j,0}$:

$$y_{1,0} = 0.09877,\ y_{2,0} = 0.19021,\ y_{3,0} = 0.26730,$$
$$y_{4,0} = 0.32361,\ y_{5,0} = 0.35355,\ y_{6,0} = 0.35267,\ y_{7,0} = 0.31779,$$
$$y_{8,0} = 0.24721,\ y_{9,0} = 0.14079.$$

Ahora mueva sistemáticamente el eje t, un nivel a la vez. Para $t = 0.025$, coloque $k = 0$ en la ecuación (5.16), se tiene

$$y_{j,1} = (0.0625)\left(y_{j+1,0} - 2y_{j,0} + y_{j-1,0}\right) + 2y_{j,0} - y_{j,-1} \quad \text{para } j = 1, \ldots, 9,$$

Los valores calculados son:

$$y_{1,1} = 0.12331,\ y_{2,1} = 0.21431,\ y_{3,1} = 0.291$$
$$y_{4,1} = 0.34696,\ y_{5,1} = 0.37662,\ y_{6,1} = 0.35055,$$
$$y_{7,1} = 0.31556,\ y_{8,1} = 0.24160,\ y_{9,1} = 0.13864.$$

A continuación se obtienen los valores aproximados en la capa $k = 2$ ($t = 2(0.025) = 0.05$) al escribir $k = 1$ en la ecuación (5.16) y usar

$$y_{j,2} = (0.0625)\left(y_{j+1,2} - 2y_{j,2} + y_{j-1,2}\right) + 2y_{j,2} - y_{j,1}$$

para $j = 1, \ldots, 9$. De este modo, puede formar aproximaciones en los puntos de retícula tan altas como se quiera en la banda x, t. ■

SECCIÓN 5.2 PROBLEMAS

En cada uno de los problemas del 1 al 8, resuelva el problema con valores en la frontera usando la separación de las variables. Dibuje la gráfica de algunas de las sumas parciales de la solución en serie, para los valores seleccionados del tiempo.

1. $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < 2, t > 0,$$
$$y(0,t) = y(2,t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$
$$y(x,0) = 0, \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = g(x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq 2,$$
$$\text{donde } g(x) = \begin{cases} 2x & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{para } 1 < x < 2 \end{cases}$$

2. $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < 4, t > 0,$$
$$y(0,t) = y(4,t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$
$$y(x,0) = 2\,\text{sen}(\pi x), \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 4$$

3. $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < 3, t > 0,$$
$$y(0,t) = y(3,t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$
$$y(x,0) = 0, \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = x(3-x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq 3$$

4. $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < \pi, t > 0,$$
$$y(0,t) = y(\pi,t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$
$$y(x,0) = \text{sen}(x), \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 1 \quad \text{para } 0 \leq x \leq \pi$$

5. $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 8 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < 2\pi, t > 0,$$
$$y(0,t) = y(2\pi,t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$
$$y(x,0) = f(x), \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 2\pi,$$
donde
$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{para } 0 \leq x \leq \pi \\ 6\pi - 3x & \text{para } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

6. $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < 5, t > 0,$$
$$y(0,t) = y(5,t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$
$$y(x,0) = 0, \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = g(x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq 4,$$
donde
$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq x < 4 \\ 5 - x & \text{para } 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

7. $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < 2, t > 0,$$
$$y(0,t) = y(2,t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$
$$y(x,0) = x(x-2), \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = g(x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq 2,$$
donde
$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq x < \frac{1}{2} \text{ y para } 1 < x \leq 2 \\ 3 & \text{para } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

8. $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 25 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < \pi, t > 0,$$
$$y(0,t) = y(\pi,t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$
$$y(x,0) = \text{sen}(2x), \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \pi - x \quad \text{para } 0 \leq x \leq \pi$$

9. Resuelva el problema con valores en la frontera
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 3 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2x \quad \text{para } 0 < x < 2, t > 0,$$
$$y(0,t) = y(2,t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$
$$y(x,0) = 0, \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 2.$$
Dibuje la gráfica de algunas de las sumas parciales de la solución en serie. *Sugerencia:* Haciendo $y(x,t) = X(x)T(t)$, encuentre que las variables no se separan. Haga $Y(x,t) = y(x,t) + h(x)$ y elija h para obtener un problema con valores en la frontera que pueda ser resuelto mediante la serie de Fourier.

10. Resuelva
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x^2 \quad \text{para } 0 < x < 4, t > 0,$$
$$y(0,t) = y(4,t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$
$$y(x,0) = 0, \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 4.$$
Dibuje la gráfica de algunas de las sumas parciales de la solución para valores de t.

11. Resuelva

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \cos(x) \quad \text{para } 0 < x < 2\pi, t > 0,$$

$$y(0, t) = y(2\pi, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$

$$y(x, 0) = 0, \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Dibuje la gráfica de algunas de las sumas de la solución para valores seleccionados del tiempo.

12. Las vibraciones transversales en una vara homogénea de longitud π son modeladas por la ecuación diferencial parcial

$$a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{para } 0 < x < \pi, t > 0.$$

Aquí $u(x, t)$ es el desplazamiento en el tiempo t de la sección transversal a través de x perpendicular al eje x, y $a^2 = EI/\rho A$, donde E es el módulo deYoung, I es el momento de inercia de la sección transversal perpendicular al eje x, ρ es la constante de densidad, y A el área de la sección transversal, considerada constante.

(a) Sea $u(x, t) = X(x)T(t)$ para separar las variables.

(b) Resuelva para los valores de la constante de separación y para X y T en el caso de extremos libres:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\pi, t) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0, t) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\pi, t) = 0$$

para $t > 0$.

(c) Resuelva para los valores de la constante de separación y para X y T en el caso de extremos apoyados:

$$u(0, t) = u(\pi, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\pi, t) = 0$$

para $t > 0$.

13. Resuelva la *ecuación telegráfica*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A\frac{\partial u}{\partial t} + Bu = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < L, t > 0.$$

Aquí A y B son constantes positivas. Las condiciones de la frontera son

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0.$$

Las condiciones iniciales son

$$u(x, 0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq L.$$

Suponga que $A^2L^2 < 4(BL^2 + c^2\pi^2)$.

14. Considere el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 5x^3 \quad \text{para } 0 < x < 4, t > 0,$$

$$y(0, t) = y(4, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0$$

$$y(x, 0) = \cos(\pi x), \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 4.$$

(a) Escriba una solución en serie.

(b) Encuentre una solución en serie cuando se quita el término $5x^3$ de la ecuación de onda.

(c) Para medir el efecto del término de fuerza en el movimiento, dibuje la gráfica de la 40-ésima parcial de la solución para (a) y (b) en el mismo conjunto de ejes en el tiempo $t = 0.4$ segundos. Repita este procedimiento sucesivamente para los tiempos $t = 0.8$, 1.4, 2, 2.5, 3 y 4 segundos.

15. Considere el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \cos(\pi x) \quad \text{para } 0 < x < 4, t > 0,$$

$$y(0, t) = y(4, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0$$

$$y(x, 0) = x(4 - x), \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 4.$$

(a) Escriba una solución en serie.

(b) Encuentre una solución en serie cuando se quita el término $\cos(\pi x)$ de la ecuación de onda.

(c) Para medir el efecto del término de fuerza en el movimiento, dibuje la gráfica de la 40-ésima suma parcial de la solución para (a) y (b) en el mismo conjunto de ejes en el tiempo $t = 0.6$ segundos. Repita este procedimiento para $t = 1$, 1.4, 2, 3, 5 y 7 segundos.

16. Considere el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - e^{-x} \quad \text{para } 0 < x < 4, t > 0,$$

$$y(0, t) = y(4, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0$$

$$y(x, 0) = \text{sen}(\pi x), \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 4.$$

(a) Escriba una solución en serie.

(b) Encuentre una solución en serie cuando se quita el término e^{-x} de la ecuación de onda.

(c) Para medir el efecto del término de fuerza en el movimiento, dibuje la gráfica de la 40-ésima suma parcial de la solución para (a) y (b) en el mismo conjunto de ejes en el tiempo $t = 0.6$ segundos. Repita este procedimiento sucesivamente para los tiempos $t = 1$, 1.4, 2, 3, 5 y 7 segundos.

17. Considere el problema

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < 1, t > 0,$$

$$y(0, t) = y(1, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$

$$y(x, 0) = f(x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1,$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1,$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & \text{para } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Use $\Delta x = 0.1$ y $\Delta t = 0.025$ para calcular valores aproximados de $y(x, t)$ en los puntos de retícula en la banda x, t, $0 < x < 1$, $t > 0$. Realice los cálculos para cinco capas t (es decir, para $t = 0$ a $t = 5(0.025) = 0.125$).

18. Considere el problema

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < 2, t > 0,$$

$$y(0, t) = y(2, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$

$$y(x, 0) = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 2,$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 1 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 2.$$

Use $\Delta x = 0.1$ y $\Delta t = 0.025$ y calcule valores aproximados de $y(x, t)$. cinco capas hacia arriba desde $t = 0$ a $t = 0.125$.

19. Considere el problema

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < 2, t > 0,$$

$$y(0, t) = y(2, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$

$$y(x, 0) = \text{sen}(\pi x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq 2,$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 1 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 2.$$

Use $\Delta x = 0.1$ y $\Delta t = 0.025$ y calcule valores aproximados de $y(x, t)$, cinco capas hacia arriba desde $t = 0$ a $t = 0.125$.

20. Considere el problema

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < 1, t > 0,$$

$$y(0, t) = y(1, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$

$$y(x, 0) = x(1 - x)^2 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1,$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = x^2 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1.$$

Use $\Delta x = 0.2$ y $\Delta t = 0.025$ y calcule valores aproximados de $y(x, t)$, cinco capas hacia arriba desde $t = 0$ a $t = 0.125$.

21. Considere el problema

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < 1, t > 0,$$

$$y(0, t) = y(1, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$

$$y(x, 0) = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1,$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \cos(\pi x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1.$$

Use $\Delta x = 0.1$ y $\Delta t = 0.025$ y calcule valores aproximados de $y(x, t)$, cinco capas hacia arriba desde $t = 0$ a $t = 0.125$.

5.3 Movimiento de onda a lo largo de cuerdas infinitas y semi-infinitas

5.3.1 Movimiento de onda a lo largo de una cuerda infinita

Si están involucradas distancias grandes (tales como con las ondas sonoras en el océano usadas para monitorear los cambios de temperaturas), algunas veces el movimiento de onda es modelado por una cuerda infinita, en cuyo caso no existen las condiciones de frontera. Como con las cuerdas finitas, considere separadamente los casos de velocidad inicial cero y desplazamiento inicial cero.

Velocidad inicial cero Considere el problema con valor inicial

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } -\infty < x < \infty, t > 0$$

$$y(x, 0) = f(x), \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{para } \infty < x < \infty.$$

No hay condiciones de frontera, pero puede imponer la condición de que la solución sea una función acotada.

Para separar las variables, sea $y(x, t) = X(x)T(x)$ y obtiene, como antes,

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T'' + \lambda c^2 T = 0.$$

Considere los casos sobre λ.

Caso 1 $\lambda = 0$
Ahora $X(x) = ax + b$. Esta es una solución acotada si $a = 0$. Así $\lambda = 0$ es un valor propio, con función propia constante cero.

Caso 2 $\lambda < 0$
Escriba $\lambda = -\omega^2$ con $\omega > 0$. Entonces $X'' - \omega^2 X = 0$, con solución general

$$X(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x}.$$

Pero $e^{\omega x}$ no está acotada en $(0, \infty)$, así debe elegir $a = 0$. Y $e^{-\omega x}$ no está acotada en $(-\infty, 0)$, así debe elegir $b = 0$, dejando sólo la solución cero. Este problema no tiene valor propio negativo.

Caso 3 $\lambda > 0$, $\lambda = \omega^2$ con $\omega > 0$.
Ahora $X'' + \omega^2 X = 0$, con solución general

$$X_\omega(x) = a\cos(\omega x) + b\,\mathrm{sen}(\omega x).$$

Estas funciones son acotadas para todo $\omega > 0$. Así todo número positivo $\lambda = \omega^2$ es un valor propio, con función propia correspondiente $a\cos(\omega x) + b\,\mathrm{sen}(\omega x)$ para a y b no ambos cero.

Puede incluir el caso 1 en el caso 3, ya que $a\cos(\omega x) + b\,\mathrm{sen}(\omega x) =$ constante si $\omega = 0$.

Ahora considere la ecuación para T, la cual puede escribir ahora como $T'' + c^2\omega^2 T = 0$ para $\omega \geq 0$. Ésta tiene solución general

$$T(t) = a\cos(\omega ct) + b\,\mathrm{sen}(\omega ct).$$

Ahora

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = X(t)T'(0) = X(t)\omega cb = 0,$$

así $b = 0$. Así las soluciones para T son múltiplos constantes de

$$T_\omega(t) = \cos(\omega ct).$$

Para cualquier $\omega \geq 0$, ahora tiene una función

$$y_\omega(x, t) = X_\omega(x)T_\omega(t) = [a_\omega\cos(\omega x) + b_\omega\,\mathrm{sen}(\omega x)]\cos(\omega ct)$$

que satisface la ecuación de onda y la condición

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

Necesita satisfacer la condición $y(x, 0) = f(x)$. Para el problema similar en $[0, L]$, tenía una función $y_n(x, t)$ para cada entero positivo n, e intentaba una superposición $\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x, t)$. Ahora los valores propios llenan toda la recta real no negativa, de manera que reemplaza $\sum_{n=1}^{\infty}$ con $\int_0^{\infty} \cdots d\omega$ formando la superposición:

$$y(x, t) = \int_0^{\infty} y_\omega(x, t)\, d\omega = \int_0^{\infty} [a_\omega\cos(\omega x) + b_\omega\,\mathrm{sen}(\omega x)]\cos(\omega ct)\, d\omega. \tag{5.17}$$

La condición del desplazamiento inicial requiere que

$$y(x,0)=\int_0^\infty [a_\omega \cos(\omega x)+b_\omega \operatorname{sen}(\omega x)]\,d\omega = f(x).$$

La integral de la izquierda es la representación de Fourier en integral de $f(x)$ para $-\infty < x < \infty$. Así elige las constantes como los coeficientes de la integral de Fourier:

$$a_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\omega\xi)\,d\xi$$

y

$$b_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\operatorname{sen}(\omega\xi)\,d\xi.$$

Con esta elección de los coeficientes, y ciertas condiciones sobre f (ver el teorema de convergencia para las integrales de Fourier en la sección 3.1), la ecuación (5.17) es la solución del problema.

EJEMPLO 5.4

Considere el problema

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } -\infty < x < \infty, t > 0$$

$$y(x,0)=e^{-|x|}, \frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=0 \quad \text{para } \infty < x < \infty.$$

En la figura 5.15 se da la gráfica de la posición inicial de la cuerda.

Para usar la ecuación (5.17), calcule los coeficientes de la integral de Fourier:

$$a_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi|}\cos(\omega\xi)\,d\xi = \frac{2}{\pi\left(1+\omega^2\right)}$$

y

$$b_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi|}\operatorname{sen}(\omega\xi)\,d\xi = 0.$$

(Para b_ω no necesitamos llevar a cabo la integración ya que el integrando es una función impar). La solución es

$$y(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{1+\omega^2}\cos(\omega x)\cos(\omega c t)\,d\omega. \quad ■$$

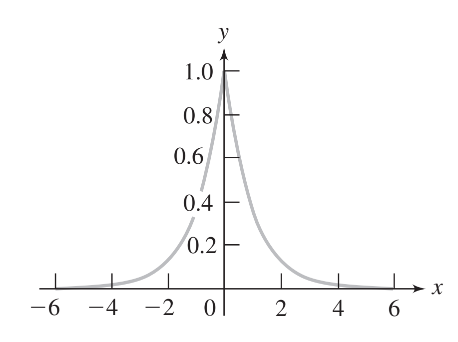


FIGURA 5.15 *Gráfica de* $y = e^{-|x|}$.

La solución (5.17) puede escribirse en una forma más compacta de la siguiente manera. Inserte las fórmulas de integración para los coeficientes:

$$
\begin{aligned}
y(x,t) &= \int_0^\infty [a_\omega \cos(\omega x) + b_\omega \operatorname{sen}(\omega x)] \cos(\omega c t)\, d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\left(\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos(\omega\xi)\, d\xi\right)\cos(\omega x)\right. \\
&\quad + \left.\left(\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\operatorname{sen}(\omega\xi)\, d\xi\right)\operatorname{sen}(\omega x)\right]\cos(\omega c t)\, d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty [\cos(\omega\xi)\cos(\omega x) + \operatorname{sen}(\omega\xi)\operatorname{sen}(\omega x)]\, f(\xi)\cos(\omega c t)\, d\omega\, d\xi \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \cos(\omega(\xi - x)) f(\xi)\cos(\omega c t)\, d\omega\, d\xi. \qquad (5.18)
\end{aligned}
$$

Desplazamiento inicial cero Suponga ahora que la cuerda es soltada desde una posición horizontal (desplazamiento inicial cero), con velocidad inicial $g(x)$. El problema con valor inicial para la función de desplazamiento es

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } -\infty < x < \infty, t > 0$$

$$y(x,0) = 0, \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = g(x) \quad \text{para } \infty < x < \infty.$$

Sea $y(x, t) = X(x)T(t)$ y proceda exactamente como en el caso de desplazamiento inicial $f(x)$ y velocidad inicial cero, obteniendo los valores propios $\lambda = \omega^2$ para $\omega \geq 0$ y funciones propias

$$X\omega(x) = a_\omega \cos(\omega x) + b_\omega \operatorname{sen}(\omega x).$$

Volviendo a T, obtenga, como antes,

$$T(t) = a \cos(\omega ct) + b \operatorname{sen}(\omega ct).$$

Sin embargo, este problema difiere del anterior en la condición inicial sobre $T(t)$. Ahora tiene

$$y(x, 0) = X(x)T(0) = 0,$$

así $T(0) = 0$ y entonces $a = 0$. Así para cada $\omega \geq 0$, $T(t)$ es una constante múltiplo de $\operatorname{sen}(\omega ct)$. Esto da las funciones

$$y_\omega(x,t) = [a_\omega \cos(\omega x) + b_\omega \operatorname{sen}(\omega x)] \operatorname{sen}(\omega c t).$$

Ahora use la superposición

$$y(x,t) = \int_0^\infty [a_\omega \cos(\omega x) + b_\omega \operatorname{sen}(\omega x)] \operatorname{sen}(\omega c t)\, d\omega \qquad (5.19)$$

para satisfacer la condición inicial. Calcule

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \int_0^\infty [a_\omega \cos(\omega x) + b_\omega \operatorname{sen}(\omega x)]\omega c \cos(\omega c t)\, d\omega.$$

Necesita

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \int_0^\infty [\omega c a_\omega \cos(\omega x) + \omega c b_\omega \operatorname{sen}(\omega x)]\, d\omega = g(x).$$

Ésta es una expansión de Fourier en integrales de la función de velocidad inicial. Con condiciones sobre g (tales como las dadas en el teorema de convergencia para las integrales de Fourier), elija

$$\omega c a_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\cos(\omega\xi)\, d\xi$$

y

$$\omega c b_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\operatorname{sen}(\omega\xi)\, d\xi.$$

Entonces

$$a_\omega = \frac{1}{\pi c\omega}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\cos(\omega\xi)\, d\xi \quad \text{y} \quad b_\omega = \frac{1}{\pi c\omega}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\operatorname{sen}(\omega\xi)\, d\xi.$$

Con estos coeficientes, la ecuación (5.19) es la solución del problema.

EJEMPLO 5.5

Suponga que el desplazamiento inicial es cero y la velocidad inicial está dada por

$$g(x) = \begin{cases} e^x & \text{para } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{para } x < 0 \quad \text{y para } x > 1 \end{cases}.$$

En la figura 5.16 se muestra la gráfica de esta función. Para usar la ecuación (5.19) para escribir la función de desplazamiento, calcule los coeficientes:

$$a_\omega = \frac{1}{\pi c\omega}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\cos(\omega\xi)\, d\xi = \frac{1}{\pi c\omega}\int_0^1 e^\xi \cos(\omega\xi)\, d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi c\omega}\,\frac{e\cos(\omega) + e\omega\operatorname{sen}(\omega) - 1}{1+\omega^2}$$

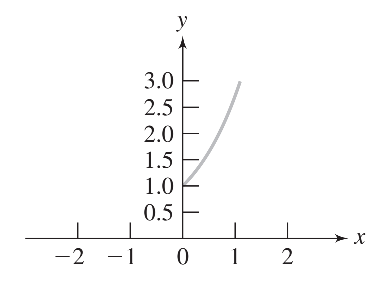


FIGURA 5.16

$$g(x) = \begin{cases} e^x & \text{para } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{para } x < 0 \quad \text{y para } x > 1 \end{cases}.$$

y

$$b_\omega = \frac{1}{\pi c\omega}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\,\mathrm{sen}(\omega\xi)\,d\xi = \frac{1}{\pi c\omega}\int_0^1 e^{\xi}\,\mathrm{sen}(\omega\xi)\,d\xi$$
$$= -\frac{1}{\pi c\omega}\,\frac{e\omega\cos(\omega) - e\,\mathrm{sen}(\omega) - \omega}{1+\omega^2}$$

La solución es

$$y(x,t) = \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\pi c\omega}\,\frac{e\cos(\omega) + e\omega\,\mathrm{sen}(\omega) - 1}{1+\omega^2}\right)\cos(\omega x)\,\mathrm{sen}(\omega ct)\,d\omega$$
$$-\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\pi c\omega}\,\frac{e\omega\cos(\omega) - e\,\mathrm{sen}(\omega) - \omega}{1+\omega^2}\right)\mathrm{sen}(\omega x)\,\mathrm{sen}(\omega ct)\,d\omega. \;\blacksquare$$

Como en el caso del movimiento de onda sobre $[0, L]$, la solución de un problema con velocidad inicial distinta de cero y desplazamiento puede obtenerse como la suma de las soluciones de dos problemas, en uno de los cuales no hay desplazamiento inicial, y en el otro, la velocidad inicial es cero.

5.3.2 Movimiento de onda a lo largo de una cuerda semi-infinita

Ahora considere el problema del movimiento de onda a lo largo de una cuerda atada en el origen y estirada a lo largo de la parte no negativa del eje x. A diferencia del caso de la cuerda a lo largo de toda la recta, ahora existe una condición de frontera, en $x = 0$. El problema es

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < \infty, t > 0,$$
$$y(0,t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$
$$y(x,0) = f(x),\ \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = g(x) \quad \text{para } 0 < x < \infty.$$

De nuevo, busca una solución acotada.

Sea $y(x, t) = X(x)T(t)$ y obtiene

$$X'' + \lambda X = 0,\ T'' + \lambda c^2 T = 0.$$

En este problema hay una condición en la frontera:

$$y(0, t) = X(0)T(t) = 0,$$

la que implica que $X(0) = 0$. Empiece por buscar los valores propios λ y las funciones propias correspondientes. Considere los casos sobre λ.

Caso 1 $\lambda = 0$

Ahora $X(x) = ax + b$. Como $X(0) = b = 0$, entonces $X(x) = ax$. La cual no está acotada en $[0, \infty)$ a menos que $a = 0$, así $\lambda = 0$ no lleva a una solución no trivial y no acotada para X, y 0 no es un valor propio.

Caso 2 λ es negativa.

Ahora escriba $\lambda = -\omega^2$ para obtener $X'' - \omega^2 X = 0$. Esto tiene solución general

$$X(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x}.$$

Ahora

$$X(0) = a + b = 0$$

lo que implica que $b = -a$, así que $X(x) = 2a\,\mathrm{senh}(\omega x)$. La cual no está acotada en $x > 0$ a menos que $a = 0$, de manera que este problema no tiene valor propio negativo.

Caso 3 λ es positiva.
Ahora escriba $\lambda = \omega^2$ y obtiene

$$X(x) = a\cos(\omega x) + b\,\text{sen}(\omega x).$$

Como $X(0) = a = 0$, sólo quedan los términos en seno. Así todo número positivo es un valor propio, con las funciones propias correspondientes múltiplos constantes distintos de cero de $\text{sen}(\omega x)$.

Ahora el problema para T es $T'' + c^2\omega^2 T = 0$, con solución general

$$T(t) = a\cos(\omega ct) + b\,\text{sen}(\omega ct).$$

En este punto debe aislar el problema en uno con desplazamiento inicial cero o velocidad inicial cero. Suponga, para ser específico, que $g(x) = 0$. Entonces $T'(0) = 0$, así $b = 0$ y $T(t)$ debe ser un múltiplo constante de $\cos(\omega ct)$. Tiene, por tanto, funciones

$$y_\omega(x, t) = c_\omega\,\text{sen}(\omega x)\cos(\omega ct)$$

para cada $\omega > 0$. Defina la superposición

$$y(x,t) = \int_0^\infty c_\omega\,\text{sen}(\omega x)\cos(\omega ct)\,d\omega.$$

Cada una de estas funciones satisface la ecuación de onda y la condición de frontera, así como $y_t(x, 0) = 0$ para $x > 0$. Para satisfacer la condición en el desplazamiento inicial, debe elegir los coeficientes de manera que

$$y(x,0) = \int_0^\infty c_\omega\,\text{sen}(\omega x)\,d\omega = f(x).$$

Este es el desarrollo en integral de Fourier en senos de $f(x)$ en $[0, \infty)$, así elija

$$c_\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\,\text{sen}(\omega\xi)\,d\xi.$$

La solución del problema es

$$y(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(\xi)\,\text{sen}(\omega\xi)\,d\xi\right)\text{sen}(\omega x)\cos(\omega ct)\,d\omega.$$

Si el problema tiene desplazamiento inicial cero, y velocidad inicial $g(x)$, entonces un análisis semejante lleva a la solución

$$y(x,t) = \int_0^\infty c_\omega\,\text{sen}(\omega x)\,\text{sen}(\omega ct)\,d\omega,$$

donde

$$c_\omega = \frac{2}{\pi c\omega}\int_0^\infty g(\xi)\,\text{sen}(\omega\xi)\,d\xi.$$

EJEMPLO 5.6

Considere el movimiento de onda a lo largo de la semirecta gobernada por el problema:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } x > 0, t > 0,$$

$$y(0,t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0,\ y(x,0) = \begin{cases} \text{sen}(\pi x) & \text{para } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{para } x > 4 \end{cases}.$$

Aquí, $c = 4$. Para escribir la solución, sólo necesita calcular los coeficientes

$$c_\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\operatorname{sen}(\omega\xi)\,d\xi$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^4 \operatorname{sen}(\pi\xi)\operatorname{sen}(\omega\xi)\,d\xi = 8\operatorname{sen}(\omega)\cos(\omega)\frac{2\cos^2(\omega)-1}{\omega^2-\pi^2}.$$

La solución es

$$y(x,t) = \int_0^\infty 8\operatorname{sen}(\omega)\cos(\omega)\frac{2\cos^2(\omega)-1}{\omega^2-\pi^2}\operatorname{sen}(\omega x)\cos(4\omega t)\,d\omega. \blacksquare$$

5.3.3 Solución mediante la transformada de Fourier de problemas en dominios no acotados

Es útil tener una variedad de herramientas y métodos disponibles para resolver problemas con valores en la frontera. Para este fin, se revisan los problemas de movimiento de onda en la recta y la semirecta y se aproxima la solución utilizando una transformada de Fourier.

Primero, vea una breve descripción de lo que está involucrado al usar una transformada.

1. El rango de los valores para la variable en donde se aplicará la transformada es un factor determinante en la elección de la transformada. Otra es cómo la información dada en el problema con valores en la frontera se ajusta en la fórmula operacional para la transformada. Por ejemplo, la fórmula operacional para la transformada de Fourier en senos es

$$\mathfrak{F}_S[f''(x)](\omega) = -\omega^2\hat{f}_S(\omega) + \omega f(0),$$

   así que debe conocer información sobre $f(0)$ en el problema para hacer uso de esta transformada.

2. Si la transformada es aplicada respecto a una variable α del problema con valores en la frontera, obtiene una ecuación diferencial que involucra a la(s) otra(s) variable(s). Esta ecuación diferencial debe ser resuelta sujeta a otra información dada en el problema. Esta solución da la transformada de la solución del problema con valores en la frontera original.

3. Una vez que tiene la transformada de la solución del problema con valores en la frontera, debe invertirla para obtener la solución de problema con valores en la frontera.

Finalmente, la transformada de Fourier de una función de variable real frecuentemente es un valor complejo. Si la solución es un valor real, entonces, la parte real de la expresión obtenida usando la transformada de Fourier es la solución. Sin embargo, debido a que las expresiones tales como $e^{-i\omega x}$ frecuentemente son más fáciles de manipular que $\cos(\omega x)$ y $\operatorname{sen}(\omega x)$, a menudo queda toda la expresión compleja como la "solución" extrayendo la parte real cuando necesita los valores numéricos, las gráficas u otra información.

Como referencia, en resumen (sin condiciones en las funciones) algunos hechos acerca de la transformada de Fourier y las transformadas de Fourier en senos y cosenos.

Transformada de Fourier

$$\mathfrak{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-i\omega x}\,dx$$
$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$$
$$\mathfrak{F}[f''](\omega) = -\omega^2\hat{f}(\omega)$$

Transformada de Fourier en cosenos

$$\mathfrak{F}_C[f](\omega) = \hat{f}_C(\omega) = \int_0^\infty f(x)\cos(\omega x)\,dx$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \hat{f}_C(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega$$

$$\mathfrak{F}_C[f''](\omega) = -\omega^2 \hat{f}_C(\omega) - f'(0)$$

Transformada de Fourier en senos

$$\mathfrak{F}_S[f](\omega) = \hat{f}_S(\omega) = \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{sen}(\omega x)\,dx$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \hat{f}_S(\omega)\,\mathrm{sen}(\omega x)\,d\omega$$

$$\mathfrak{F}_S[f''](\omega) = -\omega^2 \hat{f}_S(\omega) + \omega f(0)$$

Solución mediante la transformada de Fourier de la ecuación de onda en la recta Considere nuevamente el problema

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } -\infty < x < \infty, t > 0$$

$$y(x,0) = f(x),\ \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0 \quad \text{para } -\infty < x < \infty.$$

Debido a que x varía sobre toda la recta, puede intentar la transformada de Fourier en la variable x. Para hacer esto, transforme $y(x, t)$ como una función de x, dejando t como un parámetro. Primero aplique $\mathfrak{F}$ a la ecuación de onda:

$$\mathfrak{F}\left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right](\omega) = c^2\mathfrak{F}\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right](\omega).$$

Debido a que está transformando en x, dejando a t sola, tiene

$$\mathfrak{F}\left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right](\omega) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)e^{-i\omega x}\,dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-\infty}^\infty y(x,t)e^{-i\omega x}\,dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{y}(\omega,t),$$

donde $\hat{y}(\omega, t)$ es la transformada de Fourier, respecto a x, de $y(x, t)$. La derivada parcial respecto a t entra en la integral respecto a x ya que x y t son independientes.

Para la transformada de Fourier, en x, de $\partial^2 y/\partial x^2$, use la fórmula operacional:

$$\mathfrak{F}\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right](\omega) = -\omega^2\hat{y}(\omega,t).$$

Por tanto, la ecuación de onda transformada es

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{y}(\omega,t) = -c^2\omega^2\hat{y}(\omega,t),$$

o

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{y}(\omega,t) + c^2\omega^2\hat{y}(\omega,t) = 0.$$

Piense en ella como una ecuación diferencial ordinaria para $\hat{y}(\omega, t)$ en t, con ω considerado como un parámetro. La solución general tiene la forma

$$\hat{y}(\omega,t) = a_\omega\cos(\omega ct) + b_\omega\,\mathrm{sen}(\omega ct).$$

Obtiene los coeficientes transformando los datos iniciales. Primero,

$$\hat{y}(\omega, 0) = a_\omega = \mathfrak{F}[y(x, 0)](\omega) = \mathfrak{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega),$$

la transformada de la función posición inicial. Ahora

$$\omega c b_\omega = \frac{\partial \hat{y}}{\partial t}(\omega, 0) = \mathfrak{F}\left[\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0)\right](\omega) = \mathfrak{F}[0](\omega) = 0$$

debido a que la velocidad inicial es cero. Por tanto, $b_\omega = 0$ y

$$\hat{y}(\omega, t) = \hat{f}(\omega)\cos(\omega c t).$$

Ahora sabe la transformada de la solución $y(x, t)$. Invierta ésta para encontrar $y(x, t)$:

$$y(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\cos(\omega c t)e^{i\omega x}\, d\omega. \tag{5.20}$$

La cual es una fórmula integral para la solución, ya que se supone que conoce $\hat{f}(\omega)$ porque fue dada f. Como $e^{i\omega x}$ es un valor complejo, debe tomar la parte real de esta integral para obtener $y(x, t)$. Sin embargo, la integral frecuentemente se deja en la forma de la ecuación (5.20) con el sobreentendido que $y(x, t)$ es la parte real.

Probará que las soluciones de este problema obtenidas por la transformada de Fourier y la integral de Fourier son la misma. Escriba la solución que acaba de obtener por la transformada como

$$\begin{aligned}
y_{tr}(x, t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\cos(\omega c t)e^{i\omega x}\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\omega\xi}\, d\xi\right)\cos(\omega c t)e^{i\omega x}\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(\xi - x)}\cos(\omega c t) f(\xi)\, d\omega\, d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\cos(\omega(\xi - x)) - i\,\mathrm{sen}(\omega(\xi - x))]\cos(\omega c t) f(\xi)\, d\omega\, d\xi.
\end{aligned}$$

Como la función de desplazamiento toma valores reales, debe tomar la parte real de esta integral, obteniendo

$$y(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega(\xi - x))\cos(\omega c t) f(\xi)\, d\omega\, d\xi.$$

Finalmente, este integrando es una función par de ω, de donde

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots\, d\omega = 2\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \cdots\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \cdots\, d\omega,$$

produciendo

$$y(x, t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \cos(\omega(\xi - x))\cos(\omega c t) f(\xi)\, d\omega\, d\xi$$

Esto coincide con la solución (5.18) obtenida con la integral de Fourier.

EJEMPLO 5.7

Encontrar la función de desplazamiento en la recta real si la velocidad inicial es cero y la función de desplazamiento inicial está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{para } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{para } |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Para usar la solución (5.20) debemos calcular

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\omega\xi}\,d\xi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\xi)e^{-i\omega\xi}\,d\xi$$

$$= \begin{cases} 2\dfrac{\cos(\pi\omega/2)}{1-\omega^2} & \text{para } \omega \neq 1 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{para } \omega = 1 \end{cases}.$$

$\hat{f}(\omega)$ es continua, ya que

$$\lim_{\omega \to 1} \frac{2\cos(\pi\omega/2)}{1-\omega^2} = \frac{\pi}{2}.$$

La solución puede escribirse como

$$y(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi\omega/2)}{1-\omega^2}\cos(\omega ct)e^{i\omega x}\,d\omega,$$

bajo el entendido que $y(x, t)$ es la parte real de la integral de la derecha. Si explícitamente toma esta parte real, entonces

$$y(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi\omega/2)}{1-\omega^2}\cos(\omega x)\cos(\omega ct)\,d\omega. \blacksquare$$

EJEMPLO 5.8

En algunas ocasiones, un uso hábil de la transformada de Fourier puede llevar a una forma cerrada de la solución. Considere el problema

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } -\infty < x < \infty, t \geq 0,$$

$$y(x,0) = 4e^{-5|x|} \quad \text{para } -\infty < x < \infty,$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0.$$

Tome la transformada de la ecuación diferencial, obteniendo como en la discusión

$$\frac{\partial^2 \hat{y}}{\partial t^2}(\omega,t) = -9\omega^2\hat{y}(\omega,t),$$

con solución general

$$\hat{y}(\omega,t) = a_\omega\cos(3\omega t) + b_\omega\,\text{sen}(3\omega t).$$

Ahora use las condiciones iniciales. Con la función posición inicial tiene

$$\hat{y}(\omega,0) = a_\omega = \mathfrak{F}[y(x,0)](\omega) = \mathfrak{F}\left[4e^{-5|x|}\right](\omega) = \frac{40}{25+\omega^2}.$$

Ahora, usando la velocidad inicial, escriba

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial t}(\omega, 0) = 3\omega b_\omega = \mathfrak{F}\left[\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0)\right](\omega) = 0,$$

así $b_\omega = 0$. Entonces

$$\hat{y}(\omega, t) = \frac{40}{15 + \omega^2}\cos(3\omega t).$$

Ahora puede escribir la solución en la forma integral como

$$y(x, t) = \mathfrak{F}^{-1}[\hat{y}(\omega, t)](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{40}{25 + \omega^2}\cos(3\omega t)e^{i\omega x}\, d\omega.$$

Sin embargo, en este caso invierta $\hat{y}(\omega, t)$ explícitamente, usando algunos resultados acerca de la transformada de Fourier. Empiece usando el teorema de convolución para escribir

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \mathfrak{F}^{-1}\left[\frac{40}{25 + \omega^2}\cos(3\omega t)\right] \\ &= \mathfrak{F}^{-1}\left[\frac{40}{25 + \omega^2}\right] * \mathfrak{F}^{-1}[\cos(3\omega t)] \\ &= 4e^{-5|x|} * \mathfrak{F}^{-1}[\cos(3\omega t)]. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Necesita calcular la transformada inversa de Fourier de $\cos(3\omega t)$. Aquí ω es la variable de la función transformada, considerando a t como un parámetro. La variable de la transformada inversa será x. Combinando el hecho que $\mathfrak{F}[\delta(t)](\omega) = 1$ de la sección 3.4.5, con el teorema de modulación (teorema 3.6 en la sección 3.3) para obtener

$$\mathfrak{F}[\cos(\omega_0 x)] = \pi[\delta(x + \omega_0) + \delta(x - \omega_0)],$$

en donde δ es la función delta de Dirac. Por el teorema de simetría (teorema 3.5 de la sección 3.3),

$$\mathfrak{F}[\pi[\delta(x + \omega_0) + \delta(x - \omega_0)]] = 2\pi\cos(\omega_0 \omega).$$

Por tanto,

$$\mathfrak{F}^{-1}[\cos(\omega_0 \omega)](x) = \frac{1}{2}[\delta(x + \omega_0) + \delta(x - \omega_0)].$$

Ahora $\omega_0 = 3t$ para obtener

$$\mathfrak{F}^{-1}[\cos(3\omega t)](x) = \frac{1}{2}[\delta(x + 3t) + \delta(x - 3t)].$$

Por tanto, la ecuación 5.21 da

$$\begin{aligned} y(x, t) &= 4e^{-5|x|} * \frac{1}{2}[\delta(x + 3t) + \delta(x - 3t)] \\ &= 2\left(e^{-5|x|} * \delta(x + 3t) + e^{-5|x|} * \delta(x - 3t)\right) \\ &= 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-5|x-\xi|}\delta(\xi + 3t)\, d\xi + 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-5|x-\xi|}\delta(\xi - 3t)\, d\xi \\ &= 2e^{-5|x+3t|} + 2e^{-5|x-3t|}, \end{aligned}$$

en donde la última línea fue obtenida usando la propiedad de filtrado de la función Delta (teorema 3.13 de la sección 3.4.5). Esta es la forma cerrada de la solución y es fácil de verificar directamente. ■

Solución mediante la transformada de la ecuación de onda en una semirecta Usará una transformada para resolver un problema de onda en una semirecta, con el extremo izquierdo fijo en $x = 0$. Esta vez tome el caso de desplazamiento inicial cero, pero una velocidad inicial distinta de cero:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < \infty, t > 0,$$

$$y(0, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$

$$y(x, 0) = 0, \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad \text{para } 0 < x < \infty.$$

Ahora la transformada de Fourier es inapropiada porque tanto x como t varían solamente sobre los números reales no negativos. Puede intentar con la transformada de Fourier en senos o en cosenos en x. La fórmula operacional para la transformada en senos requiere el valor de la solución en $x = 0$, mientras que la fórmula para la transformada en cosenos usa el valor de la derivada en el origen. Como hemos dado la condición $y(0, t) = 0$ (el extremo izquierdo fijo de la cuerda), puede intentar la transformada en senos. Sea $\hat{y}_S(\omega, t)$ la transformada en senos de $y(x, t)$ en la variable $x-$. Tome la transformada en senos de la ecuación de onda. Las derivadas parciales respecto a t pasan a través de la transformada, y use la fórmula operacional para la transformada de la segunda derivada respecto a x:

$$\frac{\partial^2 \hat{y}_S}{\partial t^2} = c^2 \mathfrak{F}_S \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] = -c^2 \omega^2 \hat{y}_S(\omega, t) + \omega c^2 y(0, t) = -c^2 \omega^2 \hat{y}_S(\omega, t).$$

Entonces

$$\hat{y}_S(\omega, t) = a_\omega \cos(\omega c t) + b_\omega \operatorname{sen}(\omega c t).$$

Ahora

$$a_\omega = \hat{y}_S(\omega, 0) = \mathfrak{F}_S[y(x, 0)](\omega) = \mathfrak{F}_S[0](\omega) = 0,$$

y

$$\frac{\partial \hat{y}_S}{\partial t}(\omega, 0) = \omega c b_\omega = \hat{g}_S(\omega),$$

así

$$b_\omega = \frac{1}{\omega c} \hat{g}_S(\omega).$$

Por tanto,

$$\hat{y}(\omega, t) = \frac{1}{\omega c} \hat{g}_S(\omega) \operatorname{sen}(\omega c t).$$

Esta es la transformada en senos de la solución. La solución se obtiene invirtiendo:

$$y(x, t) = \mathfrak{F}_S^{-1} \left[\frac{1}{\omega c} \hat{g}_S(\omega) \operatorname{sen}(\omega c t) \right](x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\omega c} \hat{g}_S(\omega) \operatorname{sen}(\omega x) \operatorname{sen}(\omega c t) \, d\omega.$$

EJEMPLO 5.9

Considere el siguiente problema en la semirecta

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 25\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } x > 0, t > 0,$$

$$y(0, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$

$$y(x, 0) = 0, \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad \text{para } 0 < x < \infty,$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} 9 - x^2 & \text{para } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{para } x > 3 \end{cases}.$$

Si usa la transformada de Fourier en senos, entonces la solución es

$$y(x, t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{5\omega}\hat{g}_S(\omega)\,\text{sen}(\omega x)\,\text{sen}(5\omega t)\,d\omega.$$

Todo lo que se deja para hacer es calcular

$$\hat{g}_S(\omega) = \int_0^\infty g(\xi)\,\text{sen}(\omega x)\,dx$$

$$= \int_0^3 (9 - x^2)\,\text{sen}(\omega x)\,dx$$

$$= \frac{-8\cos^3(\omega) + 6\cos(\omega) - 24\omega\,\text{sen}(\omega)\cos^2(\omega) + 6\omega\,\text{sen}(\omega) + 9\omega^2 + 2}{\omega^3},$$

llegando a una expresión integral para la solución. ■

SECCIÓN 5.3 PROBLEMAS

En cada problema del 1 al 6, considere la ecuación de onda $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ en la recta para el valor de c dado y las condiciones iniciales dadas $y(x, 0) = f(x)$ y $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x)$. Resuelva el problema usando la integral de Fourier y después usando nuevamente la transformada de Fourier.

1. $c = 12, f(x) = e^{-5|x|}, g(x) = 0$

2. $c = 8, f(x) = \begin{cases} 8 - x & \text{para } 0 \leq x \leq 8 \\ 0 & \text{para } x < 0 \text{ y para } x > 0 \end{cases}$

$g(x) = 0$

3. $c = 4, f(x) = 0, g(x) = \begin{cases} \text{sen}(x) & \text{para } -\pi \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{para } |x| > \pi \end{cases}$

4. $c = 1, f(x) = \begin{cases} 2 - |x| & \text{para } -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{para } |x| > 2 \end{cases}$

$g(x) = 0$

5. $c = 3, f(x) = 0, g(x) = \begin{cases} e^{-2x} & \text{para } x \geq 1 \\ 0 & \text{para } x < 1 \end{cases}$

6. $c = 2, f(x) = 0,$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq x \leq 2 \\ -1 & \text{para } -2 \leq x < 0 \\ 0 & \text{para } x > 2 \text{ y para } x < -2 \end{cases}$$

En cada problema del 7 al 11, considere la ecuación de onda $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ en la semirecta, con $y(x, 0) = 0$ para $x > 0$, y para el valor dado de c y las condiciones en la frontera dadas $y(x, 0) = f(x)$ y $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x)$ para $x \geq 0$. Resuelva el problema usando separación de variables (la integral de Fourier en senos) y después, nuevamente usando la transformada de Fourier en senos.

7. $c = 3,\ f(x) = \begin{cases} x(1-x) & \text{para } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{para } x > 1 \end{cases}$

$g(x) = 0$

8. $c = 3,\ f(x) = 0,\ g(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \le x < 4 \\ 2 & \text{para } 4 \le x \le 11 \\ 0 & \text{para } x > 11 \end{cases}$

9. $c = 2, f(x) = 0,$

$$g(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{para } \dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{5\pi}{2} \\ 0 & \text{para } 0 \le x < \dfrac{\pi}{2} \text{ y para } x > \dfrac{5\pi}{2} \end{cases}$$

10. $c = 6, f(x) = -2e^{-x}, g(x) = 0$

11. $c = 14, f(x) = 0,\ g(x) = \begin{cases} x^2(3-x) & \text{para } 0 \le x \le 3 \\ 0 & \text{para } x > 3 \end{cases}$

Algunas veces la transformada de Laplace es efectiva en la resolución de los problemas con valores en la frontera que involucran a la ecuación de onda. Use la transformada de Laplace para resolver lo siguiente.

12. $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } x > 0, t > 0$$

$$y(0,t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(2\pi t) & \text{para } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

$$y(x,0) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0 \quad \text{para } x > 0$$

13. Resuelva

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } x > 0, t > 0$$

$$y(0,t) = t \quad \text{para } t > 0$$

$$y(x,0) = 0, \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = A \quad \text{para } x > 0$$

5.4 Características y la solución de d'Alembert

Esta sección involucrará diferenciaciones repetidas con la regla de la cadena, las cuales pueden escribirse eficientemente usando la notación de subíndices para las derivadas parciales. Por ejemplo, $\partial u/\partial t = u_t$, $\partial u/\partial x = u_x$, $\partial^2 u/\partial t^2 = u_{tt}$, y así sucesivamente. Nuestro objetivo es examinar una perspectiva diferente en el problema

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{para } -\infty < x < \infty, t > 0,$$
$$u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x) \quad \text{para } -\infty < x < \infty.$$

Aquí está usando $u(x, t)$ como la función posición porque estará cambiando variables del plano (x, y) al plano (ξ, η), y no quiere confundir la función solución con las coordenadas de los puntos.

Este problema con valores en la frontera, que a resuelto mediante la integral de Fourier y después usando la transformada de Fourier, se conoce como el *problema de Cauchy para la ecuación de onda*. Ahora una solución que data del siglo XVIII. Las rectas

$$x - ct = k_1, \quad x + ct = k_2,$$

con k_1 y k_2 cualesquiera constantes reales, se llaman las *características* de la ecuación de onda. Éstas forman dos familias de rectas, una consiste de las rectas paralelas con pendiente $1/c$, la otra de rectas paralelas con pendiente $-1/c$. La figura 5.17 muestra algunas de estas características. Verá que estas rectas están estrechamente relacionadas con el movimiento de onda. Sin embargo, el primer uso de ellas será escribir una solución explícita de la ecuación de onda en términos de los datos iniciales.

Defina un cambio de coordenadas

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct.$$

Esta transformación es invertible, ya que

$$x = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad t = \frac{1}{2c}(-\xi + \eta).$$

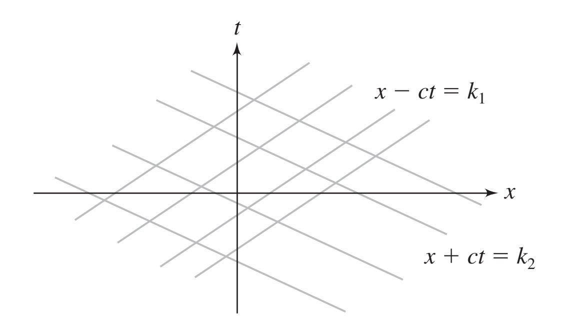


FIGURA 5.17 *Características de la ecuación de onda.*

Defina

$$U(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)).$$

Calcule las derivadas:

$$\begin{aligned} u_x &= U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x = U_\xi + U_\eta, \\ u_{xx} &= U_{\xi\xi}\xi_x + U_{\xi\eta}\eta_x + U_{\eta\xi}\xi_x + U_{\eta\eta}\eta_x \\ &= U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta} \\ u_t &= U_\xi(-c) + U_\eta(c) \end{aligned}$$

y

$$u_{tt} = -c[U_{\xi\xi}(-c) + U_{\xi\eta}(c)] + c[U_{\eta\xi}(-c) + U_{\eta\eta}(c)] = c^2U_{\xi\xi} - 2c^2U_{\xi\eta} + c^2U_{\eta\eta}.$$

Entonces

$$u_{tt} - c^2u_{xx} = 4c^2U_{\xi\eta}.$$

En estas nuevas coordenadas, la ecuación de onda es

$$U_{\xi\eta} = 0.$$

Ésta es llamada la *forma canónica de la ecuación de onda*, y es una ecuación fácil de resolver. Primero la escribimos como

$$(U_\eta)_\xi = 0.$$

Esto significa que U_η es independiente de ξ, por decir

$$U_\eta = h(\eta).$$

Integre para obtener

$$U(\xi, \eta) = \int h(\eta)\, d\eta + F(\xi),$$

en donde $F(\xi)$ es la "constante" de integración de la derivada parcial respecto a η. Ahora $\int h(\eta) d\eta$ es sólo otra función de η, la que se escribe como $G(\eta)$. Así

$$U(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta),$$

donde F y G deben ser funciones de una variable con segunda derivada continua, por lo demás son arbitrarias. Se ha mostrado que la solución de $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ tiene la forma

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct). \tag{5.22}$$

La ecuación (5.22) se llama la *solución de d'Alembert* de la ecuación de onda, en honor al matemático francés Jean le Rond d'Alembert (1717-1783). Toda solución de $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ debe tener esta forma.

Ahora aparece cómo elegir F y G para satisfacer las condiciones iniciales. Primero,

$$u(x, 0) = F(x) + G(x) = f(x) \tag{5.23}$$

y

$$u_t(x, 0) = -cF'(x) + cG'(x) = g(x). \tag{5.24}$$

Integrando la ecuación (5.24) y rearreglando los términos para obtener

$$-F(x) + G(x) = \frac{1}{c}\int_0^x g(\xi)\, d\xi - F(0) + G(0).$$

Sume esta ecuación a la ecuación (5.23) para obtener

$$2G(x) = f(x) + \frac{1}{c}\int_0^x g(\xi)\, d\xi - F(0) + G(0).$$

Por tanto,

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(\xi)\, d\xi - \frac{1}{2}F(0) + \frac{1}{2}G(0). \tag{5.25}$$

Pero entonces, de la ecuación (5.23),

$$F(x) = f(x) - G(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2}F(0) - \frac{1}{2}G(0). \tag{5.26}$$

Finalmente, usando las ecuaciones (5.25) y (5.26) para escribir la solución como

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F(x - ct) + G(x + ct) \\ &= \frac{1}{2}f(x - ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} g(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2}F(0) - \frac{1}{2}G(0) \\ &\quad + \frac{1}{2}f(x + ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(\xi)\, d\xi - \frac{1}{2}F(0) + \frac{1}{2}G(0), \end{aligned}$$

o, después de las cancelaciones,

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left(f(x - ct) + f(x + ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\, d\xi. \tag{5.27}$$

La ecuación (5.27) es la *fórmula de d'Alembert* para la solución del problema de Cauchy para la ecuación de onda en toda la recta. Es una fórmula explícita para la solución del problema de Cauchy, en términos de las funciones posición y velocidad inicial dadas.

EJEMPLO 5.10

Resuelva el problema con valores en la frontera

$$u_{tt} = 4u_{xx} \quad \text{para } -\infty < x < \infty, t > 0,$$

$$u(x, 0) = e^{-|x|}, u_t(x, 0) = \cos(4x) \quad \text{para } -\infty < x < \infty.$$

Por la fórmula de d'Alembert, inmediatamente tiene

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(e^{-|x-2t|} + e^{-|x+2t|}\right) + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} \cos(4\xi)\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-|x-2t|} + e^{-|x+2t|}\right) + \frac{1}{16}(\operatorname{sen}(4(x+2t)) - \operatorname{sen}(4(x-2t)))$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-|x-2t|} + e^{-|x+2t|}\right) + \frac{1}{8}\cos(4x)\operatorname{sen}(8t). \blacksquare$$

5.4.1 Una ecuación de onda no homogénea

Usando las características, escribirá una expresión para la solución del problema no homogéneo:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + F(x,t) \quad \text{para } -\infty < x < \infty, t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x) \quad \text{para } -\infty < x < \infty.$$

Este problema se llama *no homogéneo* debido al término $F(x, t)$, el que supondrá continuo para todo real x y $t \geq 0$. $F(x, t)$ puede pensarse como un impulso externo o una fuerza de amortiguamiento actuando en la cuerda.

Suponga que quiere la solución en (x_0, t_0). Recuerde que las características de la ecuación de onda son líneas rectas en el plano x, t. Hay exactamente dos características que pasan por este punto, y éstas son las rectas

$$x - ct = x_0 - ct_0 \quad \text{y} \quad x + ct = x_0 + ct_0.$$

Los segmentos de estas características, junto con el intervalo $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$, forman un *triángulo característico* Δ, que se muestra en la figura 5.18. Etiquete los lados de Δ como L, M e I. Como Δ es una región en el plano x, t, puede calcular la integral doble de $-F(x, t)$ sobre Δ:

$$-\iint_{\Delta} F(x,t)\,dA = \iint_{\Delta}(c^2 u_{xx} - u_{tt})\,dA = \iint_{\Delta}\left(\frac{\partial}{\partial x}(c^2 u_x) - \frac{\partial}{\partial t}(u_t)\right)dA.$$

Aplicando el teorema de Green a la última integral, con x y t como las variables independientes en lugar de x y y. Esto convierte la integral doble en una integral de línea alrededor de la frontera C de Δ. Esta curva suave a pedazos, que consiste de tres segmentos de recta, está orientada en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

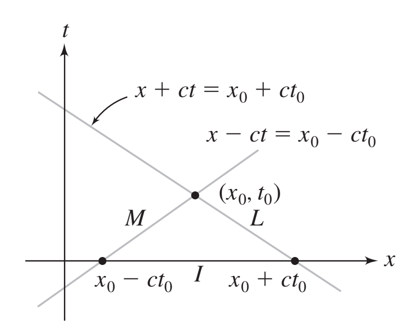


FIGURA 5.18 *Triángulo característico.*

Por el teorema de Green, obtiene

$$-\iint_{\Delta} F(x,t)\,dA = \oint_C u_t\,dx + c^2 u_x\,dt.$$

Ahora evalúe la integral de línea de la derecha en cada uno de los segmentos de C.

En I, $t = 0$, de donde $dt = 0$, y x varía de $x_0 - ct_0$ a $x_0 + ct_0$, así

$$\int_I u_t\,dx + c^2 u_x\,dt = \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} u_t(x,0)\,dx = \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(\xi)\,d\xi.$$

En L, $x + ct = x_0 + ct_0$, de donde $dx = -cdt$ y

$$\int_L u_t\,dx + c^2 u_x\,dt = \int_L u_t(-c)\,dt + c^2 u_x\left(-\frac{1}{c}\right)dx = -c\int_L du$$
$$= -c\left[u(x_0,t_0) - u(x_0+ct_0,0)\right].$$

Finalmente, en M, $x - ct = x_0 - ct_0$, de donde $dx = cdt$ y

$$\int_M u_t\,dx + c^2 u_x\,dt = \int_L u_t(c)\,dt + c^2 u_x\left(\frac{1}{c}\right)dx = c\int_M du$$
$$= c\left[u(x_0-ct_0,0) - u(x_0,t_0)\right].$$

M tiene punto inicial (x_0, t_0) y punto terminal $(x_0 - ct_0, 0)$ debido a la orientación en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj en la frontera de Δ.

Sumando estas dos integrales de línea, obtiene

$$-\iint_{\Delta} F(x,t)\,dA = \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(\xi)\,d\xi$$
$$-\ c\left[u(x_0,t_0) - u(x_0+ct_0,0)\right] + c\left[u(x_0-ct_0,0) - u(x_0,t_0)\right].$$

Entonces

$$-\iint_{\Delta} F(x,t)\,dA = \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(\xi)\,d\xi - 2cu(x_0,t_0) + cu(x_0+ct_0,0) + cu(x_0-ct_0,0)$$
$$= \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(\xi)\,d\xi - 2u(x_0,t_0) + c\left[f(x_0+ct_0) + f(x_0-ct_0)\right].$$

Resuelva esta ecuación para $u(x_0, t_0)$ para obtener

$$u(x_0,t_0) = \frac{1}{2}\left[f(x_0-ct_0) + f(x_0+ct_0)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2c}\iint_{\Delta} F(x,t)\,dA.$$

Se ha usado el subíndice 0 en (x_0, t_0) para enfocar la atención en el punto en el cual se está evaluando la solución. Sin embargo, éste puede ser cualquier punto con x_0 real y $t_0 > 0$. Así la solución en un punto arbitrario (x, t) es

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2c}\iint_{\Delta} F(\xi,\eta)\,d\xi d\eta.$$

La solución en (x, t) del problema con el término de fuerza $F(x, t)$ es por tanto la solución de d'Alembert para el problema homogéneo (sin término de fuerza), más $(1/2c)$ veces la integral doble del término de fuerza sobre el triángulo característico teniendo (x, t) como un vértice.

EJEMPLO 5.11

Considere el problema

$$u_{tt} = 25u_{xx} + x^2t^2 \quad \text{para } -\infty < x < \infty, t > 0,$$

$$u(x, 0) = x\cos(x), u_t(x, 0) = e^{-x} \quad \text{para } -\infty < x < \infty.$$

La solución en cualquier punto x y tiempo t tiene la forma

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[(x-5t)\cos(x-5t) + (x+5t)\cos(x+5t)] + \frac{1}{10}\int_{x-5t}^{x+5t} e^{-\xi}\, d\xi$$

$$+ \frac{1}{10}\iint_{\Delta} \xi^2\eta^2\, d\xi d\eta.$$

Todo lo que debe hacer es evaluar las integrales. Primero,

$$\frac{1}{10}\int_{x-5t}^{x+5t} e^{-\xi}\, d\xi = -\frac{1}{10}e^{-x-5t} + \frac{1}{10}e^{-x+5t}.$$

Para la integral doble del término de fuerza, utilice la figura 5.19:

$$\frac{1}{10}\iint_{\Delta} \xi^2\eta^2\, d\xi d\eta = \frac{1}{10}\int_0^t \int_{x-5t+5\eta}^{x+5t-5\eta} \xi^2\eta^2\, d\xi d\eta.$$

$$= \frac{1}{12}t^4x^2 + \frac{5}{36}t^6.$$

La solución es

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[(x-5t)\cos(x-5t) + (x+5t)\cos(x+5t)]$$

$$-\frac{1}{10}e^{-x-5t} + \frac{1}{10}e^{-x+5t} + \frac{1}{12}t^4x^2 + \frac{5}{36}t^6. \blacksquare$$

En el último ejemplo, $u(x, t)$ da la función posición de la cuerda en cualquier tiempo dado t. La gráfica de $u(x, t)$ en el plano x, t no es una fotografía de la cuerda en cualquier tiempo. Más bien, una imagen de la cuerda en el tiempo t es la gráfica de los puntos $(x, u(x, t))$, con t fija en el tiempo de interés. La figura 5.20(a) muestra un segmento de la cuerda en el tiempo $t = 0.3$, tanto para el movimiento de forzado como el no forzado. La figura 5.20(b) muestra un segmento de la cuerda para $t = 0.6$, nuevamente para ambos el movimiento de forzado y el no forzado.

Este método de características también se puede usar para resolver problemas con valores en la frontera que involucran a la ecuación de onda en un intervalo acotado $[0, L]$. Sin embargo, es bastante más complicado que el de la solución en toda la recta, por lo que queda para un estudio más avanzado de las ecuaciones diferenciales parciales.

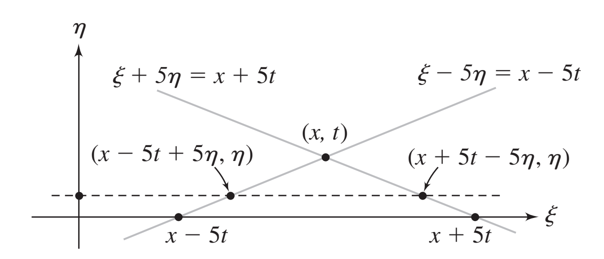


FIGURA 5.19

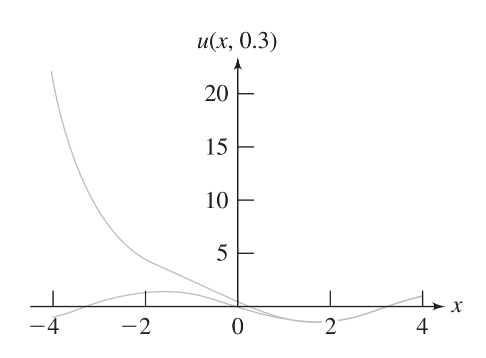


FIGURA 5.20(a) *Perfil de una cuerda forzada y sin forzar en* $t = 0.3$.

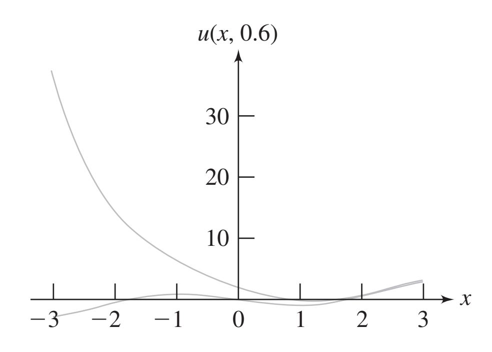


FIGURA 5.20(b) $t = 0.6$.

5.4.2 Ondas hacia adelante y hacia atrás

Continuando con el problema de valores en la frontera para la ecuación de onda en toda la recta real, puede escribir la fórmula de d'Alembert (5.27) para la solución como

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(f(x-ct) - \frac{1}{c}\int_0^{x-ct} g(\xi)\,d\xi\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + \frac{1}{c}\int_0^{x+ct} g(\xi)\,d\xi\right) \\ &= \varphi(x-ct) + \beta(x+ct), \end{aligned}$$

donde

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(\xi)\,d\xi$$

y

$$\beta(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(\xi)\,d\xi.$$

Llame a $\varphi(x - ct)$ una onda hacia adelante (o derecha), y $\beta(x + ct)$ una onda hacia atrás (o izquierda). La gráfica de $\varphi(x - ct)$ es la gráfica de $\varphi(x)$ trasladada ct unidades a la derecha. Es posible, por tanto pensar en $\varphi(x - ct)$ como la gráfica de $\varphi(x)$ moviéndose a la derecha con velocidad c. La gráfica de $\beta(x + ct)$ es la gráfica de $\beta(x)$ trasladada ct unidades a la izquierda. Así $\beta(x + ct)$ es la gráfica de $\beta(x)$ moviéndose a la izquierda con velocidad c. El perfil de la cuerda en el tiempo t, dado por la gráfica de $y = u(x, t)$ como una función de x, es la suma de estas ondas hacia adelante y hacia atrás en el tiempo t.

Como un ejemplo de este proceso, considere el problema con valores en la frontera con $c = 1$,

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{para } -2 \le x \le 2 \\ 0 & \text{para } |x| > 2 \end{cases}$$

y $g(x) = 0$. En la figura 5.21(a) se muestra esta función posición inicial. La solución es una suma de una onda hacia adelante y una hacia atrás:

$$u(x,t) = \varphi(x+ct) + \beta(x-ct) = \frac{1}{2}f(x+t) + \frac{1}{2}f(x-t).$$

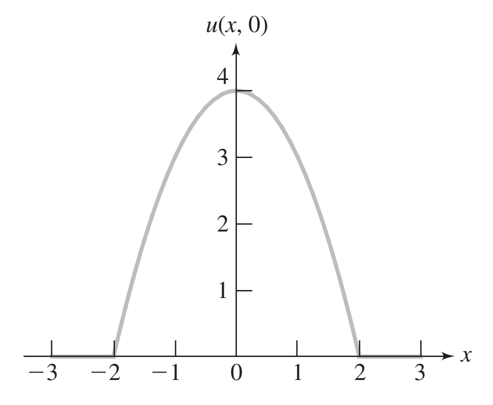


FIGURA 5.21(a)

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{para } -2 \le x \le 2 \\ 0 & \text{para } |x| > 2 \end{cases}.$$

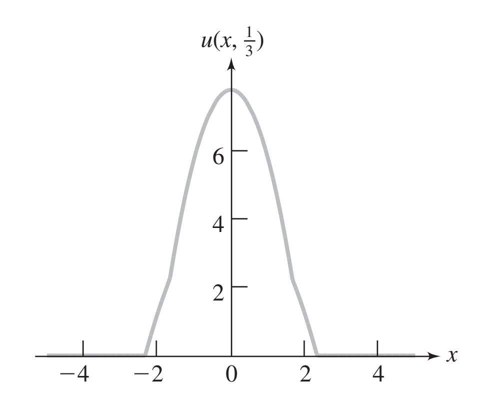


FIGURA 5.21(b) *Superposición de ondas hacia adelante y hacia atrás en* $t = \frac{1}{3}$.

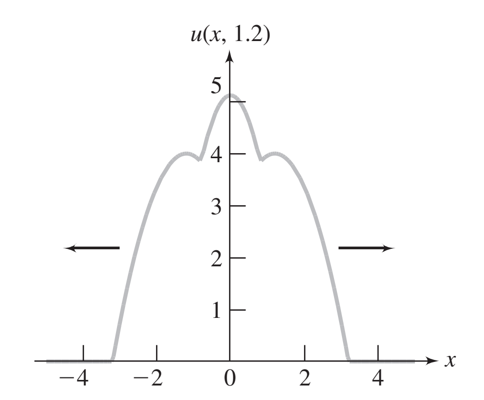


FIGURA 5.21(c) $t = 1.2$.

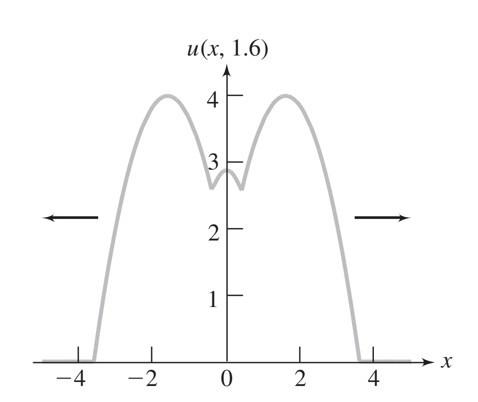


FIGURA 5.21(d) $t = 1.6$.

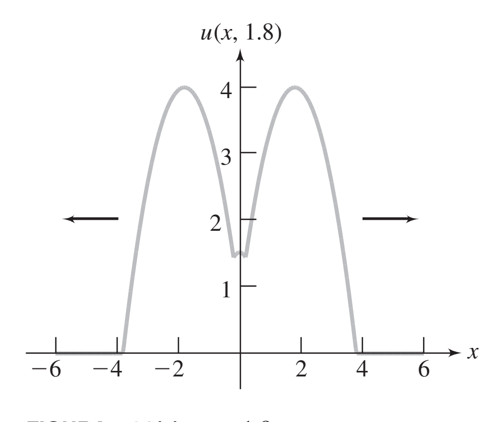


FIGURA 5.21(e) $t = 1.8$.

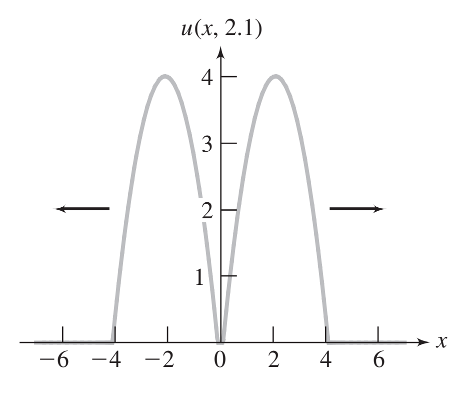


FIGURA 5.21(f) $t = 2.1$.

En cualquier tiempo t, el movimiento consiste de la función posición inicial trasladada t unidades a la derecha, superpuesta con la función posición inicial trasladada t unidades a la izquierda. Considere el movimiento como la función posición inicial (figura 5.21(a)) moviéndose simultáneamente hacia la derecha e izquierda. Debido a que $f(x)$ vale cero fuera de $[-2, 2]$, estas ondas hacia adelante y hacia atrás

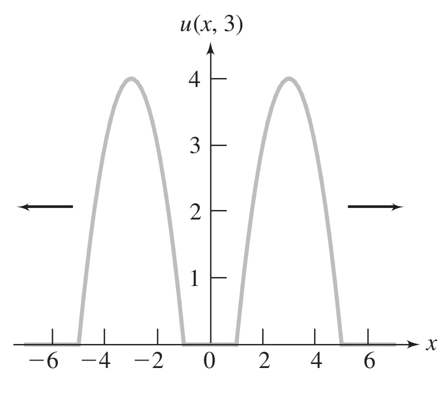


FIGURA 5.21(g) $t = 3$.

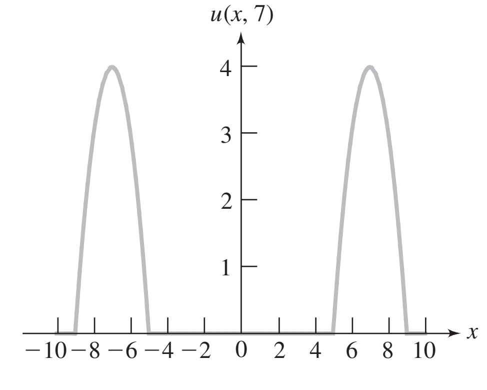


FIGURA 5.21(h) $t = 7$.

de hecho se separan y llegan a ser ajenas, una continúa moviéndose hacia la derecha y la otra hacia la izquierda en la recta real. En las figuras 5.21(b) a (h) se muestra este proceso.

SECCIÓN 5.4 *PROBLEMAS*

En cada uno de los problemas del 1 al 6, determine las características de la ecuación de onda para el problema

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{para } -\infty < x < \infty,\ t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x),\ u_t(x, 0) = g(x) \quad \text{para } -\infty < x < \infty$$

para el valor de c dado y escriba la solución de d'Alembert.

1. $c = 1, f(x) = x^2, g(x) = -x$

2. $c = 4, f(x) = x^2 - 2x, g(x) = \cos(x)$

3. $c = 7, f(x) = \cos(\pi x), g(x) = 1 - x^2$

4. $c = 5, f(x) = \text{sen}(2x), g(x) = x^3$

5. $c = 14, f(x) = e^x, g(x) = x$

6. $c = 12, f(x) = -5x + x^2, g(x) = 3$

En cada uno de los problemas del 7 al 12, resuelva el problema

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + F(x, t) \quad \text{para } -\infty < x < \infty,\ t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x),\ u_t(x, 0) = g(x) \quad \text{para } -\infty < x < \infty$$

para la $c, f(x)$ y $g(x)$ dadas.

7. $c = 4, f(x) = x, g(x) = e^{-x}, F(x, t) = x + t$

8. $c = 2, f(x) = \text{sen}(x), g(x) = 2x, F(x, t) = 2xt$

9. $c = 8, f(x) = x^2 - x, g(x) = \cos(2x), F(x, t) = xt^2$

10. $c = 4, f(x) = x^2, g(x) = xe^{-x}, F(x, t) = x\,\text{sen}(t)$

11. $c = 3, f(x) = \cosh(x), g(x) = 1, F(x, t) = 3xt^3$

12. $c = 7, f(x) = 1 + x, g(x) = \text{sen}(x), F(x, t) = x - \cos(t)$

En cada uno de los problemas 13 al 18, escriba la solución del problema

$$u_{tt} = u_{xx} \quad \text{para } -\infty < x < \infty,\ t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x),\ u_t(x, 0) = 0 \quad \text{para } -\infty < x < \infty$$

como una suma de una onda hacia adelante y una hacia atrás. Dibuje la gráfica de la función posición inicial y después la gráfica de la solución en tiempos seleccionados, probando la solución como una superposición de ondas hacia adelante y hacia atrás moviéndose en direcciones opuestas a lo largo de la recta real.

13. $f(x) = \begin{cases} \text{sen}(2x) & \text{para } -\pi \le x \le \pi \\ 0 & \text{para } |x| > \pi \end{cases}$

14. $f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{para } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{para } |x| > 1 \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{para } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{para } |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

16. $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{para } |x| \le 1 \\ 0 & \text{para } |x| > 1 \end{cases}$

17. $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & \text{para } -1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{para } x < -1 \ \text{ y para } x > 2 \end{cases}$

18. $f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 - 4x + 4 & \text{para } -2 \le x \le 2 \\ 0 & \text{para } |x| > 2 \end{cases}$

5.5 Modos normales de vibración de una membrana circular elástica

Analice el movimiento de una membrana (como la de un tambor) sujetada por un marco circular y puesta en movimiento con posición y velocidad iniciales. La posición de reposo de la membrana es en el plano xy con el origen en el centro y la membrana tiene un radio R. Usando coordenadas polares, la partícula de la membrana en (r, θ) se supone que vibra vertical y perpendicularmente al plano $x\,y$, y su desplazamiento desde la posición de reposo en el tiempo t es $z(r, \theta, t)$.

La ecuación (5.4), da la ecuación de onda para esta función de desplazamiento:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\right).$$

Por el momento suponga que el movimiento de la membrana es simétrico respecto al origen, en cuyo caso z sólo depende de r y t . Ahora la ecuación de onda es

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}\right).$$

Sea el desplazamiento inicial dado por $z(r, 0) = f(r)$, y sea la velocidad inicial

$$\frac{\partial z}{\partial t}(r, 0) = g(r).$$

Intente una solución

$$z(r, t) = F(r)T(\theta).$$

Obtiene, después de cálculos rutinarios,

$$T'' + \lambda T = 0 \quad \text{y} \quad F'' + \frac{1}{r}F' + \frac{\lambda}{c^2}F = 0.$$

Si $\lambda > 0$, a saber $\lambda = \omega^2$, la ecuación para F es una ecuación de Bessel de orden cero, con solución general

$$F(r) = aJ_0\left(\frac{\omega}{c}r\right) + bY_0\left(\frac{\omega}{c}r\right).$$

Como $Y_0\,(\omega r/c) \to -\infty$ conforme $r \to 0$ (el centro de la membrana), elija $b = 0$. Ahora la ecuación para T es

$$T'' + \omega^2 T = 0,$$

con solución general

$$T(t) = d\cos(\omega t) + k\,\text{sen}(\omega t).$$

Tiene, para cada $\omega > 0$, una función

$$z_\omega(r, t) = a_\omega J_0\left(\frac{\omega}{c}r\right)\cos(\omega t) + b_\omega J_0\left(\frac{\omega}{c}r\right)\text{sen}(\omega t).$$

Como la membrana está fija en un marco circular,

$$z_\omega(R, t) = a_\omega J_0\left(\frac{\omega}{c}R\right)\cos(\omega t) + b_\omega J_0\left(\frac{\omega}{c}R\right)\text{sen}(\omega t) = 0$$

para $t > 0$. Esta condición se satisface si $J_0(\omega R/c) = 0$. Sean $j_1, j_2, \ldots$ los ceros positivos de J_0, con

$$j_1 < j_2 < \cdots,$$

y elija

$$\frac{\omega R}{c} = j_n$$

o

$$\omega_n = \frac{j_n c}{R}$$

para $n = 1, 2, \ldots$ Esto produce los valores propios de este problema:

$$\lambda_n = \omega_n^2 = \frac{j_n^2 c^2}{R^2}.$$

Ahora tiene

$$z_n(r, t) = a_n J_0\left(\frac{j_n r}{R}\right)\cos\left(\frac{j_n ct}{R}\right) + b_n J_0\left(\frac{j_n r}{R}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{j_n ct}{R}\right).$$

Todas estas funciones satisfacen la condición en la frontera $z(R, t) = 0$. Para satisfacer las condiciones iniciales, se intenta una superposición

$$z(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n J_0\left(\frac{j_n r}{R}\right)\cos\left(\frac{j_n ct}{R}\right) + b_n J_0\left(\frac{j_n r}{R}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{j_n ct}{R}\right)\right]. \tag{5.28}$$

Ahora

$$z(r, 0) = f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0\left(\frac{j_n r}{R}\right),$$

el desarrollo de Fourier-Bessel de $f(r)$. Sea $s = r/R$ para convertir esta serie en

$$f(Rs) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(j_n s),$$

en donde s varía de 0 a 1. Sabe de la sección 4.3.3 que los coeficientes en este desarrollo están dados por

$$a_n = \frac{2}{[J_1(j_n)]^2}\int_0^1 s f(Rs) J_0(j_n s)\, ds$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

Ahora debe resolver para las b_n. Calcule

$$\frac{\partial z}{\partial t}(r, 0) = g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{j_n c}{R} J_0\left(\frac{j_n r}{R}\right).$$

Este es el desarrollo de Fourier-Bessel de $g(r)$. Nuevamente, en referencia con la sección 4.3.3, debe elegir

$$b_n \frac{j_n c}{R} = \frac{2}{[J_1(j_n)]^2}\int_0^1 s g(Rs) J_0(j_n s)\, ds,$$

o

$$b_n = \frac{2R}{c j_n [J_1(j_n)]^2}\int_0^1 s g(Rs) J_0(j_n s)\, ds$$

para $n = 1, 2, \ldots$ Con estos coeficientes, la ecuación (5.28) es la solución para la función posición de la membrana.

Los números $\omega_n = j_n c/R$ son las frecuencias de los modos normales de vibración, los cuales tienen periodos $2\pi/\omega_n = 2\pi R/j_n c$. Los modos normales de vibración son las funciones $z_n(r, t)$. Frecuentemente estas funciones se escriben en la forma ángulo fase como

$$z_n(r,t) = A_n J_0\left(\frac{j_n r}{R}\right)\cos(\omega_n t + \delta_n)$$

en donde A_n y δ_n son constantes.

El primer modo normal es

$$z_1(r,t) = A_1 J_0\left(\frac{j_1 r}{R}\right)\cos(\omega_1 t + \delta_1).$$

Conforme r varía de 0 a R, $j_1 r/R$ varía de 0 a j_1. En cualquier tiempo t, una sección radial a través de la membrana toma la forma de la gráfica de $J_0(x)$ para $0 \le x \le j_1$ (figura 5.22(a)).

El segundo modo normal es

$$z_2(r,t) = A_2 J_0\left(\frac{j_2 r}{R}\right)\cos(\omega_2 t + \delta_2).$$

Ahora conforme r varía de 0 a R, $j_2 r/R$ varía de 0 a j_2, pasando a través de j_1 a lo largo del camino. Como $J_0(j_2 r/R) = 0$ cuando $j_2 r/R = j_1$, este modo tiene un círculo nodal (fijo en el movimiento) de radio

$$r = \frac{j_1 R}{j_2}.$$

Una sección a través de la membrana toma la forma de la gráfica de $J_0(x)$ para $0 \le x \le j_2$ (figura 5.22(b)).

Análogamente, el tercer modo normal es

$$z_3(r,t) = A_3 J_0\left(\frac{j_3 r}{R}\right)\cos(\omega_3 t + \delta_3),$$

y este modo tiene dos nodos, uno en $r = j_1 R/j_3$ y el segundo en $r = j_2 R/j_3$. Ahora la sección radial tiene la forma de la gráfica de $J_0(x)$ para $0 \le x \le j_3$ (figura 5.22(c)).

En general, el n-ésimo modo normal tiene $n - 1$ nodos (círculos fijos en el movimiento de la membrana), sucediendo en $j_1 R/j_n, \ldots, j_{n-1} R/j_n$.

En la siguiente sección se retomará este problema, esta vez teniendo la θ dependiente de la función de desplazamiento. Esto llevará a una solución involucrando una serie doble de Fourier en senos.

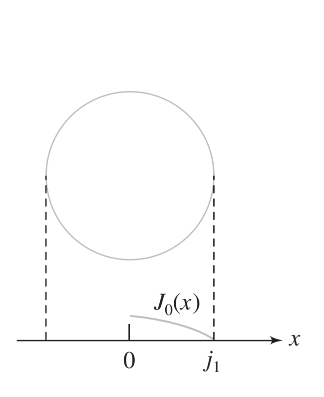


FIGURA 5.22(a) *Primer modo normal.*

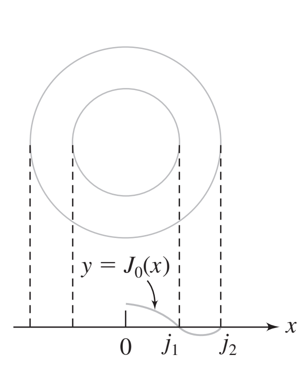


FIGURA 5.22(b) *Segundo modo normal.*

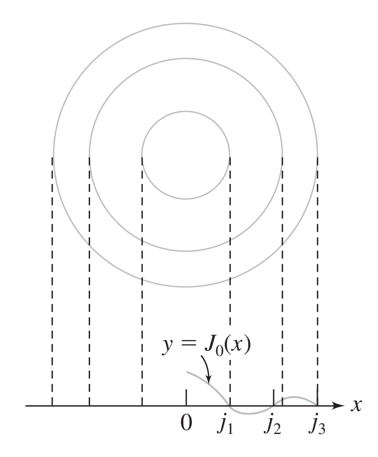


FIGURA 5.22(c) *Tercer modo normal.*

SECCIÓN 5.5 PROBLEMAS

1. Sean $c = R = 1, f(r) = 1 - r$ y $g(r) = 0$. Usando el material de la sección 4.2 (funciones de Bessel), aproxime los coeficientes a_1 a a_5 en la solución dada por la ecuación (5.28) y dibuje la gráfica de la quinta suma parcial de la solución para una selección de tiempos. Escriba los modos (aproximados) normales $z_n(r, t) = A_n J_0(j_n r) \cos(\omega_n t + \delta_n)$ para $n = 1, \ldots 5$.

2. Repita el problema 1, pero ahora usando $f(r) = 1 - r^2$ y $g(r) = 0$.

3. Repita el problema 1, pero ahora usando $f(r) = \operatorname{sen}(\pi r)$ y $g(r) = 0$.

5.6 Vibraciones de una membrana circular elástica, vuelta a visitar

Se continúa a partir de la última sección con las vibraciones de una membrana elástica fija en un marco circular. Ahora, sin embargo, se mantiene la θ dependiente de la función de desplazamiento y considerando toda la ecuación de onda.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \right)$$

para $0 \leq r < R, -\pi \leq \theta \leq \pi, t > 0$. Usaremos las condiciones iniciales

$$z(r, \theta, 0) = f(r, \theta), \quad \frac{\partial z}{\partial t}(r, \theta, 0) = 0,$$

así la membrana es soltada desde el reposo con el desplazamiento inicial dado.

En coordenadas cilíndricas, θ puede ser reemplazada por $\theta + 2n\pi$ para cualquier entero n, así, también, se impondrán las *condiciones de periodicidad*

$$z(r, -\pi, t) = z(r, \pi, t) \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial \theta}(r, -\pi, t) = \frac{\partial z}{\partial \theta}(r, \pi, t)$$

para $0 \leq r < R$ y $t > 0$.

Haga $z(r, \theta, t) = F(r)\Theta(\theta)T(r)$ en la ecuación de onda para obtener

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{F'' + (1/r)F'}{F} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda$$

para alguna constante λ ya que el lado izquierdo depende sólo de t, y el lado derecho sólo de r y θ. Entonces

$$T'' + \lambda c^2 T = 0$$

y

$$\frac{r^2 F'' + rF'}{F} + \lambda r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta}.$$

Debido a que el lado izquierdo depende sólo de r y el derecho sólo de θ, y éstos son independientes, para alguna constante μ,

$$\frac{r^2 F'' + rF'}{F} + \lambda r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \mu.$$

Entonces

$$\Theta'' + \mu\Theta = 0$$

y

$$r^2F'' + rF' + (\lambda r^2 - \mu)F = 0.$$

Resolviendo estas ecuaciones diferenciales para $T(t)$, $F(r)$ y $\Theta(\theta)$, tiene las siguientes condiciones en la frontera. Primero, por la periodicidad,

$$\Theta(-\pi) = \Theta(\pi) \text{ y } \Theta'(-\pi) = \Theta'(\pi).$$

Ahora, debido a que la membrana está fija en un marco circular,

$$F(R) = 0.$$

Finalmente, debido a que la velocidad inicial de la membrana es cero,

$$T'(0) = 0.$$

El problema para $\Theta(\theta)$ es un problema de Sturm-Liouville periódico, que fue resuelto en la sección 4.3.1 (ejemplo 4.9). Los valores propios son

$$\mu_n = n^2 \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots,$$

y las funciones propias son

$$\Theta_n(\theta) = a_n \cos(n\theta) + b_n \operatorname{sen}(n\theta).$$

Con $\mu = n^2$, el problema para F es

$$r^2F''(r) + rF'(r) + (\lambda r^2 - n^2)F(r) = 0; \qquad F(R) = 0.$$

Ha visto (sección 3.2.2) que esta ecuación diferencial tiene solución general

$$F(r) = a\,J_n\left(\sqrt{\lambda}r\right) + bY_n\left(\sqrt{\lambda}r\right),$$

en términos de las funciones de Bessel de orden n del primero y segundo tipo. Debido a que $Y_n\left(\sqrt{\lambda}r\right)$ no está acotada conforme $r \to 0+$, elija $b = 0$ para tener una solución acotada. Esto deja $F(r) = a\,J_n\left(\sqrt{\lambda}r\right)$. Para encontrar valores admisibles de λ, necesita

$$F(R) = a\,J_n\left(\sqrt{\lambda}R\right) = 0.$$

Busque satisfacer ésta con a distinta de cero para evitar una solución trivial. Así $\sqrt{\lambda}R$ debe ser uno de los ceros positivos de J_n. Sean estos ceros positivos

$$j_{n1} < j_{n2} < \cdots,$$

con doble índice ya que esta deducción depende de la elección de $\mu = n^2$. Entonces

$$\lambda_{nk} = \frac{j_{nk}^2}{R^2},$$

con j_{nk} el k-ésimo cero positivo de $J_n(x)$. Las λ_{nk} son los valores propios. Las funciones propias correspondientes son múltiplos distintos de cero de

$$J_n\left(\frac{j_{nk}}{R}r\right) \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{y} \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Con estos valores de λ, el problema para T es

$$T'' + c^2\left(\frac{j_{nk}}{R}\right)^2 T = 0; \qquad T'(0) = 0$$

con soluciones constantes múltiplos de

$$T_{nk}(t) = \cos\left(\frac{j_{nk}}{R}ct\right).$$

Ahora puede formar las funciones

$$z_{nk}(r, \theta, t) = [a_{nk}\cos(n\theta) + b_{nk}\,\mathrm{sen}(n\theta)]J_n\left(\frac{j_{nk}}{R}r\right)\cos\left(\frac{j_{nk}}{R}ct\right)$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$ y $k = 1, 2, \ldots$ Cada una de estas funciones satisface la ecuación de onda y las condiciones en la frontera, junto con la condición de velocidad inicial cero. Para satisfacer la condición que la posición inicial está dada por f, escriba una superposición

$$z(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}[a_{nk}\cos(n\theta) + b_{nk}\,\mathrm{sen}(n\theta)]J_n\left(\frac{j_{nk}}{R}r\right)\cos\left(\frac{j_{nk}}{R}ct\right). \tag{5.29}$$

Ahora necesita

$$z(r, \theta, 0) = f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}[a_{nk}\cos(n\theta) + b_{nk}\,\mathrm{sen}(n\theta)]J_n\left(\frac{j_{nk}}{R}r\right).$$

Para ver cómo elegir estos coeficientes, primero escriba esta ecuación en la forma

$$f(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{0k}J_0\left(\frac{j_{0k}}{R}r\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left[\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}J_n\left(\frac{j_{nk}}{R}r\right)\right]\cos(n\theta)\right.$$
$$\left. + \left[\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}J_n\left(\frac{j_{nk}}{R}r\right)\right]\mathrm{sen}(n\theta)\right).$$

Para una r dada, piense en $f(r, \theta)$ como una función de θ. La última ecuación es el desarrollo en serie de Fourier, en $[-\pi, \pi]$, de esta función de θ. Como conoce los coeficientes en el desarrollo de Fourier de una función de θ, puede escribir inmediatamente

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{0k}J_0\left(\frac{j_{0k}}{R}r\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\alpha_0(r),$$

y, para $n = 1, 2, \ldots,$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}J_n\left(\frac{j_{nk}}{R}r\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta)\cos(n\theta)\,d\theta = \alpha_n(r)$$

y

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}J_n\left(\frac{j_{nk}}{R}r\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta)\,\mathrm{sen}(n\theta)\,d\theta = \beta_n(r)$$

Ahora reconoce que para cada $n = 0, 1, 2, \ldots,$ las últimas tres ecuaciones son las expansiones de las funciones de r en funciones en series de Bessel, con conjuntos de coeficientes, a_{0k}, a_{nk} y b_{nk} respectivamente. A partir de la sección 4.3.3, conoce los coeficientes en estas expansiones:

$$a_{0k} = \frac{1}{[J_1(j_{0k})]^2}\int_0^1 \xi\alpha_0(R\xi)J_0(j_{0k}\xi)\,d\xi \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots,$$

y, para $n = 1, 2, \ldots,$

$$a_{nk} = \frac{2}{[J_{n+1}(j_{nk})]^2}\int_0^1 \xi\alpha_n(R\xi)J_n(j_{nk}\xi)\,d\xi \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots,$$

y

$$b_{nk} = \frac{2}{[J_{n+1}(j_{nk})]^2} \int_0^1 \xi \beta_n(R\xi) J_n(j_{nk}\xi)\, d\xi \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots.$$

La idea en el cálculo de los coeficientes es primero realizar las integraciones respecto a θ para obtener las funciones $\alpha_0(r)$, $\alpha_n(r)$ y $\beta_n(r)$, escribiéndolas como series de Fourier-Bessel. Obtenga los coeficientes en estas series, que son las a_{nk} y las b_{nk}, evaluando las integrales para los coeficientes en este tipo de expansión en función propia. En la práctica, éstas son aproximadas debido a que los ceros de las funciones de Bessel de orden n sólo pueden ser aproximados.

SECCIÓN 5.6 PROBLEMAS

1. Aproxime la desviación vertical del centro de una membrana de radio 2 para cualquier tiempo $t > 0$ calculando los tres primeros términos no cero de la solución para el caso $c = 2$ y el desplazamiento inicial es $f(r, \theta) = (4 - r^2)\,\text{sen}^2(\theta)$, con $g(r, \theta) = \theta$.

2. Use la solución dada en la sección para probar el hecho plausible de que el centro de la membrana queda fijo para todo tiempo, si el desplazamiento inicial es una función impar de θ (esto es, $f(r, -\theta) = -f(r, \theta)$). *Sugerencia:* La única función de Bessel de orden entero que es distinta de cero en $r = 0$ es J_0.

5.7 Vibraciones de una membrana rectangular

Considere una membrana elástica estirada sobre un marco rectangular al que está fija. Suponga que el marco y el rectángulo que encierra ocupan una región en el plano xy definido por $0 \le x \le L$, $0 \le y \le K$. Se da un desplazamiento inicial a la membrana y se suelta con una velocidad inicial dada. Busca determinar la función de desplazamiento vertical $z(x, y, t)$. En cualquier tiempo t, la gráfica de $z = z(x, y, t)$ para $0 < x < L$, $0 < y < K$ es una fotografía de la posición de la membrana en ese tiempo. Si tuviera una película de esta función conforme pasa el tiempo, tendría una imagen en movimiento de la membrana.

El problema con valores en la frontera para z es

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \quad \text{para } 0 < x < L, 0 < y < K, t > 0,$$

$$z(x, 0, t) = z(x, K, t) = 0 \quad \text{para } 0 < x < L, t > 0,$$

$$z(0, y, t) = y(L, y, t) = 0 \quad \text{para } 0 < y < K, t > 0,$$

$$z(x, y, 0) = f(x, y) \quad \text{para } 0 < x < L, 0 < y < K,$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}(x, y, 0) = g(x, y) \quad \text{para } 0 < x < L, 0 < y < K.$$

Se resuelve este problema para el caso de velocidad inicial cero, $g(x, y) = 0$.

Intente una separación de las variables, $z(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$. Obtiene

$$XYT'' = a^2[X''YT + XY''T],$$

o

$$\frac{T''}{a^2T} - \frac{Y''}{Y} = \frac{X''}{X}.$$

Está imposibilitado para aislar tres variables en diferentes lados de una ecuación. Sin embargo, puede argumentar que el lado izquierdo es una función sólo de y y t, y el lado derecho sólo de x, y estas tres variables son independientes. Por tanto, para alguna constante λ,

$$\frac{T''}{a^2T} - \frac{Y''}{Y} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Ahora tiene

$$X'' + \lambda X = 0 \quad \text{y} \quad \frac{T''}{a^2T} + \lambda = \frac{Y''}{Y}.$$

En la última ecuación, el lado izquierdo depende sólo de t y el lado derecho sólo de y, así para alguna constante μ,

$$\frac{T''}{a^2T} + \lambda = \frac{Y''}{Y} = -\mu.$$

Entonces

$$Y'' + \mu Y = 0 \quad \text{y} \quad T'' + a^2(\lambda + \mu)T = 0.$$

Las variables han sido separadas, con el costo de introducir dos constantes de separación. Ahora use las condiciones en la frontera:

$$z(0, y, t) = X(0)Y(y)T(t) = 0 \text{ implica que } X(0) = 0.$$

Análogamente,

$$X(L) = 0,\ Y(0) = 0 \quad \text{y} \quad Y(K) = 0.$$

Los dos problemas para X y Y son

$$X'' + \lambda X = 0; \quad X(0) = X(L) = 0$$

y

$$Y'' + \mu Y = 0;\ Y(0) = Y(K) = 0.$$

Éstos tienen soluciones:

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

y

$$\mu_m = \frac{m^2\pi^2}{K^2}, \quad Y_m(y) = \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{K}\right),$$

con n y m variando independientemente sobre los enteros positivos. Ahora el problema para T se convierte en

$$T'' + a^2\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \frac{m^2\pi^2}{K^2}\right)T = 0$$

Más aún, debido a la hipótesis de velocidad inicial cero,

$$\frac{\partial z}{\partial t}(x, y, 0) = X(x)Y(y)T'(0) = 0,$$

así $T'(0) = 0$. Entonces T debe ser un múltiplo constante de

$$\cos\left(\sqrt{\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{K^2}}\pi a t\right).$$

Para cada entero positivo n y m, tiene ahora una función

$$z_{nm}(x, y, t) = a_{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{K}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{K^2}}\pi a t\right)$$

que satisface todas las condiciones del problema, excepto posiblemente la condición inicial $z(x, y, 0) = f(x, y)$. Para esto, use una superposición

$$z(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{K}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{K^2}}\pi a t\right).$$

Debe elegir las constantes para satisfacer

$$z(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{K}\right).$$

Puede hacer esto explotando el truco usado cuando se introdujo la serie de Fourier. Escoja un entero positivo m_0 y multiplique ambos lados de esta ecuación por $\operatorname{sen}(m_0\pi y/K)$ para obtener

$$f(x, y) \operatorname{sen}\left(\frac{m_0\pi y}{K}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{K}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m_0\pi y}{K}\right).$$

Ahora integre 0 a K en la variable $y-$, dejando los términos en x solos. Obtiene

$$\int_0^K f(x, y) \operatorname{sen}\left(\frac{m_0\pi y}{K}\right) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \int_0^K \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{K}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m_0\pi y}{K}\right) dy.$$

Por la ortogonalidad de estas funciones seno en $[0, K]$, todas las integrales son cero excepto para el término $m = m_0$. La serie en m se colapsa por tanto en un solo término, con

$$\int_0^K \operatorname{sen}^2\left(\frac{m_0\pi y}{K}\right) dy = \frac{K}{2}$$

cuando $m = m_0$. Así tiene

$$\int_0^K f(x, y) \operatorname{sen}\left(\frac{m_0\pi y}{K}\right) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K}{2} a_{nm_0} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

El lado izquierdo de esta ecuación es una función de x. Elija cualquier entero positivo n_0 y multiplique esta ecuación por $\operatorname{sen}(n_0\pi x/L)$:

$$\int_0^K f(x, y) \operatorname{sen}\left(\frac{n_0\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m_0\pi y}{K}\right) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K}{2} a_{nm_0} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_0\pi x}{L}\right).$$

Integre, esta vez, en la variable x:

$$\int_0^L \int_0^K f(x, y) \operatorname{sen}\left(\frac{n_0\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m_0\pi y}{K}\right) dy\, dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K}{2} a_{nm_0} \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_0\pi x}{L}\right) dx.$$

Todos los términos de la derecha son cero, excepto cuando $n = n_0$, y este término es $L/2$. La última ecuación se convierte en

$$\int_0^L \int_0^K f(x, y) \operatorname{sen}\left(\frac{n_0\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m_0\pi y}{K}\right) dy\, dx = \frac{K}{2}\frac{L}{2} a_{n_0 m_0}.$$

Elimine los subíndices cero, que servían sólo para saber cuáles enteros estaban fijos, ahora tiene

$$a_{nm} = \frac{4}{LK}\int_0^L \int_0^K f(x, y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{K}\right) dy\, dx.$$

Con esta elección de los coeficientes, tiene la solución para la función de desplazamiento.

EJEMPLO 5.12

Suponga que el desplazamiento inicial está dado por

$$z(x, y, 0) = x(L-x)y(K-y),$$

y la velocidad inicial es cero. Los coeficientes en la doble expansión de Fourier son

$$\begin{aligned} a_{nm} &= \frac{4}{LK}\int_0^L \int_0^K x(L-x)y(K-y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{K}\right) dy\, dx \\ &= \frac{4}{LK}\left(\int_0^L x(L-x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx\right)\left(\int_0^K y(K-y) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{K}\right) dy\right) \\ &= \frac{16L^2K^2}{(nm\pi^2)^3}[(-1)^n - 1][(-1)^m - 1]. \end{aligned}$$

La solución para la función de desplazamiento es en este caso

$$z(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{16L^2K^2}{(nm\pi^2)^3}[(-1)^n - 1][(-1)^m - 1] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{K}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{K^2}}\pi a t\right)\right]. \blacksquare$$

SECCIÓN 5.7 PROBLEMAS

1. Resuelva

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad \text{para } 0 < x < 2\pi,\ 0 < y < 2\pi,\ t > 0,$$

$$z(x, 0, t) = z(x, 2\pi, t) = 0 \quad \text{para } 0 < x < 2\pi,\ t > 0,$$

$$z(0, y, t) = z(2\pi, y, t) = 0 \quad \text{para } 0 < y < 2\pi,\ t > 0,$$

$$z(x, y, 0) = x^2 \operatorname{sen}(y) \quad \text{para } 0 < x < 2\pi,\ 0 < y < 2\pi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}(x, y, 0) = 0 \quad \text{para } 0 < x < 2\pi,\ 0 < y < 2\pi.$$

2. Resuelva

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 9\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \quad \text{para } 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi,\ t > 0,$$

$$z(x, 0, t) = z(x, \pi, t) = 0 \quad \text{para } 0 < x < \pi,\ t > 0,$$

$$z(0, y, t) = z(\pi, y, t) = 0 \quad \text{para } 0 < y < \pi,\ t > 0,$$

$$z(x, y, 0) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) \quad \text{para } 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}(x, y, 0) = xy \quad \text{para } 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi.$$

3. Resuelva

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 4\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \quad \text{para } 0 < x < 2\pi,\ 0 < y < 2\pi,\ t > 0,$$

$$z(x, 0, t) = z(x, 2\pi, t) = 0 \quad \text{para } 0 < x < 2\pi,\ t > 0,$$

$$z(0, y, t) = z(2\pi, y, t) = 0 \quad \text{para } 0 < y < 2\pi,\ t > 0,$$

$$z(x, y, 0) = 0 \quad \text{para } 0 < x < 2\pi,\ 0 < y < 2\pi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}(x, y, 0) = 1 \quad \text{para } 0 < x < 2\pi,\ 0 < y < 2\pi.$$

CAPÍTULO 6

La ecuación de calor

Los fenómenos de calor y radiación con frecuencia son modelados por una ecuación diferencial parcial llamada *ecuación de calor*. Deducirá una versión tridimensional de la ecuación de calor, usando el teorema de divergencia de Gauss. Después, examinará más de cerca la ecuación de calor y la resolverá bajo una variedad de condiciones, siguiendo un programa paralelo al que llevó a cabo para la ecuación de onda.

6.1 La ecuación de calor y las condiciones iniciales y de frontera

Sea $u(x, y, z, t)$ la temperatura en el tiempo t y el lugar (x, y, z) en una región en el espacio, u satisface la ecuación diferencial parcial

$$\mu\rho\frac{\partial u}{\partial t} = K\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \nabla K \cdot \nabla u,$$

en donde $K(x, y, z)$ es la conductividad térmica del medio, $\mu(x, y, z)$ es el calor específico y $\rho(x, y, z)$ es la densidad. El término $\nabla K \cdot \nabla u$ es el producto punto de los gradientes de K y u. Esta es la ecuación de calor en tres variables espaciales y el tiempo.

Si la conductividad térmica del medio es constante, entonces ∇K es el vector cero y el término $\nabla K \cdot \nabla u = 0$. Ahora la ecuación de calor tridimensional es

$$\mu\rho\frac{\partial u}{\partial t} = K\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

La ecuación de calor unidimensional es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{\mu\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Esta ecuación se aplica frecuentemente, por ejemplo, a la conducción de calor en una barra delgada o alambre cuya longitud es mucho mayor que sus otras dimensiones. Para tener una mejor comprensión de lo que está involucrado en la ecuación de calor unidimensional, se desarrollará por separado a partir de los principios básicos.

Considere una barra recta y delgada de densidad constante ρ y área constante A de la sección transversal, colocada a lo largo del eje x desde 0 a L. Suponga que los extremos de la barra están aislados y no permiten la pérdida de calor y que la temperatura en la sección transversal de la barra perpendicular al eje x en x es una función $u(x, t)$ sólo de x y t. Suponga que el calor específico μ y la conductividad térmica K son constantes.

Considere un segmento típico de la barra entre $x = \alpha$ y $x = \beta$, como en la figura 6.1. Por la definición del calor específico, la razón a la que se acumula la energía calorífica en este segmento es

$$\int_\alpha^\beta \mu\rho A \frac{\partial u}{\partial t}\, dx.$$

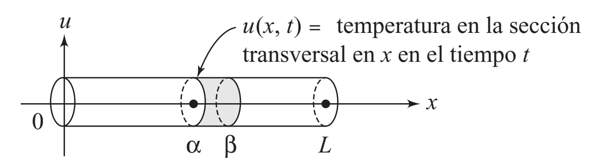


FIGURA 6.1

Por la ley de enfriamiento de Newton, la energía calorífica fluye dentro de este segmento del extremo caliente al frío en una razón igual a K veces el negativo del gradiente de la temperatura (diferencia en la temperatura en los extremos del segmento). Por tanto, la razón neta a la que entra la energía calorífica en este segmento de la barra en el tiempo t es

$$KA\frac{\partial u}{\partial x}(\beta, t) - KA\frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, t).$$

Suponga que no se produce energía dentro del segmento. Tal producción podría ocurrir, por ejemplo, si hay una radiación o una fuente de calor tal como una reacción química. Éstos también cambiarían la masa en el segmento con el tiempo. En ausencia de estos efectos, la razón a la cual se acumula la energía calorífica dentro del segmento debe balancear la razón a la que entra en el segmento. Por tanto,

$$\int_\alpha^\beta \mu\rho A\frac{\partial u}{\partial t}dx = KA\left(\frac{\partial u}{\partial x}(\beta, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, t)\right) = KA\int_\alpha^\beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx,$$

así

$$\int_\alpha^\beta \left(\mu\rho\frac{\partial u}{\partial t} - K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) dx = 0.$$

Esta ecuación debe ser cierta para todo α y β con $0 \le \alpha < \beta \le L$. Si el término en el paréntesis en la integral fuera distinto de cero en cualquier x_0 y t_0, entonces por la continuidad podría elegir un intervalo (α, β) alrededor de x_0 en el cual este término sería estrictamente positivo o estrictamente negativo, en todo el intervalo. Pero entonces esta integral de una función positiva o negativa en (α, β) sería positiva o negativa respectivamente, lo cual es una contradicción. Concluya que

$$\mu\rho\frac{\partial u}{\partial t} - K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

para $0 < x < L$ y para $t > 0$. Esta es la ecuación de calor unidimensional. Frecuentemente se escribe esta ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

donde $k = K/\mu\rho$ es una constante positiva que depende del material de la barra. El número k se llama la *difusividad* de la barra.

Ciertamente esta ecuación no determina la función temperatura $u(x, t)$ de manera única. Por ejemplo, si $u(x, t)$ es una solución, también lo es $u(x, t) + c$ para cualquier número real c. Para la unicidad de la solución, esperable en modelos de los fenómenos físicos, necesita las *condiciones en la frontera*, especificando la información en los extremos de la barra en todo tiempo, y las *condiciones iniciales*, dando la temperatura en toda la barra a algún tiempo designado usualmente como el tiempo cero. La ecuación de calor, junto con ciertas condiciones iniciales y en la frontera, determina de manera única la distribución de la temperatura en toda la barra en todo tiempo posterior.

Por ejemplo, puede tener el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < L, t > 0,$$

$$u(0, t) = T_1, u(L, t) = T_2 \quad \text{para } t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq L.$$

Este problema modela la distribución de temperatura en una barra de longitud L cuyo extremo izquierdo se mantiene a temperatura constante T_1 y el extremo derecho a temperatura constante T_2 y cuya temperatura inicial en la sección transversal en x es $f(x)$. Las condiciones en los extremos de la barra son las condiciones en la frontera y la temperatura en el tiempo cero es la condición inicial.

Como un segundo ejemplo, considere el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < L, t > 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq L.$$

Este problema modela la distribución de temperatura en una barra que no tiene pérdida de calor por sus extremos. Las condiciones dadas en la frontera en este problema se llaman *condiciones de aislamiento*.

Aún se pueden especificar otras condiciones en la frontera. Por ejemplo, es posible tener una combinación de temperatura fija y condiciones de aislamiento. Si el extremo izquierdo se mantiene a temperatura constante T y el extremo derecho está aislado, entonces

$$u(0, t) = T \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0.$$

O tener radiación libre (transmisión), en donde la barra pierda calor por radiación desde sus extremos en el medio que la rodea, que se supone que se mantiene a temperatura constante T. Ahora el modelo consta de la ecuación de calor, la función de la temperatura inicial, y de las condiciones en la frontera.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = A[u(0, t) - T], \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -A[u(L, t) - T]$$

para $t \geq 0$. Aquí A es una constante positiva. Observe que si la barra se mantiene más caliente que el medio que la rodea, entonces el flujo de calor, medido por $\partial u/\partial x$, debe ser positivo en el extremo izquierdo y negativo en el extremo derecho.

Las condiciones en la frontera

$$u(0, t) = T_1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -A[u(L, t) - T_2]$$

se usan si el extremo izquierdo se mantiene a temperatura constante T_1 mientras el extremo derecho irradia energía calorífica en un medio de temperatura constante T_2.

En el espacio de dos dimensiones, con conductividad térmica constante, la ecuación de calor es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

mientras que en el espacio de tres dimensiones es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

SECCIÓN 6.1 PROBLEMAS

1. Formule un problema con valor en la frontera que modele condiciones de calor en una barra delgada de longitud L si el extremo izquierdo se mantiene a temperatura cero y el extremo derecho está aislado. La temperatura inicial en la sección transversal en x es $f(x)$.
2. Formule un problema con valor en la frontera que modele condiciones de calor en una barra delgada de longitud L si el extremo izquierdo se mantiene a temperatura $\alpha(t)$ y el extremo derecho a temperatura $\beta(t)$. La temperatura inicial en la sección transversal en x es $f(x)$.
3. Formule un problema con valor en la frontera para la función de temperatura en una barra delgada de longitud L si el extremo izquierdo se mantiene aislado y el extremo derecho a temperatura $\beta(t)$. La temperatura inicial en la sección transversal en x es $f(x)$.

6.2 Soluciones en serie de Fourier de la ecuación de calor

En esta sección resolverá varios problemas con valores en la frontera que modelan la conducción de calor en un intervalo acotado. Para este propósito usará la separación de variables y la serie de Fourier.

6.2.1 Extremos de la barra mantenidos a temperatura cero

Suponga que busca la distribución de la temperatura $u(x, t)$ en una barra delgada, homogénea (densidad constante) de longitud L, dado que la temperatura inicial en la barra en el tiempo cero en la sección transversal en x perpendicular al eje x es $f(x)$. Los extremos de la barra son mantenidos a temperatura cero durante todo el tiempo.

El problema con valores en la frontera que modela esta distribución de temperatura es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < L, t > 0,$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq L.$$

Usará separación de variables. Sustituye $u(x, t) = X(x)T(t)$ en la ecuación de calor para obtener

$$XT' = kX''T$$

o

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X}.$$

El lado izquierdo depende sólo del tiempo, y el lado derecho sólo de la posición y estas variables son independientes. Por tanto, para alguna constante λ,

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Ahora

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0.$$

Si $T(t) = 0$ para todo t, entonces la función de temperatura tiene el valor constante cero, lo que ocurre si la temperatura inicial $f(x) = 0$ para $0 \leq x \leq L$. De otra manera, $T(t)$ no podría ser idénticamente cero, de manera que debe tener $X(0) = 0$. Análogamente, $u(L, t) = X(L)T(t) = 0$ implica que $X(L) = 0$. El problema para X es por tanto

$$X'' + \lambda X = 0; \qquad X(0) = X(L) = 0.$$

Busque valores de λ (los valores propios) por los cuales este problema tenga soluciones no triviales (las funciones propias) para X.

Este problema para X es exactamente el mismo que encuentra para la función que depende del espacio en la separación de variables en la ecuación de onda. Ahí encuentre que los valores propios son

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

para $n = 1, 2, \ldots$, y las funciones propias correspondientes son múltiplos constantes distintos de cero de

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

El problema para T se convierte en

$$T' + \frac{n^2\pi^2 k}{L^2}T = 0,$$

que tiene solución general

$$T_n(t) = c_n e^{-n^2\pi^2 kt/L^2}.$$

Para $n = 1, 2, \ldots$, ahora tiene funciones

$$u_n(x, t) = c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2\pi^2 kt/L^2}$$

que satisfacen la ecuación de calor en $[0, L]$ y las condiciones en la frontera $u(0, t) = u(L, t) = 0$. Falta encontrar una solución que satisfaga la condición inicial. Puede elegir n y c_n de manera que

$$u_n(x, 0) = c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x)$$

sólo si la función de temperatura inicial dada es un múltiplo de esta función seno. No siempre es así. En general, debe intentar construir una solución usando la superposición

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2\pi^2 kt/L^2}.$$

Ahora necesita

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x),$$

que reconoce como el desarrollo de Fourier en senos de $f(x)$ en $[0, L]$. Así elige

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(\xi)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)d\xi.$$

Con esta elección de los coeficientes, tiene la solución para la función de distribución de temperatura:

$$u(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(\xi)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)d\xi\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)e^{-n^2\pi^2 kt/L^2}. \tag{6.1}$$

EJEMPLO 6.1

Suponga que la función de temperatura inicial es constante A para $0 < x < L$, mientras la temperatura en los extremos se mantiene en cero. Para escribir la solución para la función de distribución de temperatura, necesita calcular

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L A\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)d\xi = \frac{2A}{n\pi}[1-\cos(n\pi)] = \frac{2A}{n\pi}[1-(-1)^n].$$

La solución (6.1) es

$$u(x,t) = \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)e^{-n^2\pi^2 kt/L^2}.$$

Como $1-(-1)^n$ es cero si n es par, e igual a 2 si n es impar, sólo necesita sumar sobre los enteros impares y puede escribir

$$u(x,t) = \frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\,\mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)e^{-(2n-1)^2\pi^2 kt/L^2}. \blacksquare$$

Verificación de la solución La función dada por la ecuación (6.1) claramente satisface las condiciones en la frontera e inicio del problema. Cada término vale cero en $x = 0$ y en $x = L$, y los coeficientes son elegidos de manera que $u(x, 0) = f(x)$. Si puede diferenciar esta serie término a término, también será fácil probar que $u(x, t)$ satisface la ecuación de calor, ya que cada término la satisface.

Cuando enfrente este problema con la ecuación de onda, use una identidad trigonométrica para sumar la serie. Aquí, debido a la rapidez de decaimiento de la función exponencial en $u(x, t)$, puede probar fácilmente que la serie converge uniformemente. Elija cualquier $t_0 > 0$. Entonces, para $t \geq t_0$,

$$\left|\frac{1}{2n-1}\,\mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)e^{-(2n-1)^2\pi^2 kt/L^2}\right| \leq \frac{1}{2n-1}e^{-(2n-1)^2\pi^2 kt_0/L^2}.$$

Debido a que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}e^{-(2n-1)^2\pi^2 kt_0/L^2}$$

converge, la serie para $u(x, t)$ converge uniformemente para $0 \leq x \leq L$ y $t \geq t_0$, por un teorema de Weierstrass conocido usualmente como el *teorema M de Weierstrass.*

Por un argumento análogo, puede probar que la serie obtenida diferenciando $u(x, t)$ término a término, una vez respecto a t o dos veces respecto a x, también converge uniformemente. Por tanto, es posible diferenciar esta serie término a término, una vez respecto a t y dos veces respecto a x. Como cada término en la serie satisface la ecuación de calor, entonces $u(x, t)$ también, verificando la solución (6.1).

Considere ahora el problema de la conducción de calor en una barra con extremos aislados.

6.2.2 Temperatura en una barra con extremos aislados

Consideramos la conducción de calor en una barra con extremos aislados, aquí no hay pérdida de energía por los extremos. Si la temperatura inicial es $f(x)$, la función de temperatura está modelada por el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < L, t > 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \quad \text{para } t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq L.$$

Intente una separación de las variables haciendo $u(x, t) = X(x)T(t)$. Obtenga, como en la subsección anterior,

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T' + \lambda kT = 0.$$

Ahora

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = X'(0)T(t) = 0$$

implica (excepto en el caso trivial de temperatura cero) que $X'(0) = 0$. Análogamente,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = X'(L)T(t) = 0$$

implica que $X'(L) = 0$. Por tanto, el problema para $X(x)$ es

$$X'' + \lambda X = 0; \qquad X'(0) = X'(L) = 0.$$

Los valores propios son

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$, con funciones propias constantes distintas de cero múltiplos de

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

La ecuación para T es ahora

$$T' + \frac{n^2\pi^2 k}{L^2}T = 0.$$

Cuando $n = 0$, obtiene

$$T_0(t) = \text{ constante.}$$

Para $n = 1, 2, \ldots$,

$$T_n(t) = c_n e^{-n^2\pi^2 kt/L^2}.$$

Ahora tiene funciones

$$u_n(x, t) = c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2\pi^2 kt/L^2}$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$, cada una de las cuales satisface la ecuación de calor y las condiciones de aislamiento en la frontera. Para satisfacer la condición inicial, generalmente debe usar una superposición

$$u(x, t) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2\pi^2 kt/L^2}.$$

Aquí escriba el término constante ($n = 0$) como $c_0/2$ como anticipación a un desarrollo en serie de Fourier en cosenos. Realmente necesita

$$u(x, 0) = f(x) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{6.2}$$

el desarrollo en serie de Fourier en cosenos de $f(x)$ en $[0, L]$ (ésta también es el desarrollo de la función de temperatura inicial en la función propia de este problema). Elegimos, por tanto

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(\xi)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi.$$

Con esta elección de coeficientes, la ecuación (6.2) da la solución a este problema con valores en la frontera.

EJEMPLO 6.2

Suponga que la mitad izquierda de la barra inicialmente está a una temperatura A y la mitad derecha se mantiene a temperatura cero. Así

$$f(x) = \begin{cases} A & \text{para } 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ 0 & \text{para } \frac{L}{2} < x \le L \end{cases}.$$

Entonces

$$c_0 = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} A\, d\xi = A$$

y, para $n = 1, 2, \ldots,$

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} A\cos\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi = \frac{2A}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

La solución para esta función de temperatura es

$$u(x, t) = \frac{1}{2}A + \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)e^{-n^2\pi^2 kt/L^2}.$$

Ahora $\operatorname{sen}(n\pi/2)$ es cero si n es par. Más aún, si $n = 2k - 1$ es impar, entonces $\operatorname{sen}(n\pi/2) = (-1)^{k+1}$. Por tanto, la solución puede escribirse como

$$u(x, t) = \frac{1}{2}A + \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)e^{-(2n-1)^2\pi^2 kt/L^2}. \quad \blacksquare$$

6.2.3 Distribución de temperatura en una barra con extremos que irradian

Considere una barra delgada, homogénea de longitud L, con el extremo izquierdo mantenido a temperatura cero, mientras que el extremo derecho irradia energía hacia el medio que la rodea, el cual se mantiene

a temperatura cero. Si la temperatura inicial en la sección transversal de la barra en x es $f(x)$, entonces la distribución de temperatura está modelada por el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < L, t > 0,$$

$$u(0, t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -Au(L, t) \quad \text{para } t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{para } 0 \le x \le L.$$

La condición en la frontera en L supone que la energía calorífica se irradia desde este extremo a una razón proporcional a la temperatura en ese extremo de la barra. El número A es una constante positiva llamada el *coeficiente de transferencia*.

Sea $u(x, t) = X(x)T(t)$ y obtiene

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T' + \lambda kT = 0.$$

Como $u(0, t) = X(0)T(t) = 0$, entonces

$$X(0) = 0.$$

La condición en el extremo derecho de la barra implica que

$$X'(L) = -AX(L)T(t),$$

así

$$X'(L) + AX(L) = 0.$$

El problema para X es, por tanto

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(L) + AX(L) = 0.$$

Este es un problema regular de Sturm-Liouville, que resolvió en el ejemplo 4.12 para el caso $A = 3$ y $L = 1$, con $y(x)$ en lugar de $X(x)$. Encontrará valores propios y funciones propias en este contexto más general siguiendo ese análisis. Consideramos casos sobre λ.

Caso 1 $\lambda = 0$

Entonces $X(x) = cx + d$. Como $X(0) = d = 0$, entonces $X(x) = cx$. Pero entonces

$$X'(L) = c = -AX(L) = -AcL$$

implica que $c(1 + AL) = 0$. Pero $1 + AL > 0$, de donde $c = 0$ y este caso sólo tiene la solución trivial. Por tanto, 0 no es un valor propio de este problema.

Caso 2 $\lambda < 0$

Escriba $\lambda = -\alpha^2$ con $\alpha > 0$. Entonces $X'' - \alpha^2 X = 0$, con solución general

$$X(x) = ce^{\alpha x} + de^{-\alpha x}.$$

Ahora

$$X(0) = c + d = 0$$

así $d = -c$. Entonces $X(x) = 2c \operatorname{senh}(\alpha x)$. Ahora,

$$X'(L) = 2\alpha c \cosh(\alpha L) = -AX(L) = -2Ac \operatorname{senh}(\alpha L).$$

Ahora $\alpha L > 0$, así $2\alpha c \cosh(\alpha L) > 0$ y $-2Ac \operatorname{senh}(\alpha L) < 0$, de donde esta ecuación es imposible a menos que $c = 0$. Por tanto, este caso da solamente la solución trivial para X, de manera que este problema no tiene valor propio negativo.

Caso 3 $\lambda > 0$

Ahora escriba $\lambda = \alpha^2$ con $\alpha > 0$. Ahora $X'' + \alpha^2 X = 0$, de donde

$$X(x) = c\cos(\alpha x) + d\,\text{sen}(\alpha x).$$

Entonces

$$X(0) = c = 0,$$

así $X(x) = d\,\text{sen}(\alpha x)$. Ahora,

$$X'(L) = d\alpha\cos(\alpha L) = -AX(L) = -Ad\,\text{sen}(\alpha L).$$

Entonces $d = 0$ o

$$\tan(\alpha L) = -\frac{\alpha}{A}.$$

Es posible, por tanto, tener una solución no trivial para X si se elige α que satisfaga esta ecuación. Sea $z = \alpha L$ para escribir esta condición como

$$\tan(z) = -\frac{1}{AL}z.$$

La figura 6.2 muestra las gráficas de $y = \tan(z)$ y $y = -z/AL$ en el plano z, y (con z como el eje horizontal). Estas gráficas tienen un número infinito de puntos de intersección a la derecha del eje vertical. Llame $z_1, z_2, \ldots,$ a la coordenada z de estos puntos de intersección, escritos en orden creciente. Como $\alpha = z/L$, entonces

$$\lambda_n = \alpha_n^2 = \frac{z_n^2}{L^2}$$

son los valores propios de este problema, para $n = 1, 2, \ldots$ Las funciones propias son múltiplos constantes distintos de cero de $\text{sen}(\alpha_n x)$ o $\text{sen}(z_n x/L)$.

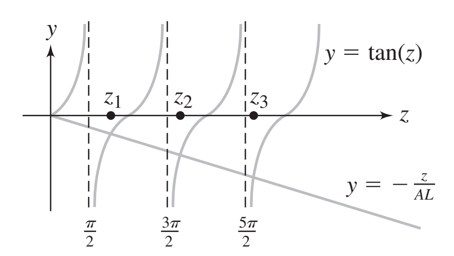


FIGURA 6.2 *Los valores propios del problema para una barra con un extremo que irradia.*

Los valores propios aquí son obtenidos como soluciones de una ecuación trascendente que no es posible resolver con toda exactitud. Sin embargo, de la figura 6.2 es claro que existe un número infinito de valores propios positivos, y éstos pueden ser aproximados tanto como quiera por técnicas numéricas.

Ahora la ecuación para T es

$$T' + \frac{z_n^2 k}{L^2}T = 0$$

con solución general

$$T_n(t) = c_n e^{-z_n^2 kt/L^2}.$$

Para cada entero positivo n, sea

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = c_n \operatorname{sen}\left(\frac{z_n x}{L}\right) e^{-z_n^2 kt/L^2}.$$

Cada una de estas funciones satisface la ecuación de calor y las condiciones en la frontera. Para satisfacer la condición inicial, generalmente debe emplear una superposición

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{z_n x}{L}\right) e^{-z_n^2 kt/L^2}$$

y elegir las c_n de manera que

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{z_n x}{L}\right) = f(x).$$

Ésta no es una serie de Fourier en senos. Es, sin embargo, un desarrollo de la función de temperatura inicial en funciones propias del problema de Sturm-Liouville para X. De la sección 4.3.3, elija

$$c_n = \frac{\int_0^L f(\xi) \operatorname{sen}(z_n \xi/L)\, d\xi}{\int_0^L \operatorname{sen}^2(z_n \xi/L)\, d\xi}.$$

La solución es

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\int_0^L f(\xi) \operatorname{sen}(z_n \xi/L)\, d\xi}{\int_0^L \operatorname{sen}^2(z_n \xi/L)\, d\xi} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{z_n x}{L}\right) e^{-z_n^2 kt/L^2}.$$

Si busca calcular valores numéricos de la temperatura en diferentes puntos y tiempos, debe hacer aproximaciones. Como ejemplo, suponga $A = L = 1$ y $f(x) = 1$ para $0 < x < 1$. Use el método de Newton para resolver aproximadamente $\tan(z) = -z$ obteniendo

$$z_1 \approx 2.0288, \quad z_2 \approx 4.9132, \quad z_3 \approx 7.9787, \quad z_4 \approx 11.0855.$$

Usando estos valores, realice las integraciones numéricas para obtener

$$c_1 \approx 1.9207, \quad c_2 \approx 2.6593, \quad c_3 \approx 4.1457, \quad c_4 \approx 5.6329.$$

Usando solamente los primeros cuatro términos, tiene la aproximación

$$\begin{aligned} u(x,t) \approx{}& 1.9027 \operatorname{sen}(2.0288x)e^{-4.1160kt} + 2.6593 \operatorname{sen}(4.9132x)e^{-24.1395kt} \\ &+ 4.1457 \operatorname{sen}(7.9787x)e^{-63.6597kt} + 5.6329 \operatorname{sen}(11.0855x)e^{-122.8883kt}. \end{aligned}$$

Dependiendo de la magnitud de k, estas exponenciales pueden decaer tan rápido que estos pocos primeros términos serán suficientes para algunas aplicaciones.

6.2.4 Transformaciones de los problemas con valores en la frontera que involucran la ecuación de calor

Dependiendo de la ecuación diferencial parcial y de las condiciones en la frontera puede ser imposible separar las variables en un problema con valores en la frontera que involucra la ecuación de calor. Aquí hay dos ejemplos de estrategias que funcionan para algunos problemas.

Condiciones de calor en una barra con extremos a temperaturas diferentes
Considere una barra delgada, homogénea que se extiende de $x = 0$ a $x = L$. El extremo izquierdo se mantiene a una temperatura constante T_1, y el extremo derecho a una temperatura constante T_2. La temperatura inicial en toda la barra en la sección transversal en x es $f(x)$.

El problema con valores en la frontera que modela esta situación es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < L, t > 0,$$

$$u(0, t) = T_1, u(L, t) = T_2 \quad \text{para } t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq L.$$

Suponga que T_1 y T_2 no son ambos cero.

Intente una separación de las variables haciendo $u(x, t) = X(x)T(t)$ en la ecuación de calor para obtener

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T' + \lambda kT = 0.$$

Las variables han sido separadas. Sin embargo, debe satisfacer

$$u(0, t) = X(0)T(t) = T_1.$$

Si $T_1 = 0$, esta ecuación se satisface haciendo $X(0) = 0$. Pero si $T_1 \neq 0$, entonces $T(t) = T_1/X(0) =$ constante. Análogamente, $u(L, t) = X(L)T(t) = T_2$, así $T(t) = T_2/X(L) =$ constante. Estas condiciones son imposibles de satisfacer excepto en los casos triviales (tales que $f(x) = 0$ y $T_1 = T_2 = 0$).

Perturbará la función de distribución de temperatura con la idea de obtener un problema más manejable para la función perturbada. Ponga

$$u(x, t) = U(x, t) + \psi(x).$$

Sustituya esto en la ecuación de calor para obtener

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \psi''(x)\right).$$

Ésta es la ecuación de calor estándar si elige ψ de manera que

$$\psi''(x) = 0.$$

Esto significa que ψ debe tener la forma

$$\psi(x) = cx + d.$$

Ahora

$$u(0, t) = T_1 = U(0, t) + \psi(0)$$

se convierte en la condición más amigable $U(0, t) = 0$ si $\psi(0) = T_1$. Así elige

$$d = T_1.$$

Hasta aquí, $\psi(x) = cx + T_1$. Ahora,

$$u(L, t) = T_2 = U(L, t) + \psi(L)$$

llega a ser $U(L, t) = 0$ si $\psi(L) = cL + T_1 = T_2$, de manera que elige

$$c = \frac{1}{L}(T_2 - T_1).$$

Entonces sea

$$\psi(x) = \frac{1}{L}(T_2 - T_1)x + T_1.$$

Finalmente,

$$u(x, 0) = f(x) = U(x, 0) + \psi(x)$$

se convierte en la siguiente condición inicial para U:

$$U(x, 0) = f(x) - \psi(x).$$

Ahora tiene el problema con valores en la frontera para U:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$
$$U(0, t) = U(L, t) = 0,$$
$$U(x, 0) = f(x) - \frac{1}{L}(T_2 - T_1)x - T_1.$$

Conoce la solución de este problema (ecuación 6.1) y puede escribir inmediatamente

$$U(x, t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L \left[f(\xi) - \frac{1}{L}(T_2 - T_1)\xi - T_1\right]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)d\xi\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)e^{-n^2\pi^2 kt/L^2}.$$

Una vez que obtiene $U(x, t)$, la solución del problema original es

$$u(x, t) = U(x, t) + \frac{1}{L}(T_2 - T_1)x + T_1.$$

Físicamente puede ver esta solución como una descomposición de la distribución de temperatura en una parte transitoria y una parte de estado estacionario. La parte transitoria es $U(x, t)$, que decae a cero conforme t crece. El otro término, $\psi(x)$, es igual al $\lim_{t\to\infty} u(x, t)$ y es la parte del estado estacionario. Esta parte es independiente del tiempo, representa el valor límite al cual la temperatura se acerca en un lapso largo.

Tal descomposición se presenta en muchos sistemas físicos. Por ejemplo, en un circuito eléctrico típico la corriente puede ser escrita como la parte transitoria, la cual decae a cero conforme el tiempo crece, y la parte de estado estacionario que es el límite de la función conforme $t \to \infty$.

EJEMPLO 6.3

Suponga, en la discusión anterior, $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, y $f(x) = \frac{3}{2}$ para $0 < x < L$. Calcule

$$\int_0^L \left(f(\xi) - \frac{1}{L}(T_2 - T_1)\xi - T_1\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)d\xi = \int_0^L \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{L}\xi\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)d\xi$$
$$= \frac{1}{2}L\frac{1 + (-1)^n}{n\pi}.$$

La solución en este caso es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1 + (-1)^n}{n\pi}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)e^{-n^2\pi^2 kt/L^2} + \frac{1}{L}x + 1.$$ ■

6.2.5 Una ecuación de calor no homogénea

En esta sección se considera un problema de conducción de calor no homogéneo en un intervalo finito:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) \quad \text{para } 0 < x < L, t > 0,$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$
$$u(x,0) = f(x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq L.$$

El término $F(x, t)$ podría representar, por ejemplo, una fuente de calor dentro del medio. Es fácil verificar que la separación de variables no funciona para esta ecuación de calor. Para intentar otro método, regrese al caso más simple donde $F(x, t) = 0$. En este evento encuentre una solución

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2\pi^2 kt/L^2},$$

en donde b_n es el n-ésimo coeficiente en el desarrollo de Fourier en senos de $f(x)$ en $[0, L]$. Tomando esto como sugerencia, intente una solución del problema de corriente de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \tag{6.3}$$

El problema es determinar cada $T_n(t)$. La estrategia para lograrlo es obtener una ecuación diferencial para $T_n(t)$.

Si t es fijo, entonces el lado izquierdo de la ecuación (6.3) es una función de x únicamente, y el lado derecho es su desarrollo de Fourier en senos en $[0, L]$. Conoce los coeficientes en este desarrollo, así

$$T_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L u(\xi,t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi. \tag{6.4}$$

Ahora suponga que para cualquier elección de $t \geq 0$, $F(x, t)$, considerada como una función de x, también puede desarrollarse en una serie de Fourier en senos en $[0, L]$:

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{6.5}$$

donde

$$B_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L F(\xi,t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi. \tag{6.6}$$

Este coeficiente por supuesto puede depender de t.

Diferencie la ecuación (6.4) para obtener

$$T_n'(t) = \frac{2}{L}\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}(\xi,t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi. \tag{6.7}$$

Sustituya $\partial u/\partial t$ en la ecuación de calor para obtener

$$T_n'(t) = \frac{2k}{L}\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi,t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi + \frac{2}{L}\int_0^L F(\xi,t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi.$$

En vista de la ecuación (6.5), esta ecuación se vuelve

$$T_n'(t) = \frac{2k}{L}\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi,t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi + B_n(t). \tag{6.8}$$

Ahora, aplicando dos veces integración por partes en la integral del lado derecho de la ecuación (6.8), y utilizando al final las condiciones en la frontera y la ecuación (6.4):

$$\begin{aligned}
\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi, t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi &= \left[\frac{\partial u}{\partial x}(\xi, t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)\right]_0^L - \int_0^L \frac{n\pi}{L}\frac{\partial u}{\partial x}(\xi, t)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi \\
&= -\frac{n\pi}{L}\int_0^L \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, t)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi \\
&= -\frac{n\pi}{L}\left[u(\xi, t)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)\right]_0^L \\
&\quad + \frac{n\pi}{L}\int_0^L -\frac{n\pi}{L}u(\xi, t)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi \\
&= -\frac{n^2\pi^2}{L^2}\int_0^L u(\xi, t)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi \\
&= -\frac{n^2\pi^2}{L^2}\frac{L}{2}T_n(t) = -\frac{n^2\pi^2}{2L}T_n(t).
\end{aligned}$$

Sustituya en la ecuación (6.8) para obtener

$$T_n'(t) = -\frac{n^2\pi^2 k}{L^2}T_n(t) + B_n(t).$$

Para $n = 1, 2, \ldots,$ ahora tiene una ecuación diferencial ordinaria de primer orden para $T_n(t)$:

$$T_n'(t) + \frac{n^2\pi^2 k}{L^2}T_n(t) = B_n(t).$$

Ahora, use la ecuación (6.4) para obtener la condición

$$T_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L u(\xi, 0)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi = \frac{2}{L}\int_0^L f(\xi)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi = b_n,$$

el n-ésimo coeficiente en el desarrollo de Fourier en senos de $f(x)$ en $[0, L]$. Resuelva la ecuación diferencial para $T_n(t)$ sujeta a esta condición para tener

$$T_n(t) = \int_0^t e^{-n^2\pi^2 k(t-\tau)/L^2}B_n(\tau)\, d\tau + b_n e^{-n^2\pi^2 kt/L^2}.$$

Finalmente, sustituya en la ecuación (6.3) para obtener la solución

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t e^{-n^2\pi^2 k(t-\tau)/L^2}B_n(\tau)\, d\tau\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\
&\quad + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(\xi)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)e^{-n^2\pi^2 kt/L^2}.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Observe que el último término es la solución del problema si no hay el término $F(x, t)$, mientras que el primer término es el efecto del término de la fuente en la solución.

EJEMPLO 6.4

Resuelva el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xt \quad \text{para } 0 < x < \pi, t > 0,$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 20 & \text{para } 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4} \\ 0 & \text{para } \dfrac{\pi}{4} < x \leq \pi \end{cases}.$$

Como tiene una fórmula para la solución, sólo necesita llevar a cabo las integraciones requeridas. Primero calcule

$$B_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \xi t \operatorname{sen}(n\xi)\, d\xi = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}t.$$

Ahora evalúe

$$\int_0^t e^{-4n^2(t-\tau)} B_n(\tau)\, d\tau = \int_0^t 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}\tau e^{-4n^2(t-\tau)}\, d\tau$$

$$= \frac{1}{8}(-1)^{n+1}\frac{-1 + 4n^2 t + e^{-4n^2 t}}{n^5}.$$

Finalmente, necesita

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\xi) \operatorname{sen}(n\xi)\, d\xi = \frac{40}{\pi}\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(n\xi)\, d\xi = \frac{40}{\pi}\frac{1 - \cos(n\pi/4)}{n}.$$

Ahora puede escribir la solución

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8}(-1)^{n+1}\frac{-1 + 4n^2 t + e^{-4n^2 t}}{n^5}\right)\operatorname{sen}(nx)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{40}{\pi}\frac{1 - \cos(n\pi/4)}{n}\operatorname{sen}(nx)e^{-4n^2 t}.$$

El segundo término en la derecha es la solución del problema sin el término xt en la ecuación de calor. Denote esta solución "sin fuente" como

$$u_0(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{40}{\pi}\frac{1 - \cos(n\pi/4)}{n}\operatorname{sen}(nx)e^{-4n^2 t}.$$

La solución con el término de la fuente es

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8}(-1)^{n+1}\frac{-1 + 4n^2 t + e^{-4n^2 t}}{n^5}\right)\operatorname{sen}(nx).$$

Para medir el efecto en la solución del término xt en la ecuación de calor, las figuras 6.3(a) a (d) muestran las gráficas de $u(x, t)$ y $u_0(x, t)$ en los tiempos $t = 0.3$, 0.8, 1.2, y 1.32. Ambas soluciones tienden a cero bastante rápidamente conforme el tiempo crece. Esto se muestra en la figura 6.4, la cual indica la evolución de $u_0(x, t)$ en esos tiempos, y la figura 6.5, que sigue $u(x, t)$. El efecto del término xt es retardar este decaimiento. Por supuesto, otros términos $F(x, t)$ podrían tener distintos efectos. ■

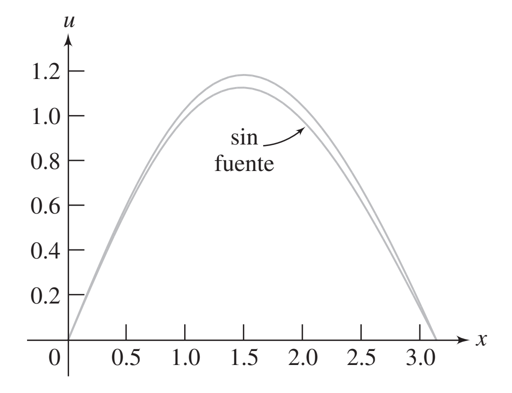


FIGURA 6.3(a) *Comparación de las soluciones con y sin un término fuente para* $t = 0.3$.

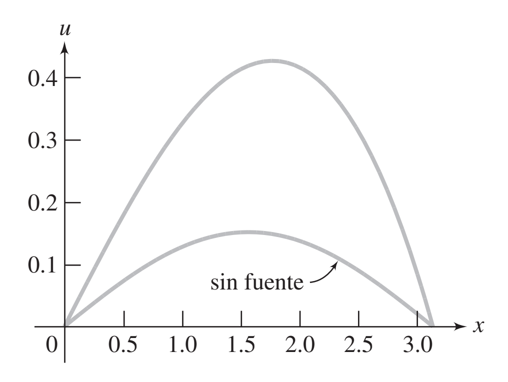


FIGURA 6.3(b) $t = 0.8$.

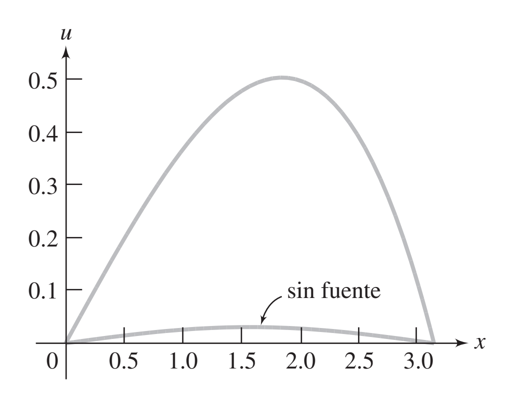


FIGURA 6.3(c) $t = 1.2$.

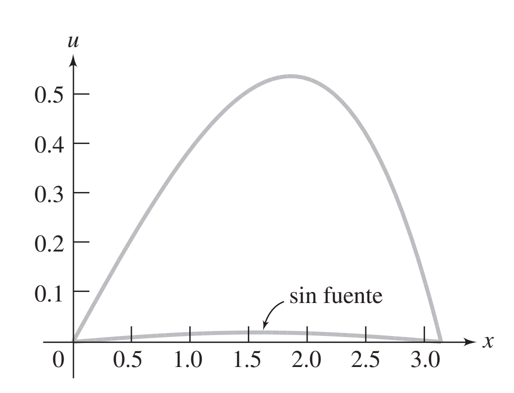


FIGURA 6.3(d) $t = 1.32$.

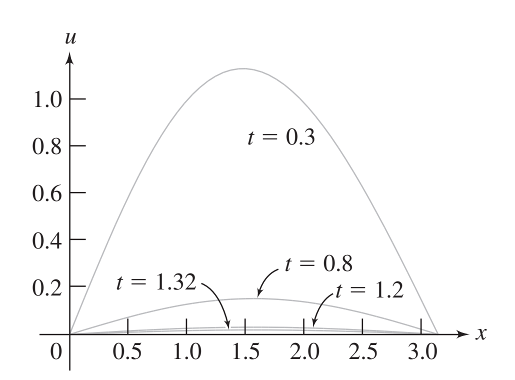


FIGURA 6.4 $u_0(x, t)$ *en los tiempos* $t = 0.3$, 0.8, 1.2 *y* 1.32.

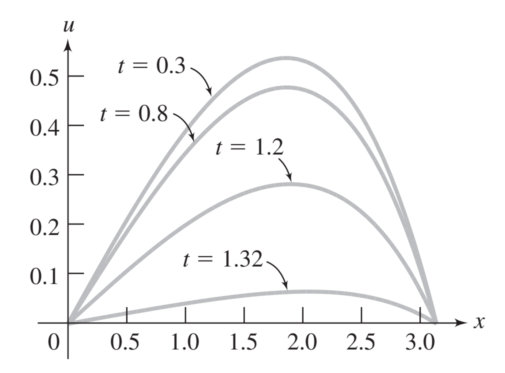


FIGURA 6.5 $u(x, t)$ *en los tiempos* $t = 0.3$, 0.8, 1.2 *y* 1.32.

6.2.6 Efectos de las condiciones en la frontera y las constantes en la conducción de calor

Ha resuelto varios problemas que involucran la conducción de calor en una barra delgada homogénea de longitud finita. Como sucedió con el movimiento de onda en un intervalo, el poder del cómputo permite examinar los efectos de varias constantes o términos que aparecen en estos problemas en el comportamiento de las soluciones.

EJEMPLO 6.5

Considere una barra delgada de longitud π, cuya temperatura inicial está dada por $f(x) = x^2 \cos(x/2)$. Suponga que los extremos de la barra se mantienen a temperatura cero. La función temperatura satisface

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < \pi, t > 0,$$

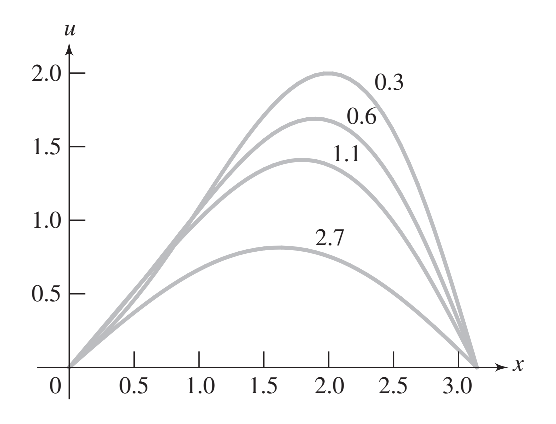
$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \text{para } t > 0,$$

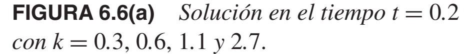
$$u(x, 0) = x^2 \cos(x/2) \quad \text{para } 0 \leq x \leq \pi.$$

La solución es

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi} \xi^2 \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) \operatorname{sen}(n\xi)\, d\xi\right) \operatorname{sen}(nx)e^{-n^2kt} \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{16\pi n\,(-1)^n - 64\pi n^3\,(-1)^n - 48n - 64n^3}{64n^6 - 48n^4 + 12n^2 - 1}\right) \operatorname{sen}(nx)e^{-n^2kt}. \end{aligned}$$

Puede examinar los efectos de la constante de difusividad k en esta solución dibujando las gráficas de $y = u(x, t)$ para varios tiempos, con elecciones distintas de esta constante. La figura 6.6(a) muestra las distribuciones de temperatura en el tiempo $t = 0.2$, para k tomando los valores 0.3, 0.6, 1.1 y 2.7. La figura 6.6(b) muestra las distribuciones de temperatura en el tiempo $t = 1.2$ para estos valores de k. ■




FIGURA 6.6(a) *Solución en el tiempo $t = 0.2$ con $k = 0.3, 0.6, 1.1$ y 2.7.*

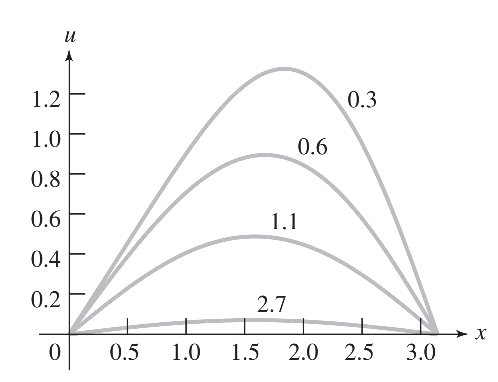


FIGURA 6.6(b) *Solución en el tiempo $t = 1.2$ con $k = 0.3, 0.6, 1.1$ y 2.7.*

EJEMPLO 6.6

¿Qué diferencia hay en la distribución de temperatura, si los extremos están aislados o se mantienen a temperatura cero? Considere una función de temperatura inicial $f(x) = x^2(\pi - x)$, con una barra de longitud π. Sea la difusividad $k = \frac{1}{4}$. La solución, si los extremos se mantienen a temperatura cero es

$$u_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8\,(-1)^{n+1} - 4}{n^3}\right) \operatorname{sen}(nx)e^{-n^2t/4}$$

La solución si los extremos están aislados es

$$u_2(x,t) = \frac{1}{12}\pi^3 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2\pi^2(-1)^{n+1} + 6(-1)^n - 6}{n^4}\right)\cos(nx)e^{-n^2t/4}.$$

La figuras 6.7(a) a (d) comparan estas dos soluciones para valores diferentes del tiempo. La figura 6.8(a) muestra la evolución de la solución con temperaturas cero en los extremos en diferentes tiempos, y la figura 6.8(b) muestra esta evolución para la solución con extremos aislados. ■

6.2.7 Aproximación numérica de soluciones

Considere el problema de condución de calor estándar

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ para } 0 < x < L, t > 0,$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ para } t \geq 0,$$
$$u(x,0) = f(x) \text{ para } 0 \leq x \leq L.$$

Una estrategia para calcular una aproximación numérica de la solución es comenzar formando una cuadrícula sobre la banda x, t, $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$, como se hizo con la ecuación de onda en un intervalo acotado.

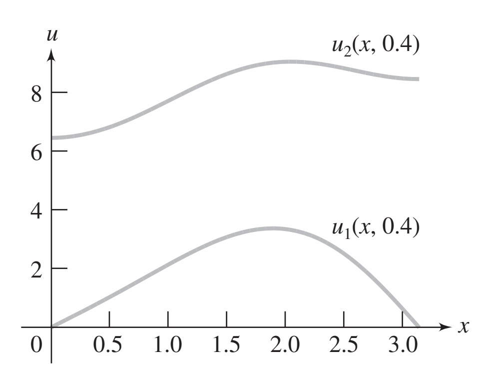


FIGURA 6.7(a) *Comparación de la solución con extremos aislados, con la solución teniendo extremos mantenidos a temperatura cero, en el tiempo $t = 0.4$.*

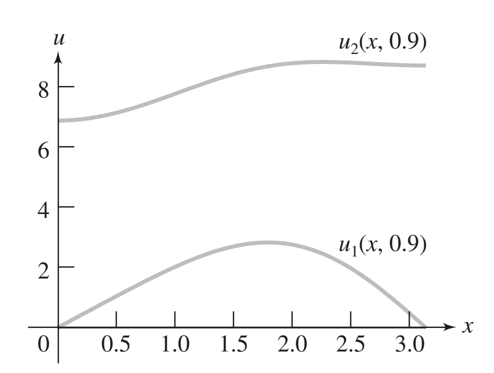


FIGURA 6.7(b) $t = 0.9$.

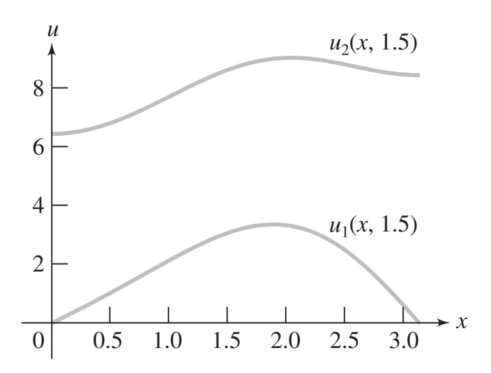


FIGURA 6.7(c) $t = 1.5$.

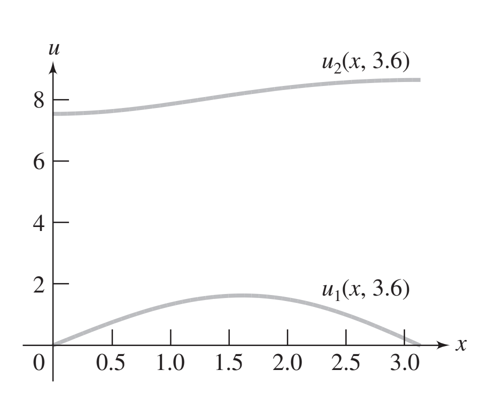


FIGURA 6.7(d) $t = 3.6$.

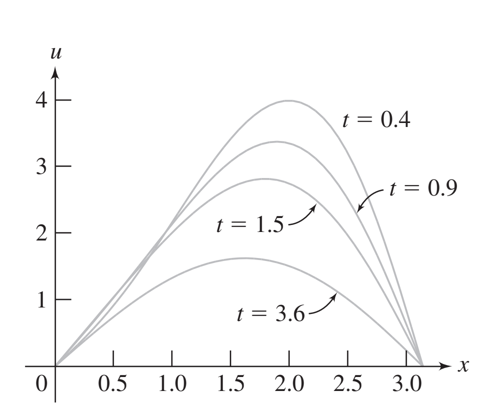


FIGURA 6.8(a) *Evolución con tiempo de la solución con extremos mantenidos a temperatura cero.*

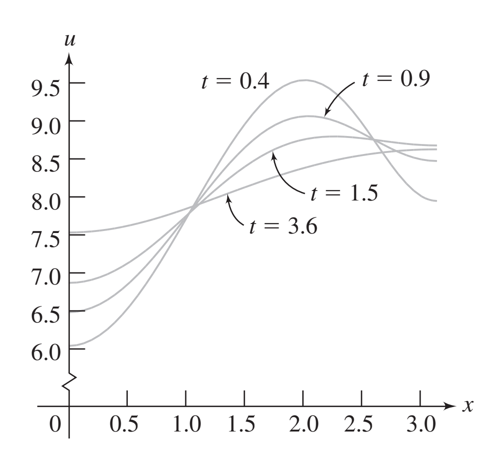


FIGURA 6.8(b) *Evolución de la solución con extremos aislados.*

Elija $\Delta x = L/N$, donde N es un entero positivo, y sea $x_j = j\Delta x$ para $j = 0, 1, \ldots, N$. Asimismo, elija Δt positiva. Esto define los puntos de retícula $(x_j, t_k) = (j\Delta x, k\Delta t)$. Denote $u(j\Delta x, k\Delta t) = u_{ij}$.

Use las aproximaciones por diferencias centradas para las derivadas a fin de reemplazar la ecuación de calor con:

$$\frac{u_{j,k+1} - u_{j,k}}{\Delta t} = k\frac{u_{j+1,k} - 2u_{j,k} + u_{j-1,k}}{(\Delta x)^2}.$$

En la ecuación de calor, la derivada parcial en t es de primer orden, así que esta ecuación usa la aproximación para $\partial u/\partial t$ a la izquierda. Resuelva la ecuación para $u_{j,k+1}$:

$$u_{j,k+1} = \frac{k\Delta t}{(\Delta x)^2}(u_{j+1,k} - 2u_{j,k} + u_{j-1,k}) + u_{j,k}.$$

Esto permite aproximar los valores solución en los puntos de retícula en el nivel horizontal $k + 1$ a partir de la información en el siguiente nivel inferior, donde ya se han realizado las aproximaciones (figura 6.9).

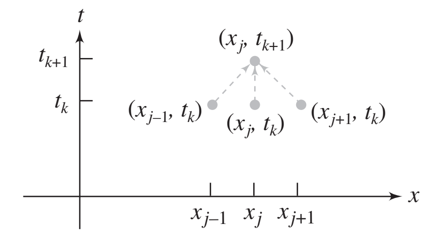


FIGURA 6.9 *La aproximación de $u(x, t_{k+1})$ se basa en valores aproximados en tres puntos en la capa t_k.*

Puesto que está subiendo las capas de puntos de retícula, completando las aproximaciones en cada capa desde la capa inferior, debe haber una capa inicial en la que ya se tiene información. Los datos para una capa inicial son proporcionados por las condiciones iniciales y de frontera.

$$u_{0,k} = u_{N,k} = 0$$

(valores en los puntos de retícula en los lados izquierdo y derecho de la banda), y

$$u_{j,0} = f(x_j) = f(j\Delta x).$$

Estos valores se indican en la figura 6.10.

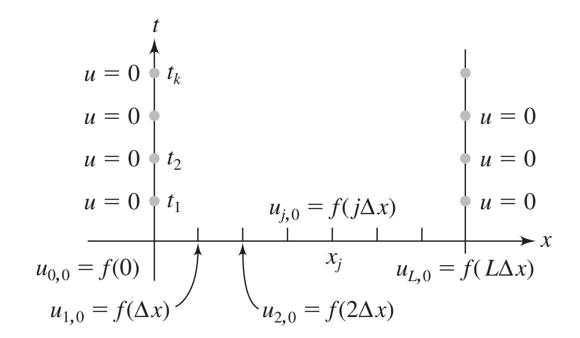


FIGURA 6.10 *Los datos de frontera dan valores de $u(x, t)$ en los puntos de retícula en la frontera de la banda.*

La cantidad $k(\Delta t)/(\Delta x)^2$ debe ser menor que 1/2 para asegurar la estabilidad del método.

EJEMPLO 6.7

Considere el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ para } 0 < x < 1, t > 0,$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = x(1 - x) \text{ para } 0 < x < 1.$$

Tiene solución exacta

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\operatorname{sen}((2n-1)\pi x)e^{-(2n-1)^2\pi^2 t}.$$

Para hacer aproximaciones numéricas, se elegirá $\Delta x = 0.1$ ($N = 10$) y $\Delta t = 0.0025$. En este ejemplo, $k = 1$ de modo que $k(\Delta t)/(\Delta x)^2 = 1/4 < 1/2$. Se sabe que

$$u_{0,k} = u_{10,k} = 0.$$

Además

$$u_{j,0} = f(j\Delta x) = j(0.1)(1 - j(0.1)).$$

Esto inicia la aproximación. Estos valores se completan en los puntos de retícula de nivel mínimo ($t = 0$) de la figura 6.11.

Para pasar de una capa horizontal a la siguiente (de acuerdo con la idea de la figura 6.9), use

$$u_{j,k+1} = 0.25(u_{j+1,k} - 2u_{j,k} + u_{j-1,k}) + u_{j,k}.$$

De aquí se va al nivel $k = 1$ ($t = 0.0025$), y se obtienen los valores mostrados en la figura 6.12. La figura 6.13 muestra el siguiente nivel, $k = 2$ o $t = 0.005$. Y en la figura 6.14 se muestra el nivel $k = 3$ o $t = 0.0075$. Procediendo de esta manera, puede completar los valores aproximados en los puntos de retícula en cualquier nivel vertical de la retícula. ■

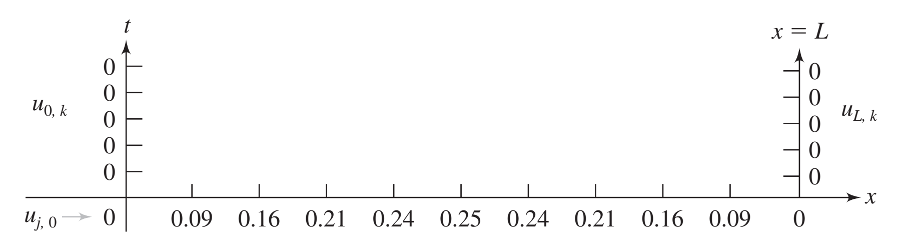


FIGURA 6.11 *Los valores de $u_{j,0}$, $u_{0,k}$ y $u_{1,k}$ se conocen en los puntos frontera de la retícula.*

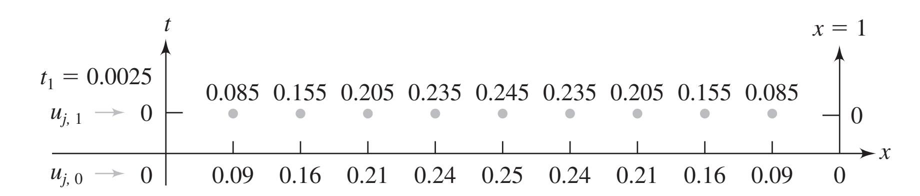


FIGURA 6.12 *Valores aproximados en el nivel $t_1 = 0.0025$ calculados de valores conocidos en el nivel $t_0 = 0$.*

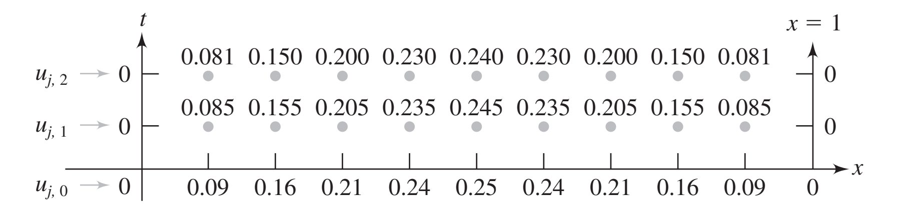


FIGURA 6.13 *Valores aproximados en el nivel $t_2 = 0.005$ calculados de valores aproximados en el nivel $t_1 = 0.0025$.*

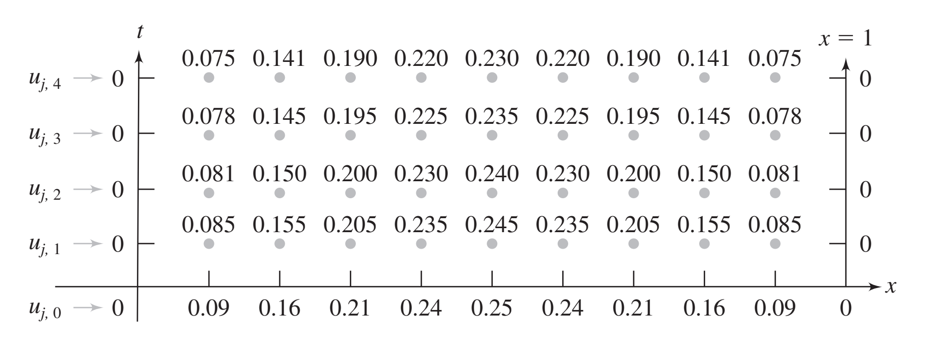


FIGURA 6.14 *Valores aproximados de la solución $u(x, t)$ en niveles sucesivos t.*

SECCIÓN 6.2 PROBLEMAS

En los problemas del 1 al 7, escriba una solución del problema con valores en la frontera. Dibuje la gráfica de la vigésima suma parcial de la función de distribución de temperatura en el mismo conjunto de ejes para diferentes valores del tiempo.

1. $$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < L, t > 0$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0$$
$$u(x,0) = x(L-x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq L$$

2. $$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < L, t > 0$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0$$
$$u(x,0) = x^2(L-x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq L$$

3. $$\frac{\partial u}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < L, t > 0$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0$$
$$u(x,0) = L\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right] \quad \text{para } 0 \leq x \leq L$$

4. $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < \pi, t > 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0$$
$$u(x,0) = \text{sen}(x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq \pi$$

5. $$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < 2\pi, t > 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(2\pi,t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0$$
$$u(x,0) = x(2\pi - x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq 2\pi$$

6. $$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < 3, t > 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(3,t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0$$

7. $$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < 6, t > 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(6,t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0$$
$$u(x,0) = e^{-x} \quad \text{para } 0 \leq x \leq 6$$

8. Una barra delgada homogénea de longitud L tiene extremos aislados y temperatura inicial B, una constante positiva. Encuentre la distribución de temperatura en la barra.

9. Una barra delgada homogénea de longitud L tiene temperatura inicial igual a la constante B, y el extremo derecho ($x = L$) está aislado, mientras el extremo izquierdo se mantiene a temperatura cero. Encuentre la distribución de temperatura en la barra.

10. Una barra delgada homogénea de difusividad térmica 9 y longitud 2 cm y lados aislados tiene su extremo izquierdo mantenido a temperatura cero, mientras su extremo derecho está perfectamente aislado. La barra tiene una temperatura inicial $f(x) = x^2$ para $0 \leq x \leq 2$. Determine la distribución de temperatura en la barra. ¿Qué es $\lim_{t\to\infty} u(x, t)$?

11. Pruebe que la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A\frac{\partial u}{\partial x} + Bu\right)$$

puede ser transformada en una ecuación de calor estándar eligiendo apropiadamente α y β y haciendo $u(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x, t)$.

12. Use la idea del problema 11 para resolver

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial u}{\partial x} + 2u\right) \quad \text{para } 0 < x < \pi, t > 0$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0$$
$$u(x,0) = x(\pi - x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq \pi.$$

13. Use la idea del problema 11 para resolver

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad \text{para } 0 < x < 4, t > 0$$
$$u(0,t) = u(4,t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0$$
$$u(x,0) = 1 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 4.$$

Dibuje la gráfica de la vigésima suma parcial de la solución para tiempos seleccionados.

14. Use la idea del problema 11 para resolver

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad \text{para } 0 < x < \pi, t > 0$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0$$
$$u(x,0) = x^2(\pi - x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq \pi.$$

Dibuje la gráfica de la vigésima suma parcial de la solución para tiempos seleccionados.

15. Resuelva

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < 1, t > 0$$
$$u(0, t) = 2, u(1, t) = 5 \quad \text{para } t \geq 0$$
$$u(x, 0) = x^2 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1.$$

Dibuje la gráfica de la vigésima suma parcial de la solución para tiempos seleccionados.

16. Resuelva

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < L, t > 0$$
$$u(0, t) = T, u(L, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0$$
$$u(x, 0) = x(L - x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq L.$$

17. Resuelva

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - Au \quad \text{para } 0 < x < 9, t > 0$$
$$u(0, t) = u(9, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0$$
$$u(x, 0) = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 9.$$

Aquí A es una constante positiva.

Elija $A = \frac{1}{4}$ y grafique la vigésima suma parcial de la solución para una selección de tiempos, con el mismo conjunto de ejes. Repita esto para los valores $A = \frac{1}{2}$, $A = 1$ y $A = 3$. Esto da cierto sentido del efecto del término $-Au$ en la ecuación de calor en el comportamiento de la distribución de temperatura.

18.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < L, t > 0$$
$$u(0, t) = T, u(L, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0$$
$$u(x, 0) = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 2\pi.$$

En cada uno de los problemas del 19 al 23, resuelva el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) \quad \text{para } 0 < x < L, t > 0,$$
$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$
$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq L$$

para la F, k, L y f dadas. En cada uno, elija un valor del tiempo y en el mismo conjunto de ejes, dibujar la gráfica de la vigésima suma parcial de la solución del problema dado, junto con la vigésima suma parcial de la solución del problema sin el término fuente $F(x, t)$. Repita esto para otros tiempos. Esto sirve para entender la importancia de $F(x, t)$ en el comportamiento de la distribución de la temperatura.

19. $k = 4$, $F(x, t) = t$, $f(x) = x(\pi - x)$, $L = \pi$

20. $k = 1$, $F(x, t) = x \operatorname{sen}(t)$, $f(x) = 1$, $L = 4$

21. $k = 1$, $F(x, t) = t\cos(x)$, $f(x) = x^2(5 - x)$, $L = 5$

22.

$$k = 4, F(x, t) = \begin{cases} K & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{para } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$
$$f(x) = \operatorname{sen}(\pi x/2), L = 2$$

23. $k = 16$, $F(x, t) = xt$, $f(x) = K$, $L = 3$

24. Enuncie una definición de dependencia continua de la solución en los datos iniciales para el problema.

$$\frac{\partial y}{\partial t} = k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < L, t > 0$$
$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \text{para } t > 0$$
$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{para } 0 < x < L.$$

Demuestre que este problema depende continuamente de los datos iniciales.

25. Encuentre los valores solución aproximados del problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < 1, t > 0,$$
$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$
$$u(x, 0) = x^2(1 - x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1.$$

Use $\Delta x = 0.1$ y $\Delta t = 0.0025$. Realice los cálculos para las primeras cuatro capas horizontales, incluso la capa $t = 0$.

26. Encuentre los valores solución aproximados del problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < 2, t > 0,$$
$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$
$$u(x, 0) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \quad \text{para } 0 \leq x \leq 2.$$

Use $\Delta x = 0.2$ y $\Delta x = 0.0025$. Realice los cálculos para las primeras cuatro capas horizontales, incluso la capa $t = 0$.

27. Encuentre los valores solución aproximados para el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < 1, t > 0,$$
$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$
$$u(x, 0) = x\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1.$$

Use $\Delta x = 0.1$ y $\Delta t = 0.0025$. Realice los cálculos para las primeras cuatro capas horizontales, incluso la capa $t = 0$.

6.3 Conducción de calor en un medio infinito

Considere ahora problemas que involucran la ecuación de calor con la variable espacial extendiéndose sobre toda la recta real o la semirecta.

6.3.1 Conducción de calor en una barra infinita

Para una situación en donde la longitud del medio es mucho más grande que las otras dimensiones, algunas veces es conveniente modelar la conducción de calor imaginando que la variable espacial se mueva sobre toda la recta real. Considere el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } -\infty < x < \infty, t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{para } -\infty < x < \infty.$$

No hay condiciones en la frontera, de manera que imponga las condiciones físicamente realistas que las soluciones deben ser acotadas.

Separe las variables haciendo $u(x, t) = X(x)T(t)$ para obtener

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T' + \lambda kT = 0.$$

El problema para X es el mismo al encontrado con la ecuación de onda en una recta, y el mismo análisis produce los valores propios $\lambda = \omega^2$ para $\omega \geq 0$ y las funciones propias de la forma $a_\omega \cos(\omega x) + b_\omega \operatorname{sen}(\omega x)$.

El problema para T es $T' + \omega^2 kT = 0$, con solución general $de^{-\omega^2 kt}$, que está acotada para $t \geq 0$.

Ahora tiene, para $\omega \geq 0$, funciones

$$u_\omega(x, t) = [a_\omega \cos(\omega x) + b_\omega \operatorname{sen}(\omega x)]\, e^{-\omega^2 kt}$$

que satisfacen la ecuación de calor y están acotadas en la recta real. Para satisfacer la condición inicial, intente una superposición de estas funciones sobre todo $\omega \geq 0$, que toma la forma de una integral:

$$u(x, t) = \int_0^\infty [a_\omega \cos(\omega x) + b_\omega \operatorname{sen}(\omega x)]\, e^{-\omega^2 kt}\, d\omega. \tag{6.10}$$

Necesita

$$u(x, 0) = \int_0^\infty [a_\omega \cos(\omega x) + b_\omega \operatorname{sen}(\omega x)]\, d\omega = f(x).$$

Esta es la integral de Fourier de $f(x)$ en la recta real, que lleva a elegir los coeficientes

$$a_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\omega\xi)\, d\xi$$

y

$$b_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\operatorname{sen}(\omega\xi)\, d\xi.$$

EJEMPLO 6.8

Suponga que la función de temperatura inicial es $f(x) = e^{-|x|}$. Calcule los coeficientes

$$a_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi|}\cos(\omega\xi)\, d\xi = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+\omega^2}$$

y

$$b_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi|}\operatorname{sen}(\omega\xi)\,d\xi = 0.$$

La solución para esta distribución de temperatura inicial es

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+\omega^2}\cos(\omega x)e^{-\omega^2 kt}\,d\omega. \quad ■$$

La integral (6.10) para la solución algunas veces se escribe en forma más compacta, recordando los cálculos en la sección 5.3.1 para las soluciones de la integral de Fourier de la ecuación de onda en toda la recta real. Sustituya las integrales para los coeficientes en la integral para la solución para escribir

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_0^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\omega\xi)\,d\xi\,\cos(\omega x)\right.\\
&\qquad \left. + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\operatorname{sen}(\omega\xi)\,d\xi\,\operatorname{sen}(\omega x)\right]e^{-\omega^2 kt}\,d\omega\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\cos(\omega\xi)\cos(\omega x)+\operatorname{sen}(\omega\xi)\operatorname{sen}(\omega x)]f(\xi)\,d\xi\, e^{-\omega^2 kt}\,d\omega\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega(\xi - x))f(\xi)e^{-\omega^2 kt}\,d\xi\,d\omega.
\end{aligned}$$

Una sola expresión integral para la solución en la recta real Considere nuevamente el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } -\infty < x < \infty, t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{para } -\infty < x < \infty.$$

Ha resuelto este problema para obtener la doble integral

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega(\xi - x))f(\xi)e^{-\omega^2 kt}\,d\xi\,d\omega.$$

Como el integrando es una función par en ω, entonces $\int_0^{\infty}\cdots d\omega = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots d\omega$ y esta solución también se puede escribir como

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega(\xi - x))f(\xi)e^{-\omega^2 kt}\,d\xi\,d\omega.$$

Probará cómo esta solución puede ponerse en términos de una sola integral. Necesita lo siguiente.

LEMA 6.1

Para α y β reales, con $\beta \neq 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta^2}\cos\left(\frac{\alpha\zeta}{\beta}\right)d\zeta = \sqrt{\pi}e^{-\alpha^2/4\beta^2}. \quad ■$$

Prueba Sea

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-\zeta^2}\cos(x\zeta)\,d\zeta.$$

Uno puede probar que esta integral converge para todo x, como sucede con la integral obtenida al intercambiar d/dx y $\int_0^\infty \cdots d\zeta$. Puede por tanto calcular

$$F'(x) = \int_0^\infty -e^{-\zeta^2}\zeta \operatorname{sen}(x\zeta)\,d\zeta.$$

Integre por partes para obtener

$$F'(x) = -\frac{x}{2}F(x).$$

Entonces

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = -\frac{x}{2}$$

y una integración produce

$$\ln|F(x)| = -\frac{1}{4}x^2 + c.$$

Entonces

$$F(x) = Ae^{-x^2/4}.$$

Para evaluar la constante A, use

$$F(0) = A = \int_0^\infty e^{-\zeta^2}\,d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

un resultado encontrado en muchas tablas de integración. Por tanto,

$$\int_0^\infty e^{-\zeta^2}\cos(x\zeta)\,d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2/4}.$$

Finalmente, sea $x = \alpha/\beta$ y use el hecho de que el integrando es par respecto a ζ para obtener

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\zeta^2}\cos\left(\frac{\alpha\zeta}{\beta}\right)d\zeta = 2\int_0^\infty e^{-\zeta^2}\cos\left(\frac{\alpha\zeta}{\beta}\right)d\zeta = \sqrt{\pi}e^{-\alpha^2/4\beta^2}. \blacksquare$$

Ahora sea

$$\zeta = \sqrt{kt}\omega, \alpha = x - \xi, \quad \text{y} \quad \beta = \sqrt{kt}.$$

Entonces

$$\frac{\alpha\zeta}{\beta} = \omega(x-\xi)$$

y

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\zeta^2}\cos\left(\frac{\alpha\zeta}{\beta}\right)d\zeta = \int_{-\infty}^\infty e^{-\omega^2kt}\cos(\omega(x-\xi))\sqrt{kt}\,d\omega = \sqrt{\pi}e^{-(x-\xi)^2/4kt}.$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\omega^2kt}\cos(\omega(x-\xi))\,d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{kt}}e^{-(x-\xi)^2/4kt}.$$

La solución de la conducción de calor en la recta real es, por tanto

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos(\omega(\xi-x))e^{-\omega^2kt}\,d\xi\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{kt}}e^{-(x-\xi)^2/4kt}f(\xi)\,d\xi. \end{aligned}$$

Después de algunas manipulaciones, esta solución es

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\xi)^2/4kt} f(\xi)\, d\xi.$$

Ésta es más simple que la solución anterior en el sentido de que contiene sólo una integral.

6.3.2 Conducción de calor en una barra semi-infinita

Si considera la conducción de calor en una barra extendida de 0 a infinito, entonces hay una condición de frontera en el extremo izquierdo. Si la temperatura se mantiene en cero en ese extremo, entonces el problema es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < \infty, t > 0,$$

$$u(0,t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{para } 0 < x < \infty.$$

Haciendo $u(x, t) = X(x)T(t)$, los problemas para X y T son

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T' + \lambda kT = 0.$$

Si procede como lo hizo para la recta real, obtiene $\lambda = \omega^2$ para $\omega \geq 0$ y funciones

$$X_\omega(x) = a_\omega \cos(\omega x) + b_\omega \operatorname{sen}(\omega x).$$

Pero ahora, también tiene la condición

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0,$$

implicando que

$$X(0) = 0.$$

Así debe elegir cada $a_\omega = 0$, dejando $X_\omega(x) = b_\omega \operatorname{sen}(\omega x)$. Las soluciones para T tienen la forma de múltiplos constantes de $e^{-\omega^2 kt}$, de manera que para cada $\omega > 0$ tiene funciones

$$u_\omega(x,t) = b_\omega \operatorname{sen}(\omega x) e^{-\omega^2 kt}.$$

Cada una de estas funciones satisfacen la ecuación de calor y la condición en la frontera $u(0, t) = 0$. Para satisfacer la condición inicial, escriba una superposición

$$u(x,t) = \int_0^\infty b_\omega \operatorname{sen}(\omega x) e^{-\omega^2 kt}\, d\omega. \tag{6.11}$$

Ahora la condición inicial requiere que

$$u(x,0) = \int_0^\infty b_\omega \operatorname{sen}(\omega x)\, d\omega,$$

de manera que elija las b_ω como los coeficientes en la integral de Fourier en senos de $f(x)$ en $[0, \infty)$:

$$b_\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\xi) \operatorname{sen}(\omega\xi)\, d\xi.$$

Con esta elección de coeficientes, la función dada por la ecuación (6.11) es la solución del problema.

EJEMPLO 6.9

Suponga que la función de la temperatura inicial está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{para } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{para } x > \pi \end{cases}.$$

Los coeficientes en la solución (6.11) son

$$b_\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - \xi)\,\text{sen}(\omega\xi)\,d\xi = \frac{2}{\pi}\frac{\pi\omega - \text{sen}(\pi\omega)}{\omega^2}.$$

La solución para esta función de temperatura inicial es

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\pi\omega - \text{sen}(\pi\omega)}{\omega^2}\right)\text{sen}(\omega x)e^{-\omega^2 kt}\,d\omega. \quad ■$$

6.3.3 Métodos de transformadas integrales para la ecuación de calor en un medio infinito

Como sucedió con la ecuación de onda en un dominio no acotado, se ilustrará el uso de las transformadas de Fourier en problemas que involucran la ecuación de calor.

Conducción de calor en la recta Considere nuevamente el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } -\infty < x < \infty, t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{para } -\infty < x < \infty,$$

que ha resuelto por separación de las variables. Como x varía sobre la recta real, puede intentar el uso de la transformada de Fourier en la variable x. Tome la transformada de la ecuación de calor para obtener

$$\mathfrak{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = k\mathfrak{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right].$$

Debido a que x y t son independientes, la transformada pasa a través de la derivada parcial respecto a t:

$$\mathfrak{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right](\omega) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}e^{-i\omega\xi}\,d\xi = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^\infty u(\xi,t)e^{-i\omega\xi}\,d\xi = \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\omega,t).$$

Para la transformada, en la variable $x-$, de la segunda derivada parcial de u respecto a x, use la fórmula operacional:

$$\mathfrak{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right](\omega) = -\omega^2\hat{u}(\omega,t).$$

La transformada de la ecuación de calor es, por tanto

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\omega,t) + k\omega^2\hat{u}(\omega,t) = 0,$$

con solución general

$$\hat{u}(\omega,t) = a_\omega e^{-\omega^2 kt}.$$

Para determinar el coeficiente a_ω, tome la transformada de la condición inicial para obtener

$$\hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega) = a_\omega.$$

Por tanto,

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega)e^{-\omega^2 kt}.$$

Esta es la transformada de Fourier de la solución del problema. Para recuperar la solución, aplique la inversa de la transformada de Fourier:

$$u(x,t) = \mathfrak{F}^{-1}\left[\hat{f}(\omega)e^{-\omega^2 kt}\right](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{-\omega^2 kt}e^{i\omega x}\,d\omega.$$

Por supuesto, la parte real de esta expresión es $u(x, t)$. Para ver que esta solución coincide con la obtenida por separación de las variables, inserte la integral para $\hat{f}(\omega)$ para obtener

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{-\omega^2 kt}e^{i\omega x}\,d\omega &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi\right)e^{i\omega x}e^{-\omega^2 kt}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\omega(\xi - x)}e^{-\omega^2 kt}\,d\xi\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\omega(\xi - x))e^{-\omega^2 kt}\,d\xi\,d\omega \\
&\quad - \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\mathrm{sen}(\omega(\xi - x))e^{-\omega^2 kt}\,d\xi\,d\omega.
\end{aligned}$$

Tomando la parte real de esta expresión, tiene

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\omega(\xi - x))e^{-\omega^2 kt}\,d\xi\,d\omega,$$

la solución obtenida por separación de las variables.

Conducción de calor en la semirecta Considere nuevamente el problema

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < \infty, t > 0, \\
u(0,t) &= 0 \quad \text{para } t \geq 0, \\
u(x,0) &= f(x) \quad \text{para } -\infty < x < \infty,
\end{aligned}$$

el cual ha resuelto por separación de las variables. Para ilustrar la técnica de la transformada, resolverá este problema nuevamente usando la transformada de Fourier en senos. Tome la transformada en senos de la ecuación de calor respecto a x, usando la fórmula operacional para la transformada del término $\partial^2 u/\partial x^2$, para obtener

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}_S(\omega, t) = -\omega^2 k\hat{u}_S(\omega, t) + \omega k u(0, t).$$

Como $u(0, t) = 0$, esto es

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}_S(\omega, t) = -\omega^2 k \hat{u}_S(\omega, t),$$

con solución general

$$\hat{u}_S(\omega, t) = b_\omega e^{-\omega^2 kt}.$$

Ahora $u(x, 0) = f(x)$, así

$$\hat{u}_S(\omega, 0) = \hat{f}_S(\omega) = b_\omega$$

y por tanto

$$\hat{u}_S(\omega, t) = \hat{f}_S(\omega) e^{-\omega^2 kt}.$$

Esta es la transformada en senos de la solución. Para la solución, aplique la inversa de la transformada de Fourier para obtener

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \hat{f}_S(\omega) e^{-\omega^2 kt} \operatorname{sen}(\omega x)\, d\omega.$$

Queda para que el estudiante inserte la expresión de la integral para $\hat{f}_S(\omega)$ y pruebe que esta solución coincide con la obtenida usando la separación de las variables.

La solución mediante la transformada de Laplace de un problema con valores en la frontera Se ha ilustrado el uso de la transformada de Fourier y de la transformada de Fourier en senos en la resolución de problemas de conducción de calor. Aquí hay un ejemplo en donde la transformada natural que hay que usar es la transformada de Laplace.

Considere el problema en una semirecta:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } x > 0, t > 0,$$

$$u(x, 0) = A \quad \text{para } x > 0,$$

$$u(0, t) = \begin{cases} B & \text{para } 0 \le t \le t_0 \\ 0 & \text{para } t > t_0 \end{cases},$$

en donde A, B y t_0 son constantes positivas. Esto define un problema con una temperatura inicial constante distinta de cero y una distribución de temperatura discontinua en el extremo izquierdo de la barra.

Puede escribir la condición en la frontera más nítidamente en términos de la función de Heaviside H:

$$u(0, t) = B[1 - H(t - t_0)].$$

Debido a la discontinuidad en $u(0, t)$, puede intentar con una transformada de Laplace en t. Denote

$$\mathfrak{L}[u(x, t)](s) = U(x, s),$$

con s la variable de la función transformada y x tratada como un parámetro. Tome la transformada de Laplace de la ecuación de calor:

$$\mathfrak{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = k\mathfrak{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right].$$

Para la transformada de $\partial u/\partial t$, la derivada de la variable transformada, use la fórmula operacional para la transformada de Laplace:

$$\mathfrak{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right](s) = sU(x, s) - u(x, 0) = sU(x, s) - A.$$

La transformada pasa a través de $\partial^2 u/\partial x^2$ debido a que x y t son independientes:

$$\mathfrak{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right](s) = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty e^{-st}u(x,t)\,dt = \frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2}.$$

Transformando la ecuación de calor se obtiene

$$sU(x,s) - A = k\frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2}.$$

Escriba esta ecuación como

$$\frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2} - \frac{s}{k}U(x,s) = -\frac{A}{k},$$

una ecuación diferencial en x, para cada $s > 0$. La solución general de esta ecuación es

$$U(x,s) = a_s e^{\sqrt{s/k}x} + b_s e^{-\sqrt{s/k}x} + \frac{A}{s}.$$

La notación refleja el hecho de que los coeficientes, en general, dependerán de s. Ahora, para tener una solución acotada necesita $a_s = 0$, ya que $e^{\sqrt{s/k}x} \to \infty$ conforme $s \to \infty$. Por tanto,

$$U(x,s) = b_s e^{-\sqrt{s/k}x} + \frac{A}{s}. \tag{6.12}$$

Para obtener b_s, aplique la transformada de Laplace de $u(0,t) = B[1 - H(t - t_0)]$ para obtener

$$U(0,s) = B\mathfrak{L}[1](s) - B\mathfrak{L}[H(t-t_0)](s) = B\frac{1}{s} - B\frac{1}{s}e^{-t_0 s}.$$

Entonces

$$U(0,s) = B\frac{1}{s} - B\frac{1}{s}e^{-t_0 s} = b_s + \frac{A}{s},$$

así

$$b_s = \frac{B-A}{s} - \frac{B}{s}e^{-t_0 s}.$$

Ponga esto en la ecuación (6.12) para obtener

$$U(x,s) = \left[\frac{B-A}{s} - \frac{B}{s}e^{-t_0 s}\right]e^{-\sqrt{s/k}x} + \frac{A}{s}.$$

Ahora obtiene la solución usando la inversa de la transformada de Laplace:

$$u(x,t) = \mathfrak{L}^{-1}[U(x,s)].$$

Esta inversa puede ser calculada usando tablas estándar y haciendo uso de la función error y la función de error complementario, las cuales tienen un uso frecuente en estadística. Estas funciones están definidas por

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\xi^2}\,d\xi$$

y

$$\mathrm{erf}c(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-\xi^2}\,d\xi = 1 - \mathrm{erf}(x).$$

Obtiene

$$u(x,t) = \left(A\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) + B\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right)\right)(1 - H(t-t_0))$$
$$+ \left(A\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) + B\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) - B\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{k(t-t_0)}}\right)\right)H(t-t_0).$$

SECCIÓN 6.3 PROBLEMAS

En los problemas del 1 al 4, considere el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } -\infty < x < \infty, t > 0$$
$$u(x,0) = f(x) \quad \text{para } -\infty < x < \infty.$$

Obtenga primero una solución por separación de las variables (integral de Fourier) y después nuevamente mediante transformada de Fourier.

1. $f(x) = e^{-4|x|}$

2. $f(x) = \begin{cases} \mathrm{sen}(x) & \text{para } |x| \leq \pi \\ 0 & \text{para } |x| > \pi \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{para } x < 0 \text{ y para } x > 4 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{para } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{para } |x| > 1 \end{cases}$

En los problemas del 5 al 8, resuelva el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < \infty, t > 0,$$
$$u(0,t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0,$$
$$u(x,0) = f(x) \quad \text{para } 0 < x < \infty.$$

5. $f(x) = e^{-\alpha x}$, con α cualquier constante positiva.

6. $f(x) = xe^{-\alpha x}$, con $\alpha > 0$.

7. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq x \leq h \\ 0 & \text{para } x > h \end{cases}$

con h cualquier número positivo.

8. $f(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{para } x > 2 \end{cases}$

En los problemas 9 y 10, use una transformada de Fourier en la semirecta para obtener una solución.

9.
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - tu \quad \text{para } x > 0, t > 0$$
$$u(x,0) = xe^{-x} \quad \text{para } x > 0$$
$$u(0,t) = 0 \quad \text{para } t > 0$$

10.
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \quad \text{para } x > 0, t > 0$$
$$u(x,0) = 0 \quad \text{para } x > 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = f(t) \quad \text{para } t > 0$$

En los problemas 11 y 12, use la transformada de Laplace para obtener una solución.

11.
$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } x > 0, t > 0,$$
$$u(0,t) = t^2 \quad \text{para } t > 0,$$
$$u(x,0) = 0 \quad \text{para } x > 0$$

12.
$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } x > 0, t > 0,$$
$$u(0,t) = 0 \quad \text{para } t > 0,$$
$$u(x,0) = e^{-x} \quad \text{para } x > 0$$

6.4 La conducción de calor en un cilindro infinito

Considerará el problema de determinar la función de distribución de temperatura en un cilindro sólido, de longitud infinita, homogéneo de radio R. El eje del cilindro está a lo largo del eje z en el espacio x, y, z

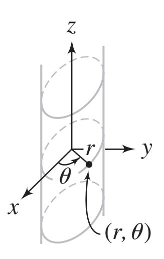


FIGURA 6.15

(figura 6.15). Si $u(x, y, z, t)$ es la función de temperatura, entonces u satisface la ecuación de calor en tres dimensiones

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

Es conveniente usar coordenadas cilíndricas, las cuales consisten de las coordenadas polares en el plano junto con la coordenada usual z, como en el diagrama. Con $x = r\cos(\theta)$ y $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$, sea

$$u(x, y, z, t) = U(r, \theta, z, t).$$

Se vio en la sección 5.1 que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}.$$

Así, en coordenadas cilíndricas, con $U(r, \theta, z, t)$ la temperatura en el cilindro en el punto (r, θ, z) y tiempo t, U satisface:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right).$$

Esta es una ecuación formidable para tratar de resolverla en este momento, así suponga que la temperatura en cualquier punto en el cilindro depende solamente del tiempo t y la distancia horizontal r desde el eje z. Esta suposición simétrica significa que $\partial U/\partial\theta = \partial U/\partial z = 0$, y la ecuación de calor se convierte en

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right) \quad \text{para } 0 \le r < R, t > 0.$$

En este caso escribirá $U(r, t)$ en lugar de $U(r, \theta, z, t)$.

La condición en la frontera es

$$U(R, t) = 0 \quad \text{para } t > 0.$$

Esto significa que la superficie exterior del cilindro se mantiene a temperatura cero.

La condición inicial es

$$U(r, 0) = f(r) \quad \text{para } 0 \le r < R.$$

Separe las variables en la ecuación de calor haciendo $U(r, t) = F(r)T(t)$:

$$F(r)T'(t) = k\left(F''(r)T(t) + \frac{1}{r}F'(r)T(t)\right).$$

Debido a que r y t son variables independientes, esto produce

$$\frac{T'}{kT} = \frac{F'' + (1/r)F'}{F} = -\lambda,$$

en donde λ es la constante de separación. Entonces

$$T' + \lambda k T = 0 \quad \text{y} \quad F'' + \frac{1}{r}F' + \lambda F = 0.$$

Más aún, $U(R, t) = F(R)T(t) = 0$ para $t > 0$, así tiene la condición en la frontera

$$F(R) = 0.$$

El problema para F es un problema de Sturm-Liouville singular (véase la sección 4.3.1) en $[0, R]$, con sólo una condición en la frontera. Imponga la condición que la solución debe ser acotada. Considere casos sobre λ.

Caso 1 $\lambda = 0$
Ahora

$$F'' + \frac{1}{r}F' = 0.$$

Para resolver esto, hacemos $\omega = F'(r)$ para obtener

$$w'(r) + \frac{1}{r}w(r) = 0,$$

o

$$rw' + w = (rw)' = 0.$$

Ésta tiene solución general

$$rw(r) = c,$$

así

$$w(r) = \frac{c}{r} = F'(r).$$

Entonces

$$F(r) = c\ln(r) + d.$$

Tiene que $\ln(r) \to -\infty$ conforme $r \to 0+$ (centro del cilindro), de manera que elige $c = 0$ para tener una solución acotada. Esto significa que $F(r) =$ constante para $\lambda = 0$. La ecuación para T en este caso es $T' = 0$, con $T =$ constante también. En este evento, $U(r, t) =$ constante. Como $U(R, t) = 0$, esta constante debe ser cero. De hecho, $U(r, t) = 0$ es la solución en el caso que $f(r) = 0$. Si la temperatura en la superficie se mantiene en cero, y la temperatura en todo el cilindro es inicialmente cero, entonces la distribución de temperatura permanece cero en todo tiempo, en ausencia de fuentes de calor.

Caso 2 $\lambda < 0$
Escriba $\lambda = -\omega^2$ con $\omega > 0$. Ahora $T' - k\omega^2 T = 0$ tiene solución general

$$T(t) = ce^{\omega^2 kt},$$

que es no acotada a menos que $c = 0$, llevando nuevamente a $u(r, t) = 0$. Este caso conduce sólo a la solución trivial.

Caso 3 $\lambda > 0$, esto es $\lambda = \omega^2$.
Ahora $T' + k\omega^2 T = 0$ tiene soluciones que son múltiplos constantes de $e^{-\omega^2 kt}$, y éstas son acotadas para $t > 0$. La ecuación para F es

$$F''(r) + \frac{1}{r}F'(r) + \omega^2 F(r) = 0,$$

o

$$r^2F''(r) + rF'(r) + \omega^2 r^2 F(r) = 0.$$

En esta forma reconoce la ecuación de Bessel de orden cero, con solución general

$$F(r) = cJ_0(\omega r) + dY_0(\omega r).$$

J_0 es la función de Bessel del primer tipo de orden cero, y Y_0 es la función de Bessel de segundo tipo de orden cero (véase la sección 4.2.3). Como $Y_0(\omega r) \to -\infty$ conforme $r \to 0+$, debe tener $d = 0$. Sin embargo, $J_0(\omega r)$ está acotada en $[0, R]$, así $F(r)$ es una constante múltiplo de $J_0(\omega r)$.

La condición $F(R) = 0$ ahora requiere que esta constante sea cero (en cuyo caso tiene la solución trivial) o que ω sea elegida de manera que

$$J_0(\omega R) = 0.$$

Esto se puede hacer. Recuerde que $J_0(x)$ tiene una infinidad de ceros positivos, los cuales se ordenan como

$$0 < j_1 < j_2 < \cdots.$$

Por tanto, puede tener $J_0(\omega R) = 0$ si ωR es cualquiera de esos números. Así

$$\omega_n = \frac{j_n}{R}.$$

Los números

$$\lambda_n = \omega_n^2 = \frac{j_n^2}{R^2}$$

son los vectores propios de este problema, y las funciones propias son constantes distintas de cero múltiplos de $J_0(j_n r/R)$.

Ahora tiene para cada entero positivo n, una función

$$U_n(r,t) = a_n J_0\left(\frac{j_n r}{R}\right) e^{-j_n{}^2 kt/R^2}.$$

Para satisfacer la condición inicial $U(r, 0) = f(r)$ generalmente debe usar una superposición

$$U(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0\left(\frac{j_n r}{R}\right) e^{-j_n{}^2 kt/R^2}.$$

Ahora debe elegir los coeficientes de manera que

$$U(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0\left(\frac{j_n r}{R}\right) = f(r).$$

Este es un desarrollo en funciones propias de $f(r)$ en términos de las funciones propias de un problema de Sturm-Liouville singular para $F(r)$. Sabe de la sección 4.3.3 cómo encontrar los coeficientes. Sea $\xi = r/R$. Entonces

$$f(R\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(j_n \xi),$$

y

$$a_n = \frac{2}{[J_1(j_n)]^2} \int_0^1 \xi f(R\xi) J_0(j_n\xi)\, d\xi.$$

La solución del problema es

$$U(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{[J_1(j_n)]^2} \int_0^1 \xi f(R\xi) J_0(j_n\xi)\, d\xi \right) J_0\left(\frac{j_n r}{R}\right) e^{-j_n{}^2 kt/R^2}.$$

SECCIÓN 6.4 PROBLEMAS

1. Suponga que el cilindro tiene radio $R = 1$ y, en coordenadas polares, la temperatura inicial es $U(r, 0) = f(r) = r$ para $0 \leq r < 1$. Suponga que $U(1, t) = 0$ para $t > 0$. Aproxime la integral en la solución y escriba los primeros cinco términos de la solución en serie para $U(r, t)$, con $k = 1$. [Los primeros cinco ceros de $J_0(x)$ se dan en la sección 4.2]. Dibuje la gráfica de esta suma de los primeros cinco términos para distintos valores de t.

2. Suponga que el cilindro tiene radio $R = 3$ y, en coordenadas polares, la temperatura inicial es $U(r, 0) = f(r) = e^r$ para $0 \leq r < 3$. Suponga que $U(3, t) = 0$ para $t > 0$. Aproxime la integral en la solución y escriba los primeros cinco términos de la solución en serie para $U(r, t)$, con $k = 16$. Dibuje la gráfica de esta suma de los primeros cinco términos para distintos valores de t.

3. Suponga que el cilindro tiene radio $R = 3$ y, en coordenadas polares, la temperatura inicial es $U(r, 0) = f(r) = 9 - r^2$ para $0 \leq r < 3$. Suponga que $U(3, t) = 0$ para $t > 0$. Aproxime la integral en la solución y escriba los primeros cinco términos en la solución en serie para $U(r, t)$, con $k = \frac{1}{2}$. Dibuje la gráfica de esta suma de los primeros cinco términos para los distintos valores de t.

4. Determine la distribución de temperatura en un cilindro circular homogéneo de radio R con las tapas superior e inferior aisladas bajo la suposición que la temperatura es independiente tanto del ángulo radial como de la altura. Suponga que el calor irradia de la superficie lateral hacia el medio que lo rodea, el cual tiene temperatura cero, con coeficiente de transferencia A. La temperatura inicial es $U(r, 0) = f(r)$. *Sugerencia*: Es necesario saber que una ecuación de la forma $kJ_0'(x) + AJ_0(x) = 0$ tiene una infinidad de soluciones positivas. Esto puede probarse, pero aquí lo supondrá. Las soluciones de esta ecuación conducen a los valores propios de este problema.

6.5 La conducción de calor en una placa rectangular

Considere la distribución de temperatura $u(x, y, t)$ en una placa rectangular, plana y homogénea que cubre la región $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ en el plano. Los lados se mantienen a temperatura cero y la temperatura interior en el tiempo cero en (x, y) está dada por

$$f(x, y) = x(1 - x^2)y(1 - y).$$

El problema para u es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, t > 0,$$

$$u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0 \quad \text{para } 0 < x < 1, t > 0$$

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0 \quad \text{para } 0 < y < 1, t > 0,$$

$$u(x, y, 0) = x(1 - x^2)y(1 - y).$$

Sea $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$ obtenemos

$$X'' + \lambda X = 0, \quad Y'' + \mu Y = 0, \quad T' + (\lambda + \mu)kT = 0,$$

donde λ y μ son las constantes de separación. Las condiciones en la frontera implican en el sentido usual que

$$X(0) = X(1) = 0, \quad Y(0) = Y(1) = 0.$$

Los valores y funciones propios son

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n(x) = \text{sen}(n\pi x),$$

para $n = 1, 2, \ldots$ y

$$\mu_m = m^2\pi^2, \quad Y_m(y) = \text{sen}(m\pi y)$$

para $m = 1, 2, \ldots$ El problema para T es ahora

$$T' + (n^2 + m^2)\pi^2 kT = 0,$$

con solución general

$$T_{nm}(t) = c_{nm} e^{-(n^2+m^2)\pi^2 kt}.$$

Para cada entero positivo n y cada entero positivo m, ahora tiene las funciones

$$u_{nm}(x, y, t) = c_{nm} \operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{sen}(m\pi y) e^{-(n^2+m^2)\pi^2 kt}$$

que satisfacen la ecuación de calor y las condiciones en la frontera. Para satisfacer la condición inicial, sea

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{sen}(m\pi y) e^{-(n^2+m^2)\pi^2 kt}.$$

Debe elegir los coeficientes de manera que

$$u(x, y, 0) = x(1 - x^2)y(1 - y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{sen}(m\pi y).$$

Encuentre (como en la sección 5.7) que

$$\begin{aligned} c_{nm} &= 4 \int_0^1 \int_0^1 x(1 - x^2)y(1 - y) \operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{sen}(m\pi y)\, dx\, dy \\ &= 4 \left(\int_0^1 x(1 - x^2) \operatorname{sen}(n\pi x)\, dx \right) \left(\int_0^1 y(1 - y) \operatorname{sen}(m\pi y)\, dy \right) \\ &= 48 \left(\frac{(-1)^n}{n^3\pi^3} \right) \left(\frac{(-1)^m - 1}{m^3\pi^3} \right). \end{aligned}$$

La solución es

$$\begin{aligned} &u(x, y, z) \\ &= \frac{48}{\pi^6} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-1)^n}{n^3} \right) \left(\frac{(-1)^n - 1}{m^3} \right) \operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{sen}(m\pi y) e^{-(n^2+m^2)\pi^2 kt}. \end{aligned}$$

SECCIÓN 6.5 PROBLEMAS

1. Tomando como antecedente el problema recién resuelto, escriba una solución con una serie doble para el siguiente problema más general:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \text{para } 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq K, t > 0,$$

$$u(x, 0, t) = u(x, K, t) = 0 \quad \text{para } 0 < x < L, t > 0$$

$$u(0, y, t) = u(L, y, t) = 0 \quad \text{para } 0 < y < K, t > 0,$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y).$$

2. Escriba la solución para el problema 1 en el caso que $k = 4$, $L = 2$, $K = 3$ y $f(x, y) = x^2(L - x) \operatorname{sen}(y)(K - y)$.

3. Escriba la solución para el problema 1 en el caso que $k = 1$, $L = \pi$, $K = \pi$ y $f(x, y) = \operatorname{sen}(x)y \cos(y/2)$.

CAPÍTULO 7

LA SERIE DE FOURIER DE UNA FUNCION CONVERGENCIA DE UN SERIE DE FOURIER SERIE DE FO EN COSENOS EN SENOS INTEGRA

La ecuación del potencial

7.1 Las funciones armónicas y el problema de Dirichlet

La ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

se llama la *ecuación de Laplace* en dos dimensiones. En tres dimensiones esta ecuación es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

El laplaciano ∇^2 (se lee “nabla cuadrada”) está definido en dos dimensiones por

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

y en tres dimensiones por

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

En esta notación, la ecuación de Laplace es $\nabla^2 u = 0$.

Una función que satisface la ecuación de Laplace en cierta región se dice que es *armónica* en esa región. Por ejemplo,

$$x^2 - y^2$$

y

$$2xy$$

son armónicas sobre todo el plano.

La ecuación de Laplace se encuentra en problemas que involucran potenciales, tales como los potenciales para el campo de fuerza en mecánica o electromagnetismo o campos gravitacionales. La ecuación de Laplace también se conoce como la *ecuación del estado estacionario del calor*. La ecuación de calor en el espacio de dos o tres dimensiones es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\nabla^2 u.$$

En el caso de estado estacionario (el límite cuando $t \to \infty$), la solución se vuelve independiente de t, así $\partial u/\partial t = 0$ y la ecuación de calor se convierte en la ecuación de Laplace.

En problemas que involucran la ecuación de Laplace no hay condiciones iniciales. Sin embargo, frecuentemente se encuentra el problema resolviendo

$$\nabla^2 u(x, y) = 0$$

para (x, y) en alguna región D del plano, sujeta a la condición que

$$u(x, y) = f(x, y)$$

para (x, y) en la frontera de D. Esta frontera se denota ∂D. Aquí f es una función que tiene valores en ∂D, que frecuentemente es una curva o está compuesta por varias curvas (figura 7.1). El problema de determinar una función armónica conociendo su valor en la frontera, se llama un *problema de Dirichlet*, y f se llama *datos en la frontera* del problema. Hay versiones de este problema en dimensiones mayores, pero aquí se abordará principalmente en la dimensión 2.

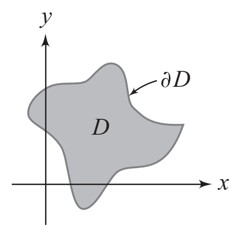


FIGURA 7.1
Frontera típica ∂D de una región D.

La dificultad en el problema de Dirichlet dependiente usualmente de qué tan complicada es la región D. En general, hay más oportunidad de resolver un problema de Dirichlet para una región que posea cierto tipo de simetría, tal como un disco o un rectángulo. Empezará resolviendo el problema de Dirichlet para regiones familiares en el plano.

SECCIÓN 7.1 PROBLEMAS

1. Sean f y g armónicas en un conjunto D de puntos en el plano. Pruebe que $f + g$ es armónica, así como αf para cualquier número real α.

2. Pruebe que las siguientes funciones son armónicas en todo el plano:

(a) $x^3 - 3xy^2$
(b) $3x^2y - y^3$
(c) $x^4 - 6x^2y^2 + y^4$
(d) $4x^3y - 4xy^3$
(e) $\operatorname{sen}(x)\cosh(y)$
(f) $\cos(x)\operatorname{senh}(y)$
(g) $e^{-x}\cos(y)$

3. Pruebe que $\ln(x^2 + y^2)$ es armónica en el plano excepto en el origen.

4. Pruebe que $r^n \cos(n\theta)$ y $r^n \operatorname{sen}(n\theta)$, en coordenadas polares, son armónicas en el plano, para cualquier entero positivo n. *Sugerencia:* Busque la ecuación de Laplace en coordenadas polares.

5. Pruebe que para cualquier entero positivo n, $r^{-n} \cos(n\theta)$, y $r^{-n} \operatorname{sen}(n\theta)$ son armónicas en el plano excepto en el origen.

7.2 Problema de Dirichlet para un rectángulo

Sea R un rectángulo sólido, que consiste de los puntos (x, y) con $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq K$. Busque una función que sea armónica en los puntos interiores de R y tome valores prescritos en los cuatro lados de R, que forman la frontera ∂R de R.

Este tipo de problema puede ser resuelto por separación de variables si los valores en la frontera son distintos de cero en sólo un lado del rectángulo. Se ilustra este tipo de problema y después se esboza una estrategia a seguir si los valores en la frontera son distintos de cero en más de un lado.

EJEMPLO 7.1

Considere el problema de Dirichlet

$$\nabla^2 u(x, y) = 0 \quad \text{para } 0 < x < L, 0 < y < K,$$
$$u(x, 0) = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq L,$$
$$u(0, y) = u(L, y) = 0 \quad \text{para } 0 \leq y \leq K,$$
$$u(x, K) = (L - x)\operatorname{sen}(x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq L.$$

La figura 7.2 muestra la región y los valores en la frontera.

Sea $u(x, y) = X(x)Y(y)$ y sustituya en la ecuación de Laplace para obtener

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda.$$

Entonces

$$X'' + \lambda X = 0 \quad \text{y} \quad Y'' - \lambda Y = 0.$$

A partir de las condiciones en la frontera,

$$u(x, 0) = X(x)Y(0) = 0$$

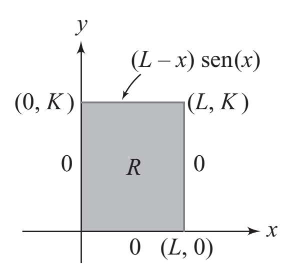


FIGURA 7.2 *Valores en la frontera dados en los lados de la frontera del rectángulo.*

así $Y(0) = 0$. Análogamente,

$$X(0) = X(L) = 0.$$

El problema para $X(x)$ ya es familiar, con valores propios $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$ y funciones propias que son múltiplos constantes distintos de cero de $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$.

El problema para Y es ahora

$$Y'' - \frac{n^2\pi^2}{L^2}Y = 0; \qquad Y(0) = 0.$$

Las soluciones de este problema son múltiplos constantes de $\operatorname{senh}(n\pi y/L)$.

Para cada entero positivo $n = 1, 2, \ldots$, ahora tiene funciones

$$u_n(x, y) = b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right),$$

que son armónicas en el rectángulo y satisfacen la condición de que valen cero en los lados izquierdo, inferior y derecho del rectángulo. Para satisfacer la condición en la frontera en el lado $y = K$, debe usar la superposición

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right).$$

Elija los coeficientes de manera que

$$u(x, K) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi K}{L}\right) = (L - x)\operatorname{sen}(x).$$

Éste es un desarrollo en serie de Fourier en senos de $(L - x)\operatorname{sen}(x)$ en $[0, L]$, de manera que debe elegir todo el coeficiente como el coeficiente de seno:

$$\begin{aligned} b_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi K}{L}\right) &= \frac{2}{L}\int_0^L (L - \xi)\operatorname{sen}(\xi)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi \\ &= 4L^2 \frac{n\pi[1 - (-1)^n \cos(L)]}{L^4 - 2L^2n^2\pi^2 + n^4\pi^4}. \end{aligned}$$

Entonces

$$b_n = \frac{4L^2}{\operatorname{senh}(n\pi\,\mathrm{k}/L)} \frac{n\pi[1 - (-1)^n \cos(L)]}{(L^2 - n^2\pi^2)^2}.$$

La solución es

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L^2}{\operatorname{senh}(n\pi\,\mathrm{k}/L)} \frac{n\pi[1 - (-1)^n \cos(L)]}{(L^2 - n^2\pi^2)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right). \blacksquare$$

Si se dan valores distintos de cero en los cuatro lados de R, se definen cuatro problemas de Dirichlet, en cada uno de los cuales los valores en la frontera son distintos de cero únicamente en un lado. Este proceso se muestra en la figura 7.3. Cada uno de estos problemas puede resolverse por separación de las variables. Si $u_j(x, y)$ es la solución del j-ésimo problema, entonces

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{4} u_j(x, y)$$

es la solución del problema original. Esta suma satisfará los datos originales en la frontera, ya que cada $u_j(x, y)$ satisface los valores distintos de cero en un lado y es cero en los otros tres lados.

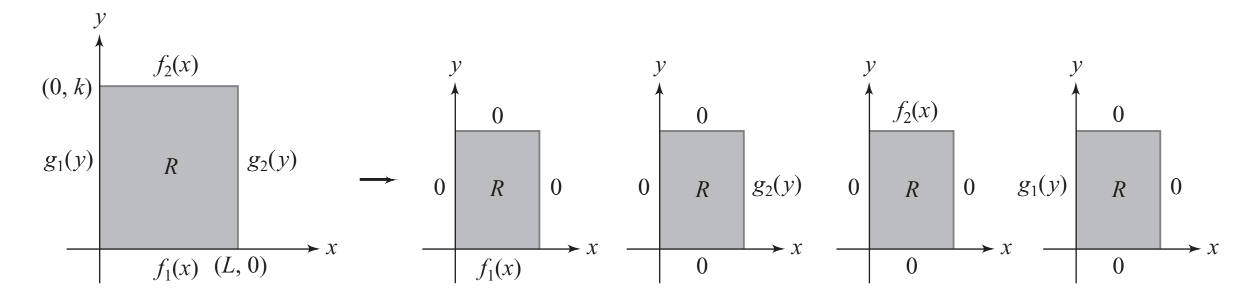


FIGURA 7.3 $u(x, y) = \Sigma_{j=1}^{4} u_j(x, y)$.

SECCIÓN 7.2 PROBLEMAS

En los problemas del 1 al 5, resuelva el problema de Dirichlet para el rectángulo, con las condiciones en la frontera dadas.

1. $u(0, y) = u(1, y) = 0$ para $0 \le y \le \pi$, $u(x, \pi) = 0$, y $u(x, 0) = \text{sen}(\pi x)$ para $0 \le x \le 1$

2. $u(0, y) = y(2 - y)$, $u(3, y) = 0$ para $0 \le y \le 2$, y $u(x, 0) = u(x, 2) = 0$ para $0 \le x \le 3$

3. $u(0, y) = u(1, y) = 0$ para $0 \le y \le 4$, y $u(x, 0) = 0$, $u(x, 4) = x\cos(\pi x/2)$ para $0 \le x \le 1$

4. $u(0, y) = \text{sen}(y)$, $u(\pi, y) = 0$ para $0 \le y \le \pi$, y $u(x, 0) = x(\pi - x)$, $u(x, \pi) = 0$ para $0 \le x \le \pi$

5. $u(0, y) = 0$, $u(2, y) = \text{sen}(y)$ para $0 \le y \le \pi$, y $u(x, 0) = 0$, $u(x, \pi) = x\,\text{sen}(\pi x)$ para $0 \le x \le 2$

6. Aplique la separación de variables para resolver el siguiente problema mixto con valores en la frontera ("mixto" significa que algunas condiciones en la frontera están dadas en la función y otras en sus derivadas parciales):

$$\nabla^2 u(x, y) = 0 \text{ para } 0 < x < a,\ 0 < y < b$$

$$u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, b) = 0 \quad \text{para } 0 \le x \le a$$

$$u(0, y) = 0,\ u(a, y) = g(y) \quad \text{para } 0 \le y \le b.$$

7. Aplique la separación de variables para resolver el siguiente problema mixto con valores en la frontera:

$$\nabla^2 u(x, y) = 0 \quad \text{para } 0 < x < a,\ 0 < y < b$$

$$u(x, 0) = 0,\ u(x, b) = f(x) \quad \text{para } 0 \le x \le a$$

$$u(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = 0 \quad \text{para } 0 \le y \le b.$$

8. Resuelva la distribución de temperatura del estado estacionario en una placa delgada, plana que cubre el rectángulo $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ si la temperatura en los lados verticales e inferior se mantiene en cero y la temperatura a lo largo del lado superior es $f(x) = x(x - a)^2$.

9. Resuelva la distribución de temperatura del estado estacionario en una placa delgada, plana que cubre el rectángulo $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 1$ si la temperatura en los lados horizontales es cero, mientras que en el lado izquierdo es $f(y) = \text{sen}(\pi y)$ y en el lado derecho es $f(y) = y(1 - y)$.

7.3 El problema de Dirichlet para un disco

Resuelva el problema de Dirichlet para un disco de radio R centrado en el origen. En coordenadas polares, el problema es

$$\nabla^2 u(r, \theta) = 0 \quad \text{para } 0 \le r < R,\ -\pi \le \theta \le \pi,$$

$$u(R, \theta) = f(\theta) \quad \text{para } -\pi \le \theta \le \pi.$$

La ecuación de Laplace en coordenadas polares es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Es fácil verificar que las funciones

$$1, r^n \cos(n\theta) \quad \text{y} \quad r^n \operatorname{sen}(n\theta)$$

son armónicas en todo el plano. Entonces intente una solución

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \cos(n\theta) + b_n r^n \operatorname{sen}(n\theta).$$

Para satisfacer la condición en la frontera, necesita elegir los coeficientes de manera que

$$u(R,\theta) = f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n \cos(n\theta) + b_n R^n \operatorname{sen}(n\theta).$$

Pero éste es precisamente el desarrollo de Fourier de $f(\theta)$ en $[-\pi, \pi]$, que conduce a elegir

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\, d\xi,$$

$$a_n R^n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\cos(n\xi)\, d\xi,$$

y

$$b_n R^n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\operatorname{sen}(n\xi)\, d\xi.$$

Entonces

$$a_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\cos(n\xi)\, d\xi$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\cos(n\xi)\, d\xi.$$

La solución es

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\, d\xi$$
$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\cos(n\xi)\, d\xi \cos(n\theta) + \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\operatorname{sen}(n\xi)\, d\xi \operatorname{sen}(n\theta)\right).$$

Esto también puede escribirse

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\, d\xi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\cos(n(\xi-\theta))\, d\xi,$$

o

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos(n(\xi-\theta))\right] f(\xi)\, d\xi.$$

EJEMPLO 7.2

Resuelva el problema de Dirichlet

$$\nabla^2 u(r,\theta) = 0 \quad \text{para } 0 \le r < 4, -\pi \le \theta \le \pi,$$
$$u(4,\theta) = f(\theta) = \theta^2 \quad \text{para } -\pi \le \theta \le \pi.$$

La solución es

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \xi^2\,d\xi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{4}\right)^n \int_{-\pi}^{\pi} \xi^2 \cos(n(\xi-\theta))\,d\xi$$
$$= \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\left(\frac{r}{4}\right)^n \cos(n\theta). \quad ■$$

EJEMPLO 7.3

Resuelva el problema de Dirichlet

$$\nabla^2 u(x,y) = 0 \quad \text{para } x^2 + y^2 < 9,$$
$$u(x,y) = x^2 y^2 \quad \text{para } x^2 + y^2 = 9.$$

Convertir el problema a coordenadas polares, usando $x = r\cos(\theta)$ y $y = r\,\text{sen}(\theta)$. Sea

$$u(x,y) = u(r\cos(\theta), r\,\text{sen}(\theta)) = U(r,\theta).$$

La condición en la frontera, donde $r = 3$, se convierte en

$$U(3,\theta) = 9\cos^2(\theta)9\,\text{sen}^2(\theta) = 81\cos^2(\theta)\,\text{sen}^2(\theta) = f(\theta).$$

La solución es

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 81\,\text{sen}^2(\xi)\cos^2(\xi)\,d\xi$$
$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{3}\right)^n \left[\int_{-\pi}^{\pi} 81\cos^2(\xi)\,\text{sen}^2(\xi)\cos(n\xi)\,d\xi\,\cos(n\theta)\right.$$
$$\left. + \int_{-\pi}^{\pi} 81\cos^2(\xi)\,\text{sen}^2(\xi)\,\text{sen}(n\xi)\,d\xi\,\text{sen}(n\theta)\right].$$

Ahora

$$\int_{-\pi}^{\pi} 81\,\text{sen}^2(\xi)\cos^2(\xi)\,d\xi = \frac{81}{4}\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 81\cos^2(\xi)\,\text{sen}^2(\xi)\cos(n\xi)\,d\xi = \begin{cases} 0 & \text{si } n \ne 4 \\ \dfrac{-81\pi}{8} & \text{para } n = 4 \end{cases}$$

y

$$\int_{-\pi}^{\pi} 81\cos^2(\xi)\,\text{sen}^2(\xi)\,\text{sen}(n\xi)\,d\xi = 0.$$

Por tanto,

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\frac{81\pi}{4} - \frac{1}{\pi}\frac{81\pi}{8}\left(\frac{r}{3}\right)^4\cos(4\theta) = \frac{81}{8} - \frac{1}{8}r^4\cos(4\theta).$$

Para regresar esta solución a coordenadas rectangulares, use el hecho de que

$$\cos(4\theta) = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned} U(r,\theta) &= \frac{81}{8} - \frac{1}{8}\left(8r^4\cos^4(\theta) - 8r^2r^2\cos^2(\theta) + r^4\right) \\ &= \frac{81}{8} - \frac{1}{8}\left(8x^4 - 8(x^2+y^2)x^2 + (x^2+y^2)^2\right) = u(x,y). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

SECCIÓN 7.3 PROBLEMAS

En los problemas del 1 al 8, encuentre una solución en serie para el problema de Dirichlet para un disco del radio dado, con los datos dados en la frontera (en coordenadas polares).

1. $R = 3, f(\theta) = 1$

2. $R = 3, f(\theta) = 8\cos(4\theta)$

3. $R = 2, f(\theta) = \theta^2 - \theta$

4. $R = 5, f(\theta) = \theta\cos(\theta)$

5. $R = 4, f(\theta) = e^{-\theta}$

6. $R = 1, f(\theta) = \operatorname{sen}^2(\theta)$

7. $R = 8, f(\theta) = 1 - \theta^3$

8. $R = 4, f(\theta) = \theta e^{2\theta}$

Escriba una solución para cada uno de los siguientes problemas de Dirichlet convirtiendo a coordenadas polares.

9. $\nabla^2 u(x, y) = 0$ para $x^2 + y^2 < 16$

$u(x, y) = x^2$ para $x^2 + y^2 = 16$

10. $\nabla^2 u(x, y) = 0$ para $x^2 + y^2 < 9$

$u(x, y) = x - y$ para $x^2 + y^2 = 9$

11. $\nabla^2 u(x, y) = 0$ para $x^2 + y^2 < 4$

$u(x, y) = x^2 - y2$ para $x^2 + y^2 = 4$

12. $\nabla^2 u(x, y) = 0$ para $x^2 + y^2 < 25$

$u(x, y) = xy$ para $x^2 + y^2 = 25$

7.4 La fórmula de la integral de Poisson para el disco

Existe una fórmula en serie para la solución del problema de Dirichlet para un disco. En esta sección obtendrá una fórmula integral para esta solución. El problema para un disco de radio 1, en coordenadas polares, es

$$\nabla^2 u(r,\theta) = 0 \quad \text{para } 0 \le r < 1, -\pi \le \theta \le \pi,$$
$$u(1,\theta) = f(\theta) \quad \text{para } -\pi \le \theta \le \pi.$$

La solución en serie de la sección anterior, con $R = 1$, es

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos(n(\xi-\theta))\right] f(\xi)\,d\xi. \tag{7.1}$$

La cantidad

$$\frac{1}{2\pi}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos(n\zeta)\right]$$

se llama el *núcleo de Poisson* y se denota por $P(r, \zeta)$. En términos del núcleo de Poisson, la solución es

$$u(r,\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \xi - \theta) f(\xi)\, d\xi.$$

Ahora obtendrá una forma cerrada para el núcleo de Poisson, llegando a una fórmula integral para la solución. Sea $z = re^{i\zeta}$. Por la fórmula de Euler,

$$z^n = r^n e^{in\zeta} = r^n \cos(n\zeta) + ir^n \operatorname{sen}(n\zeta),$$

así $r^n \cos(n\zeta)$, que aparece en el núcleo de Poisson, es la parte real de z^n, denotada $\operatorname{Re}(z^n)$. Entonces

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\zeta) = \operatorname{Re}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right).$$

Pero $|z| = r < 1$ en el disco unitario, de manera que la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ converge. Más aún,

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}.$$

Entonces

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\zeta) = \operatorname{Re}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right)$$
$$= \operatorname{Re}\left(1 + 2\frac{z}{1-z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i\zeta}}{1-re^{i\zeta}}\right).$$

El resto son sólo cálculos para extraer esta parte real:

$$\frac{1+re^{i\zeta}}{1-re^{i\zeta}} = \left(\frac{1+re^{i\zeta}}{1-re^{i\zeta}}\right)\left(\frac{1-re^{-i\zeta}}{1-re^{-i\zeta}}\right)$$
$$= \frac{1 - r^2 + r\left(e^{i\zeta} - e^{-i\zeta}\right)}{1 + r^2 - r\left(e^{i\zeta} + e^{-i\zeta}\right)} = \frac{1 - r^2 + 2ir \operatorname{sen}(\zeta)}{1 + r^2 - 2r\cos(\zeta)}.$$

Por tanto,

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\zeta) = \operatorname{Re}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right) = \frac{1-r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\zeta)},$$

así la solución dada por la ecuación (7.1) es

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\xi - \theta)} f(\xi)\, d\xi.$$

Esta es la *fórmula de la integral de Poisson* para la solución del problema de Dirichlet para el disco unitario. Para un disco de radio R, un simple cambio de variables conduce a la solución

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\xi - \theta)} f(\xi)\, d\xi. \quad (7.2)$$

Esta integral, para el disco de radio R, también se conoce como la *fórmula de Poisson*.

EJEMPLO 7.4

De nuevo al problema

$$\nabla^2 u(r,\theta) = 0 \quad \text{para } 0 \le r < 4, -\pi \le \theta \le \pi,$$
$$u(4,\theta) = f(\theta) = \theta^2 \quad \text{para } -\pi \le \theta \le \pi,$$

que fue resuelto en la sección anterior mediante la serie de Fourier. La fórmula integral de Poisson para la solución es

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{16-r^2}{16+r^2-8r\cos(\xi-\theta)}\xi^2\,d\xi$$
$$= \frac{16-r^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\xi^2}{16+r^2-8r\cos(\xi-\theta)}\,d\xi.$$

Esta integral no puede ser evaluada en la forma cerrada, pero frecuentemente es más conveniente para las aproximaciones numéricas que la solución en serie infinita. ■

SECCIÓN 7.4 PROBLEMAS

En los problemas del 1 al 4, escriba una fórmula integral para la solución del problema de Dirichlet para un disco de radio R alrededor del origen con los valores dados de la función en la frontera. Use la solución integral para aproximar el valor de $u(r, \theta)$ en los puntos dados.

1. $R = 1, f(\theta) = \theta$; $(1/2, \pi)$, $(3/4, \pi/3)$, $(0.2, \pi/4)$
2. $R = 4$, $f(\theta) = \text{sen}(4\theta)$; $(1, \pi/6)$, $(3, 7\pi/2)$, $(1, \pi/4)$, $(2.5, \pi/12)$
3. $R = 15, f(\theta) = \theta^3 - \theta$; $(4, \pi)$, $(12, 3\pi/2)$, $(8, \pi/4)$, $(7, 0)$
4. $R = 6, f(\theta) = e^{-\theta}$; $(5.5, 3\pi/5)$, $(4, 2\pi/7)$, $(1, \pi)$, $(4, 9\pi/4)$
5. La fórmula integral de Dirichlet puede usarse algunas veces para evaluar integrales bastante generales. Como un ejemplo, sea n un entero positivo y sea $u(r, \theta) = r^n \text{sen}(n\theta)$ para $0 \le r < R$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Sabe que u es armónica en todo el plano. Puede, por tanto, pensar en u como la solución del problema de Dirichlet en el disco $r \le R$ que satisface $u(R, \theta) = f(\theta) = R^n \text{sen}(n\theta)$. Use la fórmula integral de Poisson de la ecuación (7.2) (cuya solución ya conoce) para escribir

$$r^n \text{sen}(n\theta)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{r^2-2rR\cos(\theta-\xi)+R^2} R^n \,\text{sen}(n\xi)\,d\xi.$$

Ahora evalúe $u(R/2, \pi/2)$ para obtener la fórmula integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\text{sen}(n\xi)}{5-4\,\text{sen}(\xi)}\,d\xi = \frac{\pi}{3(2^{n-1})}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

6. En el problema 5, evalúe $u(R/2, \pi)$. ¿Qué integral se obtiene?
7. Use la estrategia mostrada en el problema 5, pero ahora use $u(r, \theta) = r^n \cos(n\theta)$. Obtenga las integrales evaluando $u(R/2, \pi/2)$ y $u(R/2, \pi)$.
8. ¿Qué integral se obtiene haciendo $u(r, \theta) = 1$ en la fórmula integral de Poisson?

7.5 Los problemas de Dirichlet en regiones no acotadas

Considere el problema de Dirichlet para algunas regiones que no están acotadas en el sentido de contener puntos arbitrariamente lejanos del origen. Para tales problemas, la integral de Fourier, la transformada de Fourier, o la transformada de Fourier en senos o cosenos pueden ser buenos recursos para su solución.

7.5.1 El problema de Dirichlet para el semiplano superior

Considere el problema

$$\nabla^2 u(x, y) = 0 \quad \text{para } -\infty < x < \infty, y > 0,$$
$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{para } -\infty < x < \infty.$$

Busque una función que sea armónica en el semiplano superior y tome valores dados a lo largo del eje x. Sea $u(x, y) = X(x)Y(y)$ y separe las variables en la ecuación de Laplace para obtener

$$X'' + \lambda X = 0, \quad Y'' - \lambda Y = 0.$$

Busque una solución acotada. Considere casos sobre λ.

Caso 1 $\lambda = 0$.
Ahora $X(x) = ax + b$, y obtiene una solución acotada eligiendo $a = 0$. Así 0 es un valor propio de este problema, con funciones propias constantes.

Caso 2 $\lambda = -\omega^2 < 0$.
Ahora $X(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$. Pero $e^{\omega x} \to \infty$ conforme $x \to \infty$, de manera que se debe elegir $a = 0$. Y $e^{-\omega x} \to \infty$ conforme $x \to -\infty$, de manera que también debe hacer $b = 0$, llegando a la solución trivial. Este problema no tiene valor propio negativo.

Caso 3 $\lambda = \omega^2 > 0$.
Ahora $X(x) = a\cos(\omega x) + b\,\text{sen}(\omega x)$, una función acotada para a y b constantes cualesquiera.

La ecuación para Y ahora se convierte en $Y'' - \omega^2 Y = 0$, con solución general $Y(y) = ae^{\omega y} + be^{-\omega y}$. Como $y > 0$ y $\omega > 0$, $e^{\omega y} \to \infty$ conforme $y \to \infty$, de manera que necesita $a = 0$. Sin embargo, $e^{-\omega y}$ está acotado para $y > 0$, así $Y(y) = be^{-\omega y}$.

Para cada $\omega \geq 0$, ahora tiene una función

$$u_\omega(x, y) = [a_\omega \cos(\omega x) + b_\omega \,\text{sen}(\omega x)]e^{-\omega y}$$

que satisface la ecuación de Laplace. Intente una solución del problema con la superposición

$$u(x, y) = \int_0^\infty [a_\omega \cos(\omega x) + b_\omega \,\text{sen}(\omega x)]e^{-\omega y}\, d\omega.$$

Para satisfacer las condiciones en la frontera, elija los coeficientes de manera que

$$u(x, 0) = f(x) = \int_0^\infty [a_\omega \cos(\omega x) + b_\omega \,\text{sen}(\omega x)]\, d\omega.$$

Este es el desarrollo integral de Fourier de $f(x)$, así

$$a_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\omega\xi)\, d\xi$$

y

$$b_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\text{sen}(\omega\xi)\, d\xi.$$

Con estos coeficientes, tiene la solución, que puede escribirse en una forma compacta, involucrando sólo una integral, de la siguiente manera. Escriba

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\left(\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos(\omega\xi)\,d\xi\right)\cos(\omega x)\right.\\ &\quad + \left.\left(\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\,\mathrm{sen}(\omega\xi)\,d\xi\right)\mathrm{sen}(\omega x)\right]e^{-\omega y}\,d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty [\cos(\omega\xi)\cos(\omega x) + \mathrm{sen}(\omega\xi)\,\mathrm{sen}(\omega x)]\,f(\xi)e^{-\omega y}\,d\xi\,d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \left[\int_0^\infty \cos(\omega(\xi - x))e^{-\omega y}\,d\omega\right] f(\xi)\,d\xi. \end{aligned}$$

La integral interna puede ser evaluada explícitamente:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \cos(\omega(\xi - x))e^{-\omega y}\,d\omega &= \left[\frac{e^{-\omega y}}{y^2 + (\xi - x)^2}[-y\cos(\omega(\xi - x)) + (\xi - x)\,\mathrm{sen}(\omega(\xi - x))]\right]_0^\infty \\ &= \frac{y}{y^2 + (\xi - x)^2}. \end{aligned}$$

Por tanto, la solución del problema de Dirichlet para el semiplano superior es

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{f(\xi)}{y^2 + (\xi - x)^2}\,d\xi. \tag{7.3}$$

Para ilustrar la técnica, resuelva nuevamente este problema usando la transformada de Fourier.

Solución usando la transformada de Fourier Aplique la transformada de Fourier en la variable x para la ecuación de Laplace. Ahora $\partial/\partial y$ sale de la transformada, y puede usar la regla operacional para aplicar la transformada a la derivada respecto a x. Obtiene

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \mathfrak{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}(\omega, y) - \omega^2\hat{u}(\omega, y) = 0.$$

La solución general de la ecuación diferencial en la variable y es

$$\hat{u}(\omega, y) = a_\omega e^{\omega y} + b_\omega e^{-\omega y}.$$

Tenga presente aquí que ω varía sobre toda la recta real (a diferencia de la solución mediante la integral de Fourier, donde ω era una variable de integración sobre la semirecta). Debido a que $e^{\omega y} \to \infty$ conforme $y \to \infty$, debe tener $a_\omega = 0$ para ω positivo. Pero $e^{-\omega y} \to \infty$ conforme $y \to \infty$ si $\omega < 0$, así $b_\omega = 0$ para ω negativo. Así,

$$\hat{u}(\omega, y) = \begin{cases} b_\omega e^{-\omega y} & \text{si } \omega \geq 0 \\ a_\omega e^{\omega y} & \text{si } \omega < 0 \end{cases}.$$

Simplifique esta notación escribiendo

$$\hat{u}(\omega, y) = c_\omega e^{-|\omega| y}.$$

Para resolver c_ω, use el hecho de que $u(x, 0) = f(x)$ para obtener

$$\hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega) = c_\omega.$$

La transformada de Fourier de la solución es

$$\hat{u}(\omega, y) = \hat{f}(\omega)e^{-|\omega| y}.$$

Para obtener $u(x, y)$, aplique la transformada inversa de Fourier de esta función:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \mathfrak{F}^{-1}\left[\hat{f}(\omega)e^{-|\omega|y}\right](x) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{-|\omega|y}e^{i\omega x}\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\omega\xi}\,d\xi\right)e^{-|\omega|y}e^{i\omega x}\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\omega|y}e^{-i\omega(\xi-x)}\,d\omega\right)f(\xi)\,d\xi. \end{aligned}$$

Ahora

$$e^{-i\omega(\xi-x)} = \cos(\omega(\xi - x)) - i\,\mathrm{sen}(\omega(\xi - x))$$

y una integración rutinaria da

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\omega|y}e^{-i\omega(\xi-x)}\,d\omega = \frac{2y}{y^2 + (\xi - x)^2}.$$

La solución por la transformada de Fourier es

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)}{y^2 + (\xi - x)^2}\,d\xi,$$

que coincide con la solución obtenida usando separación de las variables.

7.5.2 El problema de Dirichlet para el primer cuadrante

Algunas veces puede usar la solución de un problema para elaborar la solución de otro problema. Se ilustra esto con el problema de Dirichlet para el primer cuadrante:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(x, y) &= 0 \quad \text{para } x > 0,\, y > 0, \\ u(x, 0) &= f(x) \quad \text{para } x \geq 0, \\ u(0, y) &= 0 \quad \text{para } y \geq 0. \end{aligned}$$

La frontera del primer cuadrante consiste en la parte no negativa del eje x junto con la parte no negativa del eje y, y la información acerca de la función buscada debe ser dada en ambos segmentos. En este caso está asignando el valor cero en la parte vertical y los valores $f(x)$ dados en la parte horizontal de la frontera.

Podría resolver este problema por separación de las variables. Sin embargo, si dobla el semiplano superior a lo largo del eje vertical, obtiene el primer cuadrante, lo que sugiere que explore la posibilidad de usar la solución para el semiplano superior para obtener la solución para el primer cuadrante. Para hacer esto, sea

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{para } x \geq 0 \\ \text{cualquier valor} & \text{para } x < 0 \end{cases}.$$

Por "cualquier valor," implica que por el momento no importa qué valores de $g(x)$ para $x < 0$, pero se reserva el derecho de asignar después estos valores.

El problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(x, y) &= 0 \quad \text{para } -\infty < x < \infty,\, y > 0, \\ u(x, 0) &= g(x) \quad \text{para } -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

para el semiplano superior tiene la solución

$$u_{hp}(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi)}{y^2 + (\xi - x)^2} \, d\xi.$$

Escriba esto como

$$u_{hp}(x, y) = \frac{y}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{0} \frac{g(\xi)}{y^2 + (\xi - x)^2} \, d\xi + \int_{0}^{\infty} \frac{g(\xi)}{y^2 + (\xi - x)^2} \, d\xi \right].$$

Intercambie variables en la integral que está más a la izquierda haciendo $w = -\xi$. Esta integral se convierte en

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{g(\xi)}{y^2 + (\xi - x)^2} \, d\xi = \int_{\infty}^{0} \frac{g(-w)}{y^2 + (w + x)^2} (-1) \, dw.$$

Ahora reemplace nuevamente la variable de integración por ξ para escribir

$$u_{hp}(x, y) = \frac{y}{\pi} \left[\int_{\infty}^{0} \frac{g(-\xi)}{y^2 + (\xi + x)^2} (-1) \, d\xi + \int_{0}^{\infty} \frac{g(\xi)}{y^2 + (\xi - x)^2} \, d\xi \right]$$

$$= \frac{y}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left(\frac{g(-\xi)}{y^2 + (\xi + x)^2} + \frac{f(\xi)}{y^2 + (\xi - x)^2} \right) d\xi,$$

donde en la última integral ha usado el hecho de que $g(\xi) = f(\xi)$ si $\xi \geq 0$. Ahora reemplace "cualquier valor" en la definición de g. Observe que la última integral se hace cero en la parte positiva del eje y, en los puntos $(0, y)$, si $f(\xi) + g(-\xi) = 0$ para $\xi \geq 0$. Esto ocurrirá si $g(-\xi) = -f(\xi)$. Esto es, hace a g la extensión impar de f a toda la recta real, obteniendo

$$u_{hp}(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{y^2 + (\xi - x)^2} - \frac{1}{y^2 + (\xi + x)^2} \right) f(\xi) \, d\xi.$$

Esta es la solución de este problema de Dirichlet particular para el semiplano superior. Pero esta función también es armónica en el primer cuadrante, haciéndose cero cuando $x = 0$, e igual a $f(x)$ si $x \geq 0$ y $y = 0$. Por tanto, $u_{hp}(x, y)$ también es la solución de este problema de Dirichlet para el primer cuadrante del plano.

EJEMPLO 7.5

Considere el problema

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{para } x > 0, y > 0,$$

$$u(0, y) = 0 \quad \text{para } y > 0,$$

$$u(x, 0) = xe^{-x} \quad \text{para } x > 0.$$

La solución es

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{y^2 + (\xi - x)^2} - \frac{1}{y^2 + (\xi + x)^2} \right) \xi e^{-\xi} \, d\xi. \blacksquare$$

EJEMPLO 7.6

Resuelva el problema

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{para } x > 0, y > 0,$$

$$u(0, y) = 0 \quad \text{para } y > 0,$$

$$u(x, 0) = 1 \quad \text{para } x > 0.$$

La solución es

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{y^2 + (\xi - x)^2}\, d\xi - \frac{y}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{y^2 + (\xi + x)^2}\, d\xi.$$

Estas integrales pueden ser evaluadas en la forma cerrada. Para la primera,

$$\frac{y}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{y^2 + (\xi - x)^2}\, d\xi = \frac{y}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{y^2\left[1 + ((\xi - x)/y)^2\right]}\, d\xi$$

$$= \frac{y}{\pi}\frac{1}{y}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(-\frac{x}{y}\right)\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

Por un cálculo semejante,

$$\frac{y}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{y^2 + (\xi + x)^2}\, d\xi = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

Entonces

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

Esta función es armónica en el primer cuadrante del plano y $u(0, y) = 0$ para $y > 0$. Más aún, si $x > 0$,

$$\lim_{y \to 0+} \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2} = 1,$$

como se requería. ■

7.5.3 Un problema del potencial electrostático

Considere el problema

$$\nabla^2 u(x, y) = -h \quad \text{para } 0 < x < \pi,\ y > 0,$$

$$u(0, y) = 0,\ u(\pi, y) = 1 \quad \text{para } y > 0,$$

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{para } 0 < x < \pi.$$

Este es un problema de Dirichlet si $h = 0$, pero suponga que h es una constante positiva. Este problema modela el potencial electrostático en la banda que consiste en todos los (x, y) con $0 < x < \pi$ y $y > 0$, suponiendo una distribución uniforme de la carga con densidad $h/4\pi$ en toda esta región. La ecuación diferencial parcial $\nabla^2 u = -h$ se llama la *ecuación de Poisson*. La frontera de la banda consiste en las semirectas $x = 0$ y $x = \pi$ con $y \geq 0$ y el segmento en el eje x con $0 \leq x \leq \pi$. En la figura 7.4 se muestran la banda y su frontera.

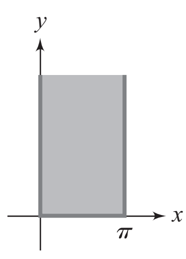


FIGURA 7.4
Banda $0 \leq x \leq \pi$, $y \geq 0$.

Considere las posibilidades para resolver este problema. Como $y > 0$, debe considerar una transformada de Fourier en senos o en cosenos en y. La dificultad aquí es que al transformar la ecuación de Poisson, tendría que tomar la transformada de $-h$, y una constante no tiene transformada en senos o cosenos. Por ejemplo, si intenta calcular la transformada de Fourier en senos, debe evaluar

$$\int_0^\infty -h \operatorname{sen}(\omega x)\, dx,$$

y esta integral diverge.

Como x varía de 0 a π, podría intentar una transformada de Fourier finita en senos o cosenos en x. Si intenta la transformada de Fourier finita en cosenos, entonces la fórmula operacional requiere que tenga información acerca de la derivada de la función en el origen, y no tiene dicha información. Sin embargo, la fórmula operacional de la transformada finita en senos requiere de información acerca de la función en los extremos del intervalo, y esto está dado en las condiciones en la frontera para $y > 0$. Se buscará, por tanto, una solución usando esta transformada. Denote la transformada de Fourier finita en senos en la variable x como

$$\mathfrak{S}[u(x, y)] = \widetilde{u}_S(n, y).$$

Ahora aplique la transformada respecto a x a la ecuación de Poisson:

$$\mathfrak{S}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] + \mathfrak{S}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] = \mathfrak{S}[-h].$$

Por la fórmula operacional,

$$\mathfrak{S}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = -n^2\widetilde{u}_S(n, y) - n(-1)^n u(\pi, y) + nu(0, y).$$

Debido a que x y y son independientes,

$$\mathfrak{S}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] = \int_0^\pi \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \operatorname{sen}(nx)\, dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_0^\pi u(x, y) \operatorname{sen}(nx)\, dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\widetilde{u}_S(n, y).$$

Finalmente,

$$\mathfrak{S}[-h] = \int_0^\pi -h \operatorname{sen}(nx)\, dx = -\frac{h}{n}[1 - (-1)^n].$$

Por tanto, la ecuación de Poisson se transforma en

$$-n^2\widetilde{u}_S(n, y) - n(-1)^n u(\pi, y) + nu(0, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\widetilde{u}_S(n, y) = -\frac{h}{n}[1 - (-1)^n].$$

Ahora $u(\pi, y) = 1$ y $u(0, y) = 0$, de manera que esta ecuación se puede escribir como

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\widetilde{u}_S(n, y) - n^2\widetilde{u}_S(n, y) = n(-1)^n - \frac{h}{n}[1 - (-1)^n].$$

Para $n = 1, 2, \ldots,$ esta ecuación tiene solución general

$$\widetilde{u}_S(n, y) = a_n e^{ny} + b_n e^{-ny} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{h}{n^3}[1 - (-1)^n].$$

Para que esta función permanezca acotada para $y > 0$, elija $a_n = 0$ para $n = 1, 2, \ldots$. Entonces

$$\widetilde{u}_S(n, y) = b_n e^{-ny} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{h}{n^3}[1 - (-1)^n].$$

Para resolver b_n, aplique la transformada de la condición $u(x, 0) = 0$ para obtener

$$0 = \widetilde{u}_S(n, 0) = b_n + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{h}{n^3}[1 - (-1)^n].$$

Entonces

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{h}{n^3}[1 - (-1)^n].$$

Tiene, por tanto

$$\begin{aligned}\widetilde{u}_S(n, y) &= \left[\frac{(-1)^n}{n} - \frac{h}{n^3}[1 - (-1)^n]\right]e^{-ny} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{h}{n^3}[1 - (-1)^n] \\ &= \left[\frac{(-1)^n}{n} - \frac{h}{n^3}[1 - (-1)^n]\right](e^{-ny} - 1).\end{aligned}$$

Por la fórmula de inversión, estos son los coeficientes en la serie de Fourier en senos (en x) de la solución, así la solución es

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n} - \frac{h}{n^3}[1 - (-1)^n]\right](e^{-ny} - 1)\,\mathrm{sen}(nx).$$

SECCIÓN 7.5 PROBLEMAS

1. Escriba una solución integral para el problema de Dirichlet para el semiplano superior si los valores en la frontera son

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } -4 \le x < 0 \\ 1 & \text{para } 0 \le x \le 4 \\ 0 & \text{para } |x| > 4 \end{cases}.$$

2. Escriba una solución integral para el problema de Dirichlet para el semiplano superior si el valor en la frontera es $f(x) = e^{-|x|}$.

3. Escriba una solución integral para el problema de Dirichlet para el primer cuadrante si

$$u(x, 0) = e^{-x}\cos(x) \quad \text{para } x > 0,$$

y

$$u(0, y) = 0 \quad \text{para } y > 0.$$

4. Escriba una solución integral para el problema de Dirichlet para el primer cuadrante si

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{para } x > 0$$

y

$$u(0, y) = g(y) \quad \text{para } y > 0.$$

Obtenga la solución primero usando la separación de las variables, y después usando una transformada de Fourier adecuada.

5. Escriba una solución integral para el problema de Dirichlet para el primer cuadrante si

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{para } x > 0$$

y

$$u(0, y) = g(y) \quad \text{para } y > 0.$$

6. Escriba la solución integral para el problema de Dirichlet para el semiplano inferior $y < 0$.

7. Resuelva el problema del potencial electrostático para la banda $0 < x < \pi$, $y > 0$ con los valores en la frontera

$$u(0, y) = 0,\ u(\pi, y) = 0 \quad \text{para } y > 0,$$
$$u(x, 0) = B\,\mathrm{sen}(x) \quad \text{para } 0 < x < \pi.$$

Aquí B es una constante positiva.

8. Resuelva el problema del potencial electrostático para la banda $-\infty < x < \infty$, $0 < y < 1$ si

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{para } x < 0$$

y

$$u(x, 0) = e^{-\alpha x} \quad \text{para } x > 0,$$

con α un número positivo.

9. Resuelva el problema de Dirichlet para la banda $0 < x < \pi$, $y > 0$ si

$$u(0, y) = 0 \quad \text{y} \quad u(\pi, y) = 2 \quad \text{para } y > 0$$

y

$$u(x, 0) = -4 \quad \text{para } 0 < x < \pi.$$

10. Resuelva el siguiente problema, en donde los datos en la frontera son una mezcla de valores de la función y los valores de una derivada parcial de la función:

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{para } 0 < x < \pi,\ 0 < y < 2,$$

$$u(0, y) = 0$$

y

$$u(\pi, y) = 4 \quad \text{para } 0 < y < 2,$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = u(x, 2) = 0 \quad \text{para } 0 < x < \pi.$$

11. Encuentre la distribución de temperatura en estado estacionario en una placa plana, homogénea, finita que se extiende en el primer cuadrante $x \geq 0$, $y \geq 0$ si la temperatura en y en el lado vertical es e^{-y} y la temperatura en el lado horizontal es cero.

12. Encuentre la distribución de temperatura en estado estacionario en una placa plana, homogénea, infinita que cubre el semiplano $x \geq 0$ si la temperatura en la frontera $x = 0$ es $f(y)$, donde

$$f(y) = \begin{cases} 1 & \text{para } |y| \leq 1 \\ 0 & \text{para } |y| > 1 \end{cases}.$$

13. Encuentre la distribución de temperatura en estado estacionario en una placa plana, homogénea, infinita que cubre el semiplano $y \geq 0$ si la temperatura en la frontera $y = 0$ es cero para $x < 4$, la constante A para $4 \leq x \leq 8$, y cero para $x > 8$.

14. Escriba una expresión general para la distribución de temperatura en estado estacionario en una placa plana, homogénea, finita que cubre la banda $0 \leq y \leq 1$, $x \geq 0$ si la temperatura en la frontera izquierda y el lado inferior son cero y la temperatura en la parte superior de la frontera es $f(x)$.

7.6 El problema de Dirichlet para un cubo

Ilustrará el problema de Dirichlet en el espacio de tres dimensiones. Considere:

$$\nabla^2 u(x, y, z) = 0 \quad \text{para } 0 < x < A, 0 < y < B, 0 < z < C,$$

$$u(x, y, 0) = u(x, y, C) = 0,$$

$$u(0, y, z) = u(A, y, z) = 0,$$

$$u(x, 0, z) = 0, \quad u(x, B, z) = f(x, z).$$

Busque una función que sea armónica en el cubo (el cual puede tener lados de distintas longitudes), y cero en cinco lados, pero con los valores prescritos $f(x, z)$ en el sexto lado.

Sea $u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ para obtener

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z} = -\lambda,$$

y entonces, después de una segunda separación,

$$\frac{Z''}{Z} = \lambda - \frac{Y''}{Y} = -\mu.$$

Entonces

$$X'' + \lambda X = 0,\ Z'' + \mu Z = 0 \quad \text{y} \quad Y'' - (\lambda + \mu)Y = 0.$$

A partir de las condiciones en la frontera,

$$X(0) = X(A) = 0,$$

$$Z(0) = Z(C) = 0,$$

y

$$Y(0) = 0.$$

Los problemas para X y Z son familiares, y obtiene los valores y funciones propios:

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{A^2}, \quad X_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{A}\right),$$

y

$$\mu_m = \frac{m^2\pi^2}{C^2}; \qquad Z_m(z) = \text{sen}\left(\frac{m\pi z}{C}\right),$$

con n y m variando independientemente sobre los enteros positivos.

La ecuación diferencial para $Y(y)$ se convierte en

$$Y'' - \left(\frac{n^2\pi^2}{A^2} + \frac{m^2\pi^2}{C^2}\right)Y = 0; \qquad Y(0) = 0.$$

Ésta tiene soluciones que son múltiplos constantes de $\text{senh}(\beta_{nm}y)$, donde

$$\beta_{nm} = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{A^2} + \frac{m^2\pi^2}{C^2}}.$$

Para cada entero positivo n y m, ahora tiene una función

$$u_{nm}(x, y, z) = c_{nm}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{A}\right)\text{sen}\left(\frac{m\pi z}{C}\right)\text{senh}(\beta_{nm}y),$$

que satisface la ecuación de Laplace y las condiciones cero en la frontera dadas en cinco de las caras del cubo. Para satisfacer la condición en la sexta cara, generalmente debe usar una superposición

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{A}\right)\text{sen}\left(\frac{m\pi z}{C}\right)\text{senh}(\beta_{nm}y).$$

Ahora debe elegir los coeficientes de manera que

$$u(x, B, z) = f(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{A}\right)\text{sen}\left(\frac{m\pi z}{C}\right)\text{senh}(\beta_{nm}B).$$

Ha encontrado previamente esta clase de desarrollos dobles de Fourier en senos, en el tratamiento de vibraciones en una membrana elástica, rectangular y fija a un marco. A partir de esa experiencia, puede escribir

$$c_{nm} = \frac{4}{AC\,\text{senh}(\beta_{nm}B)}\int_0^A\int_0^C f(\xi, \zeta)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{A}\right)\text{sen}\left(\frac{m\pi\zeta}{C}\right)d\zeta\,d\xi.$$

Como es usual, si hay más de una cara con valores distintos de cero, entonces divida el problema de Dirichlet en una suma de problemas, en cada uno de los cuales hay sólo una cara con valores distintos de cero.

SECCIÓN 7.6 PROBLEMAS

1. Resuelva

$\nabla^2 u(x, y, z) = 0$ para $0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1$,

$u(x, y, 0) = u(x, 1, z) = 0$,

$u(0, y, z) = u(1, y, z) = 0$,

$u(x, 0, z) = 0, u(x, y, 1) = xy$.

2. Resuelva

$\nabla^2 u(x, y, z) = 0$ para $0 < x < 2\pi, 0 < y < 2\pi, 0 < z < 1$,

$u(x, y, 0) = u(x, y, 1) = 0$,

$u(0, y, z) = 0$,

$u(x, 0, z) = 0, u(x, 2\pi, z) = 0$,

$u(2\pi, y, z) = z$

3. $\nabla^2 u(x, y, z) = 0$ para $0 < x < 1, 0 < y < 2\pi, 0 < z < \pi$,

$u(x, y, 0) = 0, u(x, y, \pi) = u(\pi - x)y(\pi - y)$,

$u(0, y, z) = u(1, y, z) = 0$,

$u(x, 0, z) = u(x, y, 0) = 0$,

$u(x, y, \pi) = 1, u(x, 2\pi, z) = 2$.

4. $\nabla^2 u(x, y, z) = 0$ para $0 < x < 1, 0 < y < 2, 0 < z < \pi$,

$u(x, y, 0) = x^2(1 - x)y(2 - y), u(x, y, \pi) = 0$,

$u(0, y, z) = 0, u(1, y, z) = \text{sen}(\pi y)\text{sen}(z)$,

$u(x, 0, z) = 0, u(x, 2, z) = 0$

7.7 La ecuación de calor en estado estacionario para una esfera sólida

Considere una esfera sólida de radio R, centrada en el origen. Busque resolver para la distribución de temperatura en estado estacionario, dada la temperatura en la superficie en todo tiempo.

En el caso de estado estacionario, $\partial u/\partial t = 0$ y la ecuación de calor es la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$. Use coordenadas esféricas (ρ, θ, φ), en donde ρ es la distancia desde el origen a (x, y, z), θ es el ángulo polar entre el eje x positivo y la proyección en el plano xy de la recta que va del origen a (x, y, z), y φ es el ángulo de declinación desde el eje z positivo a esta recta (figura 7.5). También suponga la simetría alrededor del eje z, así u es una función solamente de ρ y φ. Entonces $\partial u/\partial \theta = 0$, y la ecuación de Laplace se vuelve

$$\nabla^2 u(\rho, \varphi) = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot(\varphi)}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0.$$

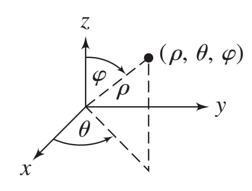


FIGURA 7.5
Coordenadas esféricas.

La temperatura en la superficie es

$$u(R, \varphi) = f(\varphi).$$

Para separar las variables en la ecuación diferencial, sea $u(\rho, \varphi) = X(\rho)\Phi(\varphi)$ para obtener

$$X''\Phi + \frac{2}{\rho}X'\Phi + \frac{1}{\rho^2}X\Phi'' + \frac{\cot(\varphi)}{\rho^2}X\Phi' = 0.$$

Entonces

$$\frac{\Phi''}{\Phi} + \cot(\varphi)\frac{\Phi'}{\Phi} = -\rho^2\frac{X''}{X} - 2\rho\frac{X'}{X} = -\lambda.$$

Después

$$\rho^2 X'' + 2\rho X' - \lambda X = 0 \quad \text{y} \quad \Phi'' + \cot(\varphi)\Phi' + \lambda\Phi = 0.$$

La ecuación diferencial para Φ puede escribirse

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(\varphi)}[\Phi' \operatorname{sen}(\varphi)]' + \lambda\Phi = 0. \tag{7.4}$$

Cambie variables haciendo

$$x = \cos(\varphi).$$

Entonces $\varphi = \arccos(x)$. Sea

$$G(x) = \Phi(\arccos(x)).$$

Como $0 \leq \varphi \leq \pi$, entonces $-1 \leq x \leq 1$. Calcule

$$\begin{aligned}
\Phi'(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi) &= \operatorname{sen}(\varphi)\frac{d\Phi}{dx}\frac{dx}{d\varphi} \\
&= \operatorname{sen}(\varphi)G'(x)[-\operatorname{sen}(\varphi)] \\
&= -\operatorname{sen}^2(\varphi)G'(x) = -[1 - \cos^2(\varphi)]G'(x) \\
&= -(1 - x^2)G'(x).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varphi}[\Phi'(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi)] &= -\frac{d}{d\varphi}[(1 - x^2)G'(x)] \\
&= -\frac{d}{dx}[(1 - x^2)G'(x)]\frac{dx}{d\varphi} \\
&= -\frac{d}{dx}[(1 - x^2)G'(x)](-\operatorname{sen}(\varphi)).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(\varphi)}\frac{d}{d\varphi}[\Phi'(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi)] = \frac{d}{dx}[(1 - x^2)G'(x)],$$

y la ecuación (7.4) se transforma en

$$[(1 - x^2)G'(x)]' + \lambda G(x) = 0.$$

Esta es la ecuación diferencial de Legendre (sección 4.1). Para las soluciones acotadas, elija $\lambda = n(n+1)$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Estos son los valores propios de este problema. Las funciones propias son múltiplos constantes distintos de cero de los polinomios de Legendre $P_n(x)$.

Para $n = 0, 1, 2, \ldots,$ ahora tiene la solución de la ecuación diferencial para Φ:

$$\Phi_n(\varphi) = G(\cos(\varphi)) = P_n(\cos(\varphi)).$$

Ahora que conoce los valores admisibles para λ, la ecuación diferencial para X se vuelve

$$\rho^2 X'' + 2\rho X' - n(n+1)X = 0.$$

Esta es una ecuación diferencial de Euler de segundo orden, con solución general

$$X(\rho) = a\rho^n + b\rho^{-n-1}.$$

Debe elegir $b = 0$ para tener una solución acotada en el centro de la esfera, ya que $\rho^{-n-1} \to \infty$ conforme $\rho \to 0+$. Así

$$X_n(\rho) = a_n \rho^n.$$

Para cada entero no negativo n, tiene ahora una función

$$u_n(\rho, \varphi) = a_n \rho^n P_n(\cos(\varphi))$$

que satisface la ecuación de Laplace. Para satisfacer las condiciones en la frontera, escriba una superposición de estas funciones:

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n P_n(\cos(\varphi)).$$

Debe elegir los coeficientes para que satisfagan

$$u(R, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(\cos(\varphi)) = f(\varphi).$$

Para poner esto en el contexto de los desarrollos de Fourier-Legendre, sea $\varphi = \arccos(x)$ para escribir

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(x) = f(\arccos(x)).$$

Ésta es una serie de Fourier-Legendre para la función conocida $f(\arccos(x))$. De la sección 4.1.5, los coeficientes son

$$a_n R^n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(\arccos(x)) P_n(x)\, dx,$$

o

$$a_n = \frac{2n+1}{2R^n} \int_{-1}^{1} f(\arccos(x)) P_n(x)\, dx.$$

La distribución de temperatura en estado estacionario es

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \left(\int_{-1}^{1} f(\arccos(x)) P_n(x)\, dx \right) \left(\frac{\rho}{R} \right)^n P_n(\cos(\varphi)).$$

EJEMPLO 7.7

Considere esta solución en un caso específico, con $f(\varphi) = \varphi$. Ahora

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \left(\int_{-1}^{1} \arccos(x) P_n(x)\, dx \right) \left(\frac{\rho}{R} \right)^n P_n(\cos(\varphi)).$$

Determinará algunos de estos coeficientes aproximando las integrales. De la sección 4.1, los primeros seis polinomios de Legendre son

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

Aproxime:

$$\int_{-1}^{1} \arccos(x)\, dx \approx \pi, \int_{-1}^{1} x \arccos(x)\, dx \approx -0.7854,$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \arccos(x)\, dx = 0,$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \arccos(x)\, dx \approx -4.9087 \times 10^{-2}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \arccos(x)\, dx = 0,$$

y

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \arccos(x)\, dx \approx -1.2272 \times 10^{-2}.$$

Tome los primeros seis términos de la serie como una aproximación de la solución, obtiene

$$u(\rho, \varphi) \approx \frac{1}{2}\pi - \frac{3}{2}(0.7854)\frac{\rho}{R}\cos(\varphi) - \frac{7}{2}(0.049087)\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{R}\right)^3 \left(5\cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi)\right)$$

$$- \frac{11}{2}(0.012272)\left(\frac{\rho}{R}\right)^5 \frac{1}{8}\left(63\cos^5(\varphi) - 70\cos^3(\varphi) + 15\cos(\varphi)\right).$$

Algunos de estos términos pueden ser combinados, pero se han escrito todos ellos para indicar cómo aparecen. ■

Regresará nuevamente al problema de Dirichlet cuando se trate de análisis complejos. Ahí estará en posición de explotar los mapeos conformes. La idea será mapear la región de interés de cierta manera al disco unitario. Como puede resolver el problema de Dirichlet para el disco (esto es, sabe una fórmula para la solución), éste mapea el problema original en un problema que puede resolver. Entonces, intentará invertir el mapeo para transformar la solución para el disco en la solución para la región original.

Concluirá este capítulo con una breve discusión del problema de Neumann.

SECCIÓN 7.7 PROBLEMAS

1. Escriba la solución para la distribución de temperatura en estado estacionario en la esfera si los valores iniciales están dados por $f(\varphi) = A\varphi^2$, en donde A es una constante positiva. Haga una aproximación a la integración para obtener el coeficiente y escriba (calcule) los primeros seis términos de la solución en serie.

2. Lleve a cabo el programa del problema 1 para la función de valores iniciales $f(\varphi) = \text{sen}(\varphi)$ para $0 \leq \varphi \leq \pi$.

3. Lleve a cabo el programa del problema 1 para la función de valores iniciales $f(\varphi) = \varphi^3$.

4. Lleve a cabo el programa del problema 1 para la función de valores iniciales $f(\varphi) = 2 - \varphi^2$.

5. Resuelva para la distribución de temperatura en estado estacionario en una esfera agujereada, dada en coordenadas esféricas por $R_1 \leq \rho \leq R_2$. La superficie interior $\rho = R_1$ se mantiene a temperatura constante T_1, mientras que la superficie exterior $\rho = R_2$ se mantiene a temperatura cero. Suponga que la distribución de temperatura es una función únicamente de ρ y φ.

6. Aproxime la solución del problema 5 escribiendo los primeros seis términos de la solución en serie, llevando a cabo cualquier integración requerida por un método numérico.

7. Resuelva para la distribución de temperatura en estado estacionario en un hemisferio cerrado sólido, el cual en coordenadas esféricas está dado por $0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. El disco base se mantiene a temperatura cero y la superficie hemisférica a temperatura constante A. Suponga que la distribución es independiente de θ.

8. Rehaga el problema 7, pero ahora la base está aislada en lugar de mantenerse a temperatura cero.

9. Rehaga el problema 7 para el caso en que la temperatura en la superficie hemisférica es $u(R, \varphi) = f(\varphi)$, no necesariamente constante.

7.8 El problema de Neumann

El problema de Neumann en el plano consiste en encontrar una función que sea armónica en una región dada D y cuya derivada normal en la frontera de la región está dada. Este problema tiene la forma

$$\nabla^2 u(x, y) = 0 \quad \text{para } (x, y) \text{ en } D,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = g(x, y) \quad \text{para } (x, y) \text{ en } \partial D,$$

donde, como es usual, ∂D denota la frontera de D. Esta frontera frecuentemente es una curva suave a pedazos en el plano (pero no necesariamente una curva cerrada). La derivada normal está definida por

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \mathbf{n},$$

el producto punto del gradiente de u con la normal unitaria exterior a la curva (figura 7.6). Si está normal es $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j}$, entonces $\partial u/\partial n$ es

$$\frac{\partial u}{\partial n} = n_1\frac{\partial u}{\partial x} + n_2\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Use el siguiente.

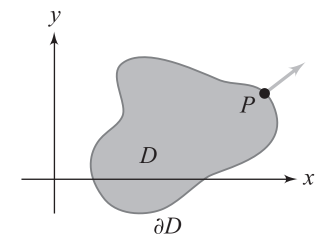


FIGURA 7.6 *Normal exterior* $\mathbf{n}$ *en un punto en* ∂D.

LEMA 7.1 ***Primera identidad de Green***

Sea D una región acotada en el plano cuya frontera ∂D es una curva cerrada suave a pedazos. Sean k y h continuas con primera y segunda derivadas parciales continuas en D y su frontera. Entonces

$$\oint_{\partial D} k\frac{\partial h}{\partial n}\,ds = \iint_D (k\nabla^2 h + \nabla k \cdot \nabla h)\,dA. \blacksquare$$

En esta integral de línea, ds denota la integración respecto a la longitud de arco a lo largo de la curva que acota D.

Prueba Por el teorema de Green escriba

$$\oint_{\partial D} k\frac{\partial h}{\partial n}\,ds = \oint_{\partial D} (k\nabla h)\cdot \mathbf{n}\,ds = \iint_D div\,(k\nabla h)\;dA.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} div(k\nabla h) &= div\left(k\frac{\partial h}{\partial x}\mathbf{i} + k\frac{\partial h}{\partial y}\mathbf{j}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial h}{\partial y}\right) \\ &= k\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y} \\ &= k\nabla^2 h + \nabla k \cdot \nabla h. \blacksquare \end{aligned}$$

Use este resultado como sigue. Si $k = 1$ y $h = u$, una función armónica en D, entonces la integral doble es cero ya que su integrando se hace cero y la integral de línea es sólo la integral de línea de la derivada normal de u sobre la frontera de la región. Pero en ∂D, $\partial u/\partial n = g$, una función dada. Concluya que

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n}\,ds = \oint_{\partial D} g\,ds = 0.$$

Esto significa que una condición necesaria para que el problema de Neumann tenga solución, es que la integral de la derivada normal dada alrededor de la frontera de la región sea cero. Esta conclusión puede ser extendida al caso que ∂D no sea una curva cerrada. Por ejemplo, la frontera del semiplano superior es el eje horizontal, el cual no es una curva cerrada.

EJEMPLO 7.8

Resuelva el problema de Neumann para un cuadrado:

$$\nabla^2 u(x, y) = 0 \quad \text{para } 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1,$$

sujeto a

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

en el lado izquierdo y en los lados superior e inferior, mientras

$$\frac{\partial u}{\partial n}(1, y) = y^2 \quad \text{para } 0 \le y \le 1.$$

Como

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \int_0^1 y^2\, dy = \frac{1}{3} \neq 0,$$

este problema no tiene solución. ■

La existencia también puede ser una pregunta para el problema de Dirichlet. Sin embargo, para un problema de Dirichlet, si la función dada en la frontera es bien portada (por ejemplo, continua) y la región es "simple" (tal como un disco, rectángulo, semiplano), entonces el problema de Dirichlet tiene una solución. Para los problemas de Neumann, aun para regiones sencillas y aparentemente con valores para la derivada normal con buen comportamiento, puede no haber solución si la integral de la función de valores alrededor de la frontera no es cero.

Resolverá ahora dos problemas de Neumann para ilustrar lo que está involucrado.

7.8.1 El problema de Neumann para un rectángulo

Considere el problema

$$\nabla^2 u(x, y) = 0 \quad \text{para } 0 < x < a, 0 < y < b,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, b) = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq a,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0 \quad \text{para } 0 \leq y \leq b,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = g(y) \quad \text{para } 0 \leq y \leq b.$$

Para el rectángulo, la derivada normal es $\partial u/\partial x$ en los lados verticales, y $\partial u/\partial y$ en los lados horizontales. Como una condición necesaria (pero no suficiente) para la existencia de una solución, se pide que

$$\int_0^b g(y)\, dy = 0.$$

Este ejemplo aclarará por qué puede no haber solución sin esta condición.

Sea $u(x, y) = X(x)Y(y)$ y obtiene

$$X'' + \lambda X = 0, \quad Y'' - \lambda Y = 0.$$

Ahora

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = X(x)Y'(0) = 0$$

implica que $Y'(0) = 0$. Análogamente,

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, b) = X(x)Y'(b) = 0$$

implica que $Y'(b) = 0$. El problema para Y es

$$Y'' - \lambda Y = 0; \qquad Y'(0) = Y'(b) = 0.$$

Esta ecuación de Sturm-Liouville familiar tiene valores y funciones propios

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{b^2} \quad \text{y} \quad Y_n(y) = \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$

Ahora el problema para X es

$$X'' - \frac{n^2\pi^2}{b^2}X = 0.$$

Más aún,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = X'(0)Y(y) = 0$$

implica que $X'(0) = 0$.

Para $n = 0$, la ecuación diferencial para X es sólo $X'' = 0$, de donde $X(x) = cx + d$. Entonces $X'(0) = c = 0$, así en este caso $X(x) =$ constante.

Si n es un entero positivo, entonces la ecuación diferencial para X tiene solución general

$$X(x) = ce^{n\pi x/b} + de^{-n\pi x/b}.$$

Ahora

$$X'(0) = \frac{n\pi}{b}c - \frac{n\pi}{b}d = 0$$

implica que $c = d$. Esto nos da

$$X_n(x) = \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right).$$

Ahora tiene las funciones

$$u_0(x, y) = \text{constante}$$

y, para cada entero positivo n,

$$u_n(x, y) = c_n \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Para satisfacer la última condición en la frontera (en el lado derecho del rectángulo), use una superposición

$$u(x, y) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Necesita

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} c_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right),$$

un desarrollo de Fourier en cosenos de $g(y)$ en $[0, b]$. Observe que el término constante en este desarrollo de $g(y)$ es cero. Este término constante es

$$\frac{1}{b}\int_0^b g(y)\,dy,$$

que debe suponer cero. Si esta integral no es cero, entonces el desarrollo en cosenos de $g(y)$ tendría un término constante distinto de cero, contradiciendo el hecho que no lo tiene. En este caso este problema de Neumann no tendrá solución.

Para los otros coeficientes en la serie en cosenos, tiene

$$\frac{n\pi}{b} c_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right) = \frac{2}{b}\int_0^b g(\xi)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{b}\right)d\xi,$$

así

$$c_n = \frac{2}{n\pi \operatorname{senh}(n\pi a/b)}\int_0^b g(\xi)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{b}\right)d\xi.$$

Con esta elección de los coeficientes, la solución de este problema de Neumann es

$$u(x, y) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

El número c_0 es indeterminado y permanece arbitrario. Esto se debe a que los problemas de Neumann no tienen soluciones únicas. Si u es cualquier solución de un problema de Neumann, también lo es $u + c$ para cualquier constante c, debido a que la condición en la frontera está en la derivada normal y c se anula en esta diferenciación.

7.8.2 El problema de Neumann para un disco

Resuelva el problema de Neumann para un disco de radio R centrado en el origen. En coordenadas polares, el problema es

$$\nabla^2 u(r, \theta) = 0 \quad \text{para } 0 \le r < R, -\pi \le \theta \le \pi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(R, \theta) = f(\theta) \quad \text{para } -\pi \le \theta \le \pi.$$

La derivada normal aquí es $\partial/\partial r$, ya que la recta del origen a un punto en este círculo está en la dirección del vector normal exterior al círculo en ese punto.

Una condición necesaria para la existencia de una solución es que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta = 0,$$

y suponga que f satisface esta condición.

Como hizo con el problema de Dirichlet para un disco, intente una solución

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \cos(n\theta) + b_n r^n \operatorname{sen}(n\theta).$$

Necesita

$$\frac{\partial u}{\partial r}(R, \theta) = f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n R^{n-1} \cos(n\theta) + n b_n R^{n-1} \operatorname{sen}(n\theta).$$

Este es un desarrollo de Fourier de $f(\theta)$ en $[-\pi, \pi]$. El término constante en este desarrollo es

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta,$$

y debe ser cero ya que esta serie de Fourier para $(\partial u/\partial r)(R, \theta)$ tiene un término constante cero. La suposición de que esta integral es cero es por tanto consistente con esta condición en la frontera.

Para los otros coeficientes, necesita

$$n a_n R^{n-1} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\cos(n\xi)\, d\xi$$

y

$$n a_n R^{n-1} b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\operatorname{sen}(n\xi)\, d\xi.$$

Así elija

$$a_n = \frac{1}{n\pi R^{n-1}}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\cos(n\xi)\, d\xi$$

y

$$b_n = \frac{1}{n\pi R^{n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \operatorname{sen}(n\xi)\, d\xi.$$

Insertando estos coeficientes, la solución es

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2}a_0 + \frac{R}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n\xi)\cos(n\theta) + \operatorname{sen}(n\xi)\operatorname{sen}(n\theta)] f(\xi)\, d\xi.$$

También puede escribir esta solución como

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2}a_0 + \frac{R}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n(\xi - \theta)) f(\xi)\, d\xi.$$

El término $a_0/2$ es una constante arbitraria. El factor de 1/2 en esta constante arbitraria es sólo costumbre.

EJEMPLO 7.9

Resolver el problema de Neumann

$$\nabla^2 u(x, y) = 0 \quad \text{para } x^2 + y^2 < 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = xy^2 \quad \text{para } x^2 + y^2 = 1.$$

Cambie a coordenadas polares, haciendo $u(r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta)) = U(r, \theta)$. Entonces

$$\nabla^2 U(r, \theta) = 0 \quad \text{para } 0 \le r < 1, -\pi \le \theta \le \pi,$$

$$\frac{\partial U}{\partial r}(1, \theta) = \cos(\theta)\operatorname{sen}^2(\theta).$$

Primero calcule

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta)\operatorname{sen}^2(\theta)\, d\theta = 0,$$

así vale la pena intentar resolver este problema. Escriba la solución

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (r)^n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n(\xi - \theta))\cos(\xi)\operatorname{sen}^2(\xi)\, d\xi.$$

Evalúe

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n(\xi - \theta))\cos(\xi)\operatorname{sen}^2(\xi)\, d\xi = \begin{cases} 0 & \text{para } n = 2, 4, 5, 6, \ldots \\ \dfrac{\pi\cos(\theta)}{4} & \text{si } n = 1 \\ -\pi\cos^3(\theta) + \dfrac{3\pi\cos(\theta)}{4} & \text{si } n = 3 \end{cases}.$$

La solución es, por tanto

$$\begin{aligned} U(r, \theta) &= \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{4}r\cos(\theta) + \frac{1}{3}r^3\left(-\cos^3(\theta) + \frac{3}{4}\cos(\theta)\right) \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{4}r\cos(\theta) - \frac{1}{3}r^3\cos^3(\theta) + \frac{1}{4}r^3\cos(\theta). \end{aligned}$$

Para obtener la solución en coordenadas rectangulares, use $x = r\cos(\theta)$ y $r^2 = x^2 + y^2$ para escribir

$$u(x, y) = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x(x^2 + y^2). \quad ■$$

Nuevamente, la solución tiene una constante arbitraria, que está escrita con un factor de $\frac{1}{2}$ debido simplemente a que inició con una serie de Fourier y la constante a menudo se llama $a_0/2$.

7.8.3 El problema de Neumann para el semiplano superior

Como una ilustración de un problema de Neumann para un dominio no acotado, considere:

$$\nabla^2 u(x, y) = 0 \quad \text{para } -\infty < x < \infty, y > 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = f(x) \quad \text{para } -\infty < x < \infty.$$

La frontera de la región es el eje real, y $\partial/\partial y$ es la derivada normal de esta recta.

Requiere que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0$ como una condición necesaria para que exista una solución.

Hay una manera elegante de reducir este problema a uno que ya ha resuelto. Sea $v = \partial u/\partial y$. Entonces

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0,$$

de manera que v es armónica siempre que u lo sea. Más aún

$$v(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = f(x) \quad \text{para } -\infty < x < \infty.$$

Por tanto v es la solución de un problema de Dirichlet para el semiplano superior. Pero conoce la solución de este problema:

$$v(x, y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{y^2 + (\xi - x)^2}\, d\xi.$$

Ahora recupere u de v por integración: Dentro de una constante arbitraria,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int \frac{\partial u}{\partial y}\, dy = \int \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{y^2 + (\xi - x)^2}\, d\xi dy \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int \frac{y}{y^2 + (\xi - x)^2}\, dy\right) f(\xi)\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln(y^2 + (\xi - x)^2) f(\xi)\, d\xi + c, \end{aligned}$$

en donde c es una constante arbitraria. Esto da la solución del problema de Neumann para el semiplano superior.

SECCIÓN 7.8 PROBLEMAS

1. Resuelva

$$\nabla^2 u(x, y) = 0 \quad \text{para } 0 < x < 1, 0 < y < 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 4\cos(\pi x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = 0 \quad \text{para } 0 \le x \le 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 0 \quad \text{para } 0 \le y \le 1.$$

2. Resuelva

$$\nabla^2 u(x, y) = 0 \quad \text{para } 0 < x < 1, 0 < y < \pi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, \pi) = 0 \quad \text{para } 0 \le x \le 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = y - \frac{\pi}{2} \quad \text{para } 0 \le y \le \pi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = \cos(y) \quad \text{para } 0 \le y \le \pi.$$

3. Resuelva

$$\nabla^2 u(x, y) = 0 \quad \text{para } 0 < x < \pi, 0 < y < \pi,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \cos(3x),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, \pi) = 6x - 3\pi \quad \text{para } 0 \leq x \leq \pi,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0 \quad \text{para } 0 \leq y \leq \pi.$$

4. Use la separación de las variables para resolver el problema con valor mixto en la frontera

$$\nabla^2 u(x, y) = 0 \quad \text{para } 0 < x < \pi, 0 < y < \pi,$$
$$u(x, 0) = f(x), u(x, \pi) = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq \pi,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0 \quad \text{para } 0 \leq y \leq \pi.$$

¿Tiene este problema una solución única?

5. Intente una separación de las variables para resolver

$$\nabla^2 u(x, y) = 0 \quad \text{para } 0 < x < 1, 0 < y < 1,$$
$$u(x, 0) = u(x, 1) = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 3y^2 - 2y,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 0 \quad \text{para } 0 \leq y \leq 1.$$

6. Escriba una solución en serie para

$$\nabla^2 u(r, \theta) = 0 \quad \text{para } 0 \leq r < R, -\pi \leq \theta \leq \pi,$$
$$\frac{\partial u}{\partial r}(R, \theta) = \text{sen}(3\theta) \quad \text{para } -\pi \leq \theta \leq \pi.$$

7. Escriba una solución para

$$\nabla^2 u(r, \theta) = 0 \quad \text{para } 0 \leq r < R, -\pi \leq \theta \leq \pi,$$
$$\frac{\partial u}{\partial r}(R, \theta) = \cos(2\theta) \quad \text{para } -\pi \leq \theta \leq \pi.$$

8. Resuelva el siguiente problema de Neumann para el semiplano superior:

$$\nabla^2 u(x, y) = 0 \quad \text{para } -\infty < x < \infty, y > 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = xe^{-|x|} \quad \text{para } -\infty < x < \infty.$$

9. Resuelva el siguiente problema de Neumann para el semiplano superior:

$$\nabla^2 u(x, y) = 0 \quad \text{para } -\infty < x < \infty, y > 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = e^{-|x|}\,\text{sen}(x) \quad \text{para } -\infty < x < \infty.$$

10. Resuelva el siguiente problema de Neumann para el semiplano inferior:

$$\nabla^2 u(x, y) = 0 \quad \text{para } -\infty < x < \infty, y < 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = f(x) \quad \text{para } -\infty < x < \infty.$$

11. Resuelva el siguiente problema de Neumann para el primer cuadrante:

$$\nabla^2 u(x, y) = 0 \quad \text{para } x > 0, y > 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0 \quad \text{para } y \geq 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = f(x) \quad \text{para } 0 \leq x < \infty.$$

12. Resuelva el siguiente problema mixto:

$$\nabla^2 u(x, y) = 0 \quad \text{para } x > 0, y > 0,$$
$$u(0, y) = 0 \quad \text{para } y \geq 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = f(x) \quad \text{para } 0 \leq x < \infty.$$

CAPÍTULO 8

NÚMEROS COMPLEJOS MAGNITUD Y CONJUGADO DESIGUALDADES ORDENANDO LUGARES GEOMÉTRICOS Y CONJUNTOS DE PUNTOS

Geometría y aritmética de los números complejos

8.1 Los números complejos

Un *número complejo* es un símbolo de la forma $x + iy$ o $x + yi$, en donde x y y son números reales e $i^2 = -1$. La aritmética de los números complejos está definida por

$$\text{igualdad: } a + ib = c + id \text{ exactamente cuando } a = c \text{ y } b = d,$$

$$\text{suma: } (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

y

$$\text{multiplicación: } (a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + bc).$$

En la multiplicación de números complejos, proceda exactamente como lo haría con los polinomios de primer grado $a + bx$ y $c + dx$, pero con i en lugar de x:

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac - bd + (ad + bc)i\end{aligned}$$

ya que $i^2 = -1$. Por ejemplo,

$$(6 - 4i)(8 + 13i) = (6)(8) - (-4)(13) + i[(6)(13) + (-4)(8)] = 100 + 46i.$$

El número real a se llama la parte real de $a + bi$ y es denotado $\text{Re}(a + bi)$. El número real b es la parte imaginaria, denotado $\text{Im}(a + bi)$. Por ejemplo,

$$\text{Re}(-23 + 7\text{i}) = -23 \text{ y } \text{Im}(-23 + 7i) = 7.$$

Tanto la parte real como la imaginaria de cualquier número complejo son números reales.

Piense al sistema de los números complejos como una extensión del sistema de los números reales en el sentido que todo número real a es el número complejo $a + 0i$. Esta extensión de los números reales a los complejos tiene consecuencias profundas, tanto para el álgebra como para el análisis. Por ejemplo, la ecuación polinomial $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución real, pero tiene dos soluciones complejas, i y $-i$. En general, el teorema fundamental del álgebra establece que todo polinomio de grado positivo n, con coefi-

cientes complejos (algunos o todos pueden ser reales), tiene exactamente n raíces en los números complejos, contando las raíces repetidas. Esto significa que no necesita extender los números complejos para encontrar las raíces de los polinomios con coeficientes complejos, como sucede con los números reales para encontrar las raíces de un polinomio simple tal como $x^2 + 1$.

La suma compleja obedece a muchas de las reglas de la aritmética de los números reales. Específicamente, para cualesquiera números complejos z, w y u,

$z + w = w + z$ (conmutatividad de la suma)

$zw = wz$ (conmutatividad de la multiplicación)

$z + (w + u) = (z + w) + u$ (asociatividad de la suma)

$z(wu) = (zw)u$ (asociatividad de la multiplicación)

$z(w + u) = zw + zu$ (distributividad)

$z + 0 = 0 + z$

$z \cdot 1 = 1 \cdot z$.

8.1.1 El plano complejo

Los números complejos admiten dos interpretaciones geométricas naturales.

Primera, identifique el número complejo $a + bi$ con el punto (a, b) en el plano, como en la figura 8.1. En esta interpretación, cada número real a, o $a + 0i$, está identificado con el punto $(a, 0)$ en el eje horizontal, el cual es por tanto llamado el *eje real*. Un número $0 + bi$, o sólo bi, se llama un *número imaginario puro* y está asociado con el punto $(0, b)$ en el eje vertical. Este eje se llama el *eje imaginario*. Debido a esta correspondencia entre los números complejos y los puntos en el plano, serán referidos en el plano xy como el *plano complejo*.

Cuando los números complejos aparecieron por primera vez (en la resolución de ecuaciones polinomiales), los matemáticos recelaron de ellos, aun el gran matemático suizo del siglo XVIII, Leonhard Euler, quien los usó en cálculos con habilidad sin precedente, no los reconoció como números "legítimos". Fue el matemático alemán del siglo XIX, Carl Friedrich Gauss, el que apreció plenamente su significado geométrico y utilizó su reputación en la comunidad científica para promover su legitimidad entre otros matemáticos y filósofos naturales.

La segunda interpretación geométrica de los números complejos es en términos de vectores. El número complejo $z = a + bi$, o el punto (a, b), puede pensarse como un vector $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ en el plano, el cual a su vez es representado como una flecha desde el origen a (a, b), como en la figura 8.2. La primera componente de este vector es $\mathrm{Re}(z)$ y la segunda componente es $\mathrm{Im}(z)$. En esta interpretación, la definición de suma de números complejos es equivalente a la ley del paralelogramo para suma de vectores, ya que dos vectores se suman, sumando sus componentes respectivas (figura 8.3).

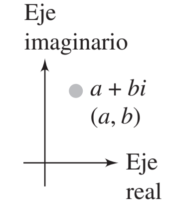


FIGURA 8.1 *El plano complejo.*

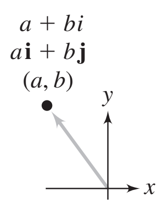


FIGURA 8.2 *Los números complejos como vectores en el plano.*

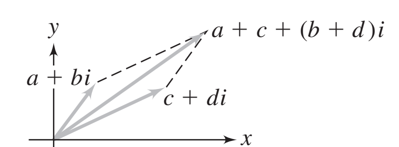


FIGURA 8.3 *La ley del paralelogramo para la suma de números complejos.*

8.1.2 Magnitud y conjugado

DEFINICIÓN 8.1 Magnitud

La magnitud de $a+bi$ es denotada por $|a+bi|$ y está definida por

$$|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Por supuesto, la magnitud de cero es cero. Como sugiere la figura 8.4, si $z = a + ib$ es un número complejo distinto de cero, entonces $|z|$ es la distancia del origen al punto (a, b). Alternativamente, $|z|$ es la longitud del vector $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ representando a z. Por ejemplo,

$$|2-5i| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}.$$

La magnitud de un número complejo también se llama su *módulo*.

DEFINICIÓN 8.2 Conjugado

El complejo conjugado (o sólo conjugado) de $a+bi$ es el número denotado por $\overline{a+bi}$ y definido por

$$\overline{a+bi} = a - bi.$$

Obtiene el conjugado de z cambiando el signo de la parte imaginaria de z. Por ejemplo,

$$\overline{3-8i} = 3+8i, \bar{i} = -i \quad \text{y} \quad \overline{-25} = -25.$$

Esta operación no cambia la parte real de z. Tiene

$$\text{Re}(\overline{a+ib}) = a = \text{Re}(a+ib)$$

y

$$\text{Im}(\overline{a+ib}) = -b = -\text{Im}(a+ib).$$

La operación de conjugar puede ser interpretada como una reflexión sobre el eje real, debido a que el punto $(a, -b)$ asociado con $a - ib$ es la reflexión a través del eje horizontal del punto (a, b) asociado con $a + ib$ (figura 8.5).

Aquí hay algunas reglas computacionales para la magnitud y el conjugado.

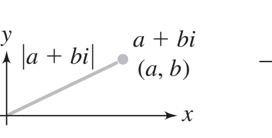


FIGURA 8.4
Magnitud de un número complejo.

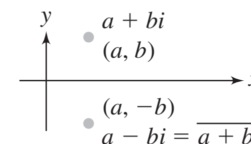


FIGURA 8.5
Conjugado de un número complejo.

TEOREMA 8.1

Sean z y w números complejos. Entonces

1. $\overline{\overline{z}} = z$.
2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
3. $\overline{zw} = (\overline{z})\,(\overline{w})$.
4. $|z| = |\overline{z}|$.
5. $|zw| = |z|\,|w|$.
6. $\text{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ y $\text{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.
7. $|z| \geq 0$ y $|z| = 0$ si, y sólo si $z = 0$.
8. $z\overline{z} = |z|^2$.

Prueba La conclusión (1) establece que conjugar un conjugado regresa al número original. Esto es geométricamente evidente, ya que la reflexión de (x, y) a $(x, -y)$, seguida de la reflexión de $(x, -y)$ a (x, y), regresa al punto original. Para un argumento analítico, escriba

$$\overline{\overline{a + ib}} = \overline{a - ib} = a + ib.$$

Para la conclusión (5), sean $z = a + ib$ y $w = c + id$. Entonces

$$\begin{aligned} |zw| &= |(ac - bd) + i(ad + bc)| \\ &= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 - 2acbd + a^2d^2 + b^2c^2 + 2adbc} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2} = |z|\,|w|\,. \end{aligned}$$

Una demostración mucho más clara de (5) estará disponible cuando conozca la forma polar de un número complejo.

Las otras partes del teorema se dejan al estudiante. ■

8.1.3 División compleja

Suponga que quiere formar el cociente z/w, donde $w \neq 0$. Este cociente es el número complejo u tal que $wu = z$. Sin embargo, esto nos ayuda mucho para encontrar u. He aquí una manera computacional efectiva de realizar la división compleja. Sean $z = a + ib$ y $w = c + id$ y

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{a + ib}{c + id}\frac{c - id}{c - id} = \frac{ac + bd + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}.$$

Multiplicando y dividiendo la fracción original por el conjugado del denominador, obtiene una expresión en la cual las partes real e imaginaria del cociente son evidentes. La razón de esto es que el denominador es $w\overline{w}$, el cual es el número real $|w|^2$.

Por ejemplo,

$$\frac{2 - 7i}{8 + 3i} = \frac{2 - 7i}{8 + 3i}\frac{8 - 3i}{8 - 3i} = \frac{-5 - 62i}{64 + 9} = -\frac{5}{73} - \frac{62}{73}i,$$

así la parte real de este cociente es $-5/73$ y la parte imaginaria es $-62/73$.

8.1.4 Desigualdades

Hay varias desigualdades que tendrá ocasión de usar.

TEOREMA 8.2

Sean z y w números complejos. Entonces

1. $|\text{Re}(z)| \leq |z|$ y $|\text{Im}(z)| \leq |z|$.
2. $|z + w| \leq |z| + |w|$.
3. $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

Prueba Si $z = a + ib$, entonces

$$|\text{Re}(z)| = |a| \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

y

$$|\text{Im}(z)| = |b| \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z| \, .$$

La conclusión (2), que se llama la *desigualdad del triángulo*, se prueba para vectores. He aquí una demostración en el contexto de los números complejos:

$$\begin{aligned} 0 \leq |z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) = (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2 = |z|^2 + 2\,\text{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2\,|z\overline{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2\,|z|\,|\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2\,|z|\,|w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2 \, . \end{aligned}$$

En resumen,

$$0 \leq |z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2 \, .$$

Sacando la raíz cuadrada de estas cantidades no negativas, obtiene la desigualdad del triángulo.

Para (3), use la desigualdad del triángulo para escribir

$$|z| = |(z + w) - w| \leq |z + w| + |w| \, ,$$

así

$$|z| - |w| \leq |z + w| \, .$$

Intercambiando z y w,

$$|w| - |z| \leq |z + w| \, .$$

Por tanto,

$$-\,|z + w| \leq |z| - |w| \leq |z + w| \, ,$$

así

$$||z| - |w|| \leq |z + w| \, . \quad \blacksquare$$

8.1.5 Argumento y forma polar de un número complejo

Sea $z = a + ib$ un número complejo distinto de cero. Entonces (a, b) es un punto distinto del origen en el plano. Este punto tiene coordenadas polares (r, θ). Como es estándar con las coordenadas polares, el ángulo polar θ de (a, b) no está únicamente determinado. Si camina en el eje real r unidades a la derecha desde el origen y rota este segmento θ_0 radianes desde el extremo del segmento en (a, b), como en la figura 8.6, entonces el ángulo polar θ para (a, b) es cualquier número $\theta_0 + 2n\pi$, en el cual n es cualquier entero. Una elección positiva para n corresponde a girar el segmento desde 0 hasta r un radián inicial θ_0 para alcanzar a (a, b) y después continuando en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj dar n vueltas completas, lo cual nuevamente lo coloca en (a, b). Una elección negativa para n corresponde a girar el segmento desde 0 hasta r un radián inicial de θ_0, y después dar n vueltas en el sentido de las manecillas del reloj, terminando nuevamente en (a, b). Así, por convención, se piensa en rotaciones en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj como las que tienen orientación positiva y las rotaciones en sentido del movimiento de las manecillas del reloj como las que tienen orientación negativa.

Para ilustrar, considere $z = 1 + i$. El punto (1, 1) tiene coordenadas polares $(\sqrt{2}, \pi/4)$, ya que $1 + i$ está a $\sqrt{2}$ unidades del origen, y el segmento desde el origen a $1 + i$ forma un ángulo $\pi/4$ radianes con la parte positiva del eje real (figura 8.7). Todas las coordenadas polares de (1, 1) tienen la forma

$$\left(\sqrt{2}, \pi/4 + 2n\pi\right),$$

de n puede ser cualquier entero.

Si z distinto de cero tiene coordenadas polares (r, θ), entonces $r = |z|$. El ángulo θ (el cual siempre se expresa en radianes) se llama un *argumento* de z. Cualquier número distinto de cero tiene una infinidad de argumentos y ellos difieren uno del otro en múltiplos enteros de 2π. Los argumentos de $1 + i$ son $\pi/4 + 2n\pi$, para cualquier entero n.

Ahora recuerde la fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta).$$

Si θ es cualquier argumento de $z = a + ib$, entonces (a, b) tiene coordenadas polares (r, θ), así $a = r\cos(\theta)$ y $b = r \operatorname{sen}(\theta)$. Combinando este hecho con la fórmula de Euler, tiene

$$z = a + ib = r\cos(\theta) + ir \operatorname{sen}(\theta) = re^{i\theta}.$$

Esta forma exponencial para z se llama la *forma polar* de z. Cualquier argumento de z puede usarse en esta forma polar, ya que cualesquiera dos argumentos θ_0 y θ_1 difieren en algún múltiplo entero de 2π. Si, $\theta_1 = \theta_0 + 2k\pi$, entonces

$$\begin{aligned} re^{i\theta_1} &= r[\cos(\theta_0 + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(\theta_0 + 2k\pi)] \\ &= r[\cos(\theta_0) + i \operatorname{sen}(\theta_0)] = re^{i\theta_0}. \end{aligned}$$

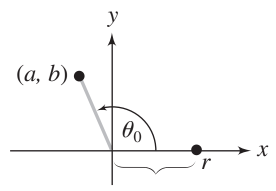


FIGURA 8.6 *(a, b) tiene coordenadas polares $(r, \theta_0 + 2n\pi)$, n cualquier entero.*

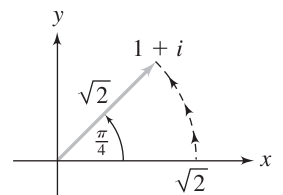


FIGURA 8.7 *Las coordenadas polares de $1 + i$ son $(\sqrt{2}, \pi/4 + 2n\pi)$, n cualquier entero.*

EJEMPLO 8.1

Encuentre la forma polar de $-1 + 4i$. Primero, $r = |-1 + 4i| = \sqrt{17}$. Ahora considere la figura 8.8. θ es un argumento de $-1 + 4i$, y α será útil para la determinación de θ. A partir del diagrama, $\tan(\alpha) = 4$, así

$$\theta = \pi - \alpha = \pi - \tan^{-1}(4).$$

Puede, por tanto, escribir la forma polar

$$-1 + 4i = \sqrt{17}e^{i(\pi - \tan^{-1}(4))}.$$ ■

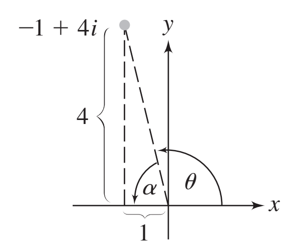


FIGURA 8.8 $\pi - \tan^{-1}(4)$ *es un argumento de* $-1 + 4i$*.*

EJEMPLO 8.2

Encontrará la forma polar de $3 + 3i$. Como se indica en la figura 8.9, $\pi/4$ es un argumento de $3 + 3i$. La forma polar es

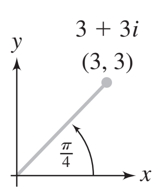


FIGURA 8.9 $\pi/4$ *es un argumento de* $3 + 3i$*.*

$$3 + 3i = \sqrt{18}e^{i\pi/4}.$$ ■

Para cualquier real θ,

$$\left|e^{i\theta}\right| = \cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta) = 1.$$

Esto significa que al escribir la forma polar $z = re^{i\theta}$, la magnitud de z está totalmente contenida en el factor r, mientras $e^{i\theta}$, el cual tiene magnitud 1, aporta toda la información acerca de la dirección de z (distinto de cero) desde el origen.

Debido a las propiedades de la función exponencial, algunos cálculos con números complejos se simplifican si usa las formas polares. Para ilustrar, suponga que quiere probar que $|zw| = |z|\,|w|$, algo que hizo por manipulación algebraica. Hace $z = re^{i\theta}$ y $w = \rho e^{i\xi}$ para obtener inmediatamente

$$|zw| = \left|r\rho e^{i\theta}e^{i\xi}\right| = r\rho\left|e^{i(\theta+\xi)}\right| = r\rho = |z|\,|w|.$$

El hecho de que $e^{i(\theta+\xi)} = e^{i\theta}e^{i\xi}$ también significa que el argumento de un producto es la suma de los argumentos de los factores, módulo un múltiplo entero de 2π. Escrito más cuidadosamente, si θ_0 es cualquier argumento de z, y θ_1 es cualquier argumento de w, y Θ es cualquier argumento de zw, entonces para algún entero n,

$$\Theta = \theta_0 + \theta_1 + 2n\pi.$$

Multiplicar dos números complejos tiene el efecto de sumar sus argumentos, módulo un múltiplo entero de 2π.

EJEMPLO 8.3

Sean $z = i$ y $w = 2 - 2i$. Un argumento de z es $\theta_0 = \pi/2$, y un argumento de w es $\theta_1 = 7\pi/4$ (figura 8.10). Ahora

$$zw = i(2 - 2i) = 2 + 2i,$$

y un argumento de $2 + 2i$ es $\Theta = \pi/4$. Con esta elección de argumentos,

$$\theta_0 + \theta_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{4} = \frac{9\pi}{4} = \Theta + 2\pi.$$

Si hubiera elegido $\theta_0 = \pi/2$ y $\theta_1 = -\pi/4$, entonces obtendría

$$\theta_0 + \theta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} = \Theta. \quad ■$$

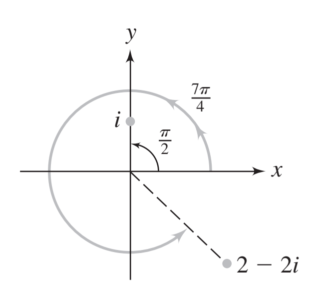


FIGURA 8.10 *$\pi/2$ es un argumento de i, y $7\pi/4$ un argumento de $2 - 2i$.*

8.1.6 Orden

Dados dos números reales distintos cualesquiera a y b, exactamente una de $a < b$ o $b < a$ debe ser cierta. Se dice que los números reales son ordenados. Comprobará que no hay un orden de los números complejos.

Para entender por qué esto es cierto, debe investigar la idea detrás del orden de los números reales que es una verdadera partición de los números reales distintos de cero en dos conjuntos mutuamente exclusivos, N y P, con las siguientes propiedades:

1. Si x es un número real distinto de cero, entonces x está en P o $-x$ está en P, pero no ambos.
2. Si x y y están en P, entonces $x + y$ y xy están en P.

Piense en P como el conjunto de los números positivos y en N como el conjunto de los números negativos. La existencia de tal partición de los números reales distintos de cero que satisface las condiciones (1) y (2) es la razón por la cual ordena a los reales. Un orden está establecido al definir $x < y$ si, y sólo si $y - x$ está en P. Por ejemplo, $2 < 5$ ya que $5 - 2 = 3$ es positivo.

¿Existe una partición de los números complejos distintos de cero en dos conjuntos, P y N, que tengan las propiedades (1) y (2)? Si es así, puede ordenar los números complejos.

Suponga que tal partición existe. Entonces i está en P o $-i$ está en P, pero no ambos. Si i está en P, entonces $i^2 = -1$ está en P por (2), así $(-1)(i) = -i$ está en P. Pero esto viola la condición (1). Si $-i$ está en P, entonces $(-i)(-i) = i^2 = -1$ está en P, así $(-1)(-i) = i$ está en P, nuevamente viola (1).

Esto prueba que tal partición no existe, y los números complejos no se pueden ordenar. Siempre que escriba $z < w$, está suponiendo que z y w son números reales.

SECCIÓN 8.1 PROBLEMAS

En cada problema del 1 al 10, lleve a cabo el cálculo indicado.

1. $(3 - 4i)(6 + 2i)$

2. $i(6 - 2i) + |1 + i|$

3. $\dfrac{2 + i}{4 - 7i}$

4. $\dfrac{(2 + i) - (3 - 4i)}{(5 - i)(3 + i)}$

5. $(17 - 6i)\overline{(-4 - 12i)}$

6. $\left|\dfrac{3i}{-4 + 8i}\right|$

7. $i^3 - 4i^2 + 2$

8. $(3 + i)^3$

9. $\left(\dfrac{-6 + 2i}{1 - 8i}\right)^2$

10. $(-3 - 8i)(2i)(4 - i)$

11. Pruebe que, para cualquier entero positivo n,

$$i^{4n} = 1,\ i^{4n+1} = i,\ i^{4n+2} = -1,\ \text{y}\ i^{4n+3} = -i.$$

12. Sea $z = a + ib$. Determine $\text{Re}(z^2)$ e $\text{Im}(z^2)$.

13. Sea $z = a + ib$. Determine $\text{Re}(z^2 - iz + 1)$ e $\text{Im}(z^2 - iz + 1)$.

14. Pruebe que $z^2 = \overline{z}^2$ si, y sólo si z es real o imaginario puro.

15. Sean z, w y u números complejos. Pruebe que cuando están representados como puntos en el plano, estos números forman los vértices de un triángulo equilátero si, y sólo si

$$z^2 + w^2 + u^2 = zw + zu + wu.$$

16. Pruebe que $\text{Re}(iz) = -\text{Im}(z)$ e $\text{Im}(iz) = \text{Re}(z)$.

En cada problema del 17 al 22, determine $\arg(z)$. La respuesta debe incluir todos los argumentos del número.

17. $3i$

18. $-2 + 2i$

19. $-3 + 2i$

20. $8 + i$

21. -4

22. $3 - 4i$

En cada problema del 23 al 28, escriba el número complejo en forma polar.

23. $-2 + 2i$

24. $-7i$

25. $5 - 2i$

26. $-4 - i$

27. $8 + i$

28. $-12 + 3i$

29. Sean z y w números complejos tales que $\overline{z}w \neq 1$, pero tales que z o w tienen magnitud 1. Pruebe que

$$\left|\frac{z - w}{1 - \overline{z}w}\right| = 1.$$

Sugerencia: En los problemas que involucran magnitud, muchas veces es útil recordar el teorema 8.1(8). Para aplicar este resultado, eleve al cuadrado ambos lados de la igualdad propuesta.

30. Pruebe que para cualesquiera números complejos z y w,

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right).$$

Sugerencia: Tenga en mente el teorema 8.1 (8).

8.2 Lugares geométricos y conjuntos de puntos en el plano complejo

Algunas veces la notación compleja es muy eficiente en la especificación de lugares geométricos de puntos en el plano. En esta sección se ilustrará esto, y también la representación compleja de ciertos conjuntos que aparecen frecuentemente en discusiones de integrales y derivadas complejas

8.2.1 Distancia

Si $z = a + ib$ es cualquier número complejo, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ es la distancia del origen a z (punto (a, b)) en el plano complejo. Si $w = c + id$ también es un número complejo, entonces

$$\begin{aligned} |z - w| &= |(a - c) + i(b - d)| \\ &= \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} \end{aligned}$$

es la distancia entre z y w en el plano complejo (figura 8.11). Esta es la fórmula estándar de geometría para la distancia entre puntos (a, b) y (c, d).

8.2.2 Círculos y discos

Si a es un número complejo y r es un número positivo (por tanto real), la ecuación

$$|z - a| = r$$

se satisface exactamente por aquellos puntos z cuya distancia a a es r. El lugar geométrico de los puntos que satisfacen esta condición es el círculo de radio r alrededor de a (figura 8.12). Esta es la manera de especificar a los círculos en el plano complejo, y muchas veces se hace referencia "al círculo $|z - a| = r$".

Si $a = 0$, entonces cualquier punto en el círculo $|z| = r$ tiene forma polar

$$z = re^{i\theta},$$

donde θ es el ángulo desde la parte positiva del eje real a la recta desde el origen hasta z (figura 8.13). Conforme θ varía de 0 a 2π, el punto $z = re^{i\theta}$ se mueve una vez en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de este círculo, empezando en $z = r$ en el eje real positivo cuando $\theta = 0$, encontrando ri cuando $\theta = \pi/2$, $-r$ cuando $\theta = \pi$, $-ri$ cuando $\theta = 3\pi/2$, y regresando a r cuando $\theta = 2\pi$.

Si $a \neq 0$, entonces el centro del círculo $|z - a| = r$ es a en lugar del origen. Ahora un punto en el círculo tiene la forma

$$z = a + re^{i\theta},$$

que es simplemente un sistema de coordenadas polares trasladado para tener a como su origen (figura 8.14). Conforme θ varía de 0 a 2π, este punto se mueve una vez en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de este círculo. Por ejemplo, la ecuación $|z - 3 + 7i| = 4$ define al círculo de radio 4 alrededor del punto $(3, -7)$ en el plano. El número complejo $3 - 7i$ es el centro del círculo. Un punto típico en el círculo tiene la forma $z = 3 - 7i + 4e^{i\theta}$ (figura 8.15).

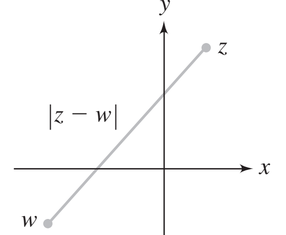


FIGURA 8.11 *|z − w| es la distancia entre z y w.*

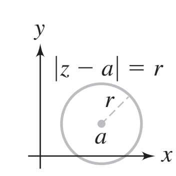


FIGURA 8.12 *El círculo de radio r alrededor de a.*

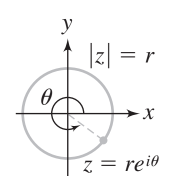


FIGURA 8.13 *El círculo de radio r alrededor del origen.*

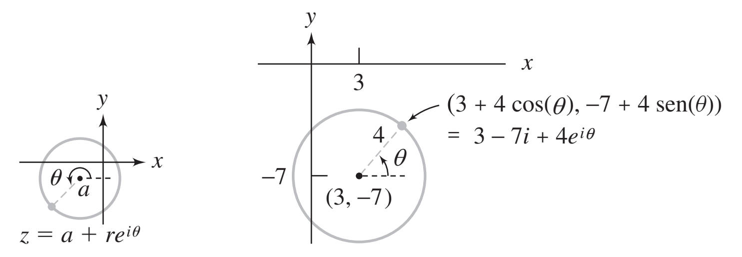


FIGURA 8.14

FIGURA 8.15 *El círculo* $|z - 3 + 7i| = 4$.

Una desigualdad $|z - a| < r$ especifica a todos los puntos dentro del círculo de radio r alrededor de a. Tal conjunto se llama un *disco abierto*. “Abierto” aquí significa que los puntos en la circunferencia del círculo que acota a este disco no pertenecen al conjunto. Un punto en este círculo debería satisfacer $|z - a| = r$, no $|z - a| < r$. En un dibujo se indica que un disco es abierto dibujando la frontera del círculo punteada (figura 8.16). Por ejemplo, $|z - i| < 8$ especifica a los puntos dentro del disco abierto de radio 8 alrededor de i.

Un *disco cerrado* de radio r y centro a consiste de todos los puntos en o dentro del círculo de radio r alrededor de a. Este conjunto está especificado mediante la desigualdad débil $|z - a| \leq r$. Al mostrar este conjunto, frecuentemente dibujamos un círculo sólido como la frontera para indicar que esos puntos están incluidos en el disco cerrado (figura 8.17).

8.2.3 La ecuación $|z - a| = |z - b|$

Sean w_1 y w_2 números complejos distintos. Una ecuación

$$|z - w_1| = |z - w_2|$$

puede expresarse como “la distancia entre z y w_1 debe ser igual a la distancia entre z y w_2”. Como lo sugiere la figura 8.18, esto requiere que z esté en la bisectriz perpendicular del segmento de recta que conecta a w_1 y w_2. La ecuación $|z - w_1| = |z - w_2|$ debe, por tanto, ser considerada como la ecuación de esta recta.

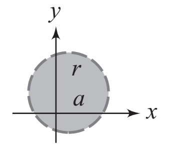


FIGURA 8.16 $|z - a| < r$, *el disco abierto de radio r alrededor de a.*

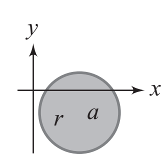


FIGURA 8.17 $|z - a| \leq r$, *el disco cerrado de radio r alrededor de a.*

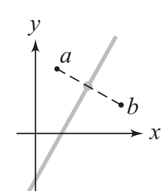


FIGURA 8.18 $|z - a| = |z - b|$ *se satisface para todo z en la bisectriz perpendicular al segmento* $\overline{ab}$.

EJEMPLO 8.4

La ecuación

$$|z + 6i| = |z - 1 + 3i|$$

se satisface para todos los puntos en el bisector perpendicular del segmento entre $-6i$ y $1 - 3i$. Este es el segmento que conecta $(0,-6)$ y $(1,-3)$, como se muestra en la figura 8.19.

Puede obtener la ecuación "estándar" de esta recta como sigue. Primero escriba

$$|z + 6i|^2 = |z - 1 + 3i|^2,$$

o

$$(z + 6i)(\overline{z} - 6i) = (z - 1 + 3i)(\overline{z} - 1 - 3i).$$

Esto elimina los signos de los valores absolutos. Lleve a cabo las multiplicaciones para obtener

$$z\overline{z} + 6i(\overline{z} - z) + 36 = z\overline{z} - z - 3iz - \overline{z} + 1 + 3i + 3i\overline{z} - 3i + 9.$$

Sea $z = x + iy$. Entonces $\overline{z} - z = (x - iy) - (x + iy) = -2iy$ y $-\overline{z} - z = -2x$, así la última ecuación se convierte en

$$6i(-2iy) + 36 = -2x + 3i(-2iy) + 10,$$

o

$$12y = -2x + 6y - 26.$$

Esta es la recta

$$y = -\frac{1}{3}(x + 13). \quad \blacksquare$$

Ahora considere la desigualdad

$$|z + 6i| < |z - 1 + 3i|\,.$$

Ya sabe que la ecuación $|z + 6i| = |z - 1 + 3i|$ describa una recta separando el plano en dos conjuntos, teniendo esta recta como frontera (figura 8.19). La desigualdad dada mantiene a los puntos en uno de estos conjuntos, en un lado u otro de esta recta. Claramente z está más cerca de $-6i$ que de $1 - 3i$ si z está abajo de la recta frontera. Así la desigualdad especifica todos los puntos z debajo de esta recta, la región sombreada en la figura 8.20. La recta frontera está punteada porque los puntos en esta recta no pertenecen a esta región.

La desigualdad débil $|z + 6i| \leq |z - 1 + 3i|$ especifica todos los puntos en la región sombreada de la figura 8.21, junto con todos los puntos en la recta frontera.

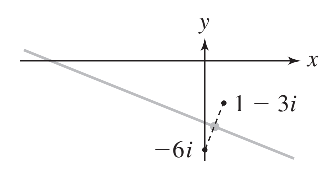


FIGURA 8.19 *El lugar geométrico de la ecuación* $|z + 6i| = |z - 1 + 3i|$.

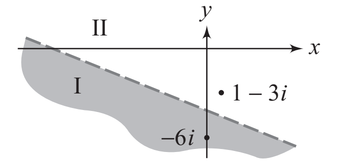


FIGURA 8.20 *Región I consiste de los puntos que satisfacen* $|z + 6i| < |z - 1 + 3i|$.

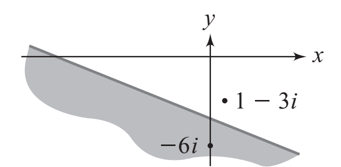


FIGURA 8.21 *La región dada por* $|z + 6i| \leq |z - 1 + 3i|$.

8.2.4 Otros lugares geométricos

Cuando un argumento geométrico no es claro, se intenta determinar un lugar geométrico sustituyendo $z = x + iy$ en la ecuación o desigualdad dada.

EJEMPLO 8.5

Considere la ecuación

$$|z|^2 + 3\text{Re}(z^2) = 4.$$

Si $z = x + iy$, esta ecuación se convierte en

$$x^2 + y^2 + 3(x^2 - y^2) = 4,$$

o

$$4x^2 - 2y^2 = 4.$$

La gráfica de esta ecuación es la hipérbola de la figura 8.22. Un número complejo satisface la ecuación dada si, y sólo si su representación como un punto en el plano está en la hipérbola. ■

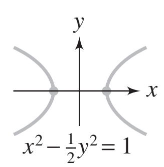


FIGURA 8.22
Lugar geométrico de los puntos z con $|z|^2 + 3\,Re(z^2) = 4$.

8.2.5 Puntos interiores, puntos frontera y conjuntos abiertos y cerrados

En el desarrollo del cálculo de funciones complejas, ciertos tipos de conjuntos y puntos serán importantes. Para esta sección sea S un conjunto de números complejos. Un número es un punto interior de S si está en un sentido completamente rodeado de puntos de S.

DEFINICIÓN 8.3 Punto interior

Un número complejo z_0 es un punto interior de S si existe un disco abierto alrededor de z_0 que contenga sólo puntos de S.

Esto significa que, para algún r positivo, todos los puntos que satisfacen $|z - z_0| < r$ están en S. Claramente esto fuerza también a z_0 a estar en S.

DEFINICIÓN 8.4 Conjunto abierto

S es abierto si todo punto de S es un punto interior.

EJEMPLO 8.6

Sea K el disco abierto $|z - a| < r$ (figura 8.23). Todo punto de K es un punto interior ya que alrededor de cualquier punto en K es posible dibujar un disco de radio lo suficientemente pequeño que contenga sólo puntos en K. Así K es un conjunto abierto, justificando la terminología "disco abierto" usado anteriormente para un disco que no incluía ningún punto de su círculo frontera. ■

EJEMPLO 8.7

Sea L consistente en todos los puntos que satisfacen $|z - a| \leq r$. Ahora L contiene puntos que no son puntos interiores, específicamente aquellos en el círculo $|z - a| = r$. Cualquier disco abierto dibujado alrededor de un punto tal contendrá puntos fuera del disco L (figura 8.24). Este conjunto no es un conjunto abierto. ■

EJEMPLO 8.8

Sea V consistente en todo $z = x + iy$ con $x > 0$. Este es el semiplano derecho, sin incluir el eje imaginario que forma la frontera entre los semiplanos izquierdo y derecho. Como lo sugiere la figura 8.25, todo punto de V es un punto interior, ya que alrededor de cualquier punto $z_0 = x_0 + iy_0$ con $x_0 > 0$, es factible dibujar un disco bastante pequeño para que todos los puntos que encierre también tengan partes reales positivas. Debido a que todo punto de V es un punto interior, V es un conjunto abierto. ■

EJEMPLO 8.9

Sea M consistente en todo $z = x + iy$ con $x \geq 0$. Todo punto en M con parte real positiva es un punto interior, igual que en el ejemplo anterior. Pero no todo punto de M es interior. Un punto $z = iy$ en el eje ima-

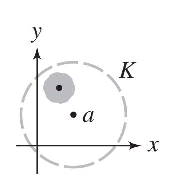


FIGURA 8.23
Un disco abierto es un conjunto abierto (todos sus puntos son puntos interiores).

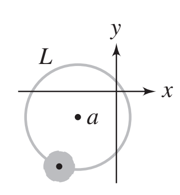


FIGURA 8.24
Los puntos en $|z - a| = r$ no son puntos interiores de $|z - a| \leq r$.

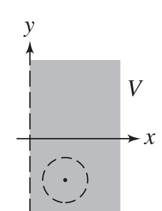


FIGURA 8.25
El semiplano $Re(z) > 0$ (un conjunto abierto).

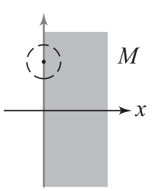


FIGURA 8.26
El semiplano $Re(z) \geq 0$ (*no es un conjunto abierto*).

ginario está en M pero no se puede encerrar en un disco que contenga sólo puntos en M, que tengan parte real no negativa (figura 8.26). Como M contiene puntos que no son puntos interiores, M no es abierto. ■

EJEMPLO 8.10

Sea W consistente en todos los puntos en el eje real. Entonces ningún punto de W es un punto interior. Cualquier disco, sin importar qué tan pequeño tenga el radio, dibujado alrededor de un punto en el eje real contendrá puntos que no estén en este eje, por tanto no en W. Ningún punto de W es un punto interior de W. ■

Regresando a la discusión general, los puntos frontera de un conjunto S son números complejos que están en algún sentido en el "borde" de S.

DEFINICIÓN 8.5 *Punto frontera*

Un punto z_0 es un punto frontera de S si todo disco abierto alrededor de z_0 contiene al menos un punto en S y al menos un punto que no esté en S.

Un punto frontera puede o no estar en S. Debido a que la definición de punto interior y punto frontera son exclusivos, ningún punto puede ser un punto interior y un punto frontera del mismo conjunto. El conjunto de todos los puntos frontera de S se llama la *frontera* de S y se denota ∂S.

EJEMPLO 8.11

Los conjuntos K y L de los ejemplos 8.6 y 8.7 tienen la frontera, a saber, los puntos en el círculo $|z - a| = r$. K no contiene a ninguno de sus puntos frontera, mientras L los contiene a todos. ■

EJEMPLO 8.12

El conjunto V del ejemplo 8.8 tiene todos los puntos en el eje imaginario como sus puntos frontera. Este conjunto no contiene ninguno de sus puntos frontera. En contraste, M del ejemplo 8.9 tiene los mismos puntos frontera que V, a saber, todos los puntos en el eje imaginario, pero M contiene todos esos puntos frontera. ■

EJEMPLO 8.13

Para la recta real (W en el ejemplo 8.10), todo punto de W es un punto frontera. Si dibuja cualquier disco abierto alrededor de un número real x, este disco contiene un punto de W, a saber, x, y muchos puntos que no están en W. No hay otros puntos frontera de W. ■

EJEMPLO 8.14

Sea E consistente en todos los números complejos $z = x + iy$ con $y > 0$, junto con el punto $-23i$ (figura 8.27). Entonces $-23i$ es un punto frontera de E, ya que todo disco alrededor de $-23i$ ciertamente contiene puntos que no están en E, pero también contiene un punto de E, a saber el mismo $-23i$. Todo número real (eje horizontal) también es un punto frontera de E. ■

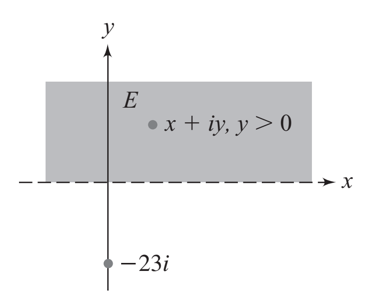


FIGURA 8.27 *$-23i$ es un punto frontera de E.*

Una lectura cuidadosa de la definición prueba que todo punto de un conjunto es un punto interior o un punto frontera.

TEOREMA 8.3

Sea S un conjunto de números complejos y sea z en S. Entonces z es un punto frontera de S o un punto interior de S. ■

Prueba Suponga que z está en S, pero no es un punto interior. Si D es cualquier disco abierto alrededor de z, entonces D no puede contener sólo puntos de S, y así debe contener al menos un punto que no esté en S. Pero D también contiene un punto de S, a saber, el mismo z. De donde z debe ser un punto frontera de S. ■

Sin embargo, un conjunto puede tener puntos frontera que no estén en el conjunto, como ocurre en algunos de los ejemplos anteriores.

Además, un conjunto abierto no puede contener cualesquiera de estos puntos frontera.

TEOREMA 8.4

Sea S un conjunto de números complejos. Si S es abierto, entonces S no puede contener ningún punto frontera.

Prueba Suponga que z está en S y S es abierto. Entonces algún disco abierto D alrededor de z contiene solamente puntos de S. Pero entonces este disco no contiene ningún punto que no esté en S, de esta manera z no puede ser un punto frontera de S. ■

DEFINICIÓN 8.6 Conjunto cerrado

Un conjunto de números complejos es cerrado si contiene todos sus puntos frontera.

Por ejemplo, el disco cerrado $|z - z_0| \leq r$ es un conjunto cerrado. Los puntos frontera son todos los puntos en el círculo $|z - z_0| = r$, y todos están en el disco cerrado. El conjunto M del ejemplo 8.9 es cerrado. Sus puntos frontera son todos los puntos en el eje imaginario, y todos éstos pertenecen al conjunto. El conjunto W del ejemplo 8.10 es cerrado, ya que todo punto en el conjunto es un punto frontera, y el conjunto no tiene otros puntos frontera.

Los términos *cerrado* y *abierto* no son mutuamente exclusivos, y uno no es el opuesto del otro. Un conjunto puede ser ambos, cerrado y abierto, o cerrado y no abierto, o abierto y no cerrado, o ni abierto ni cerrado. Por ejemplo, el conjunto $\mathfrak{C}$ de todos los números complejos es abierto (todo punto es interior) y cerrado (no hay puntos frontera, de manera que $\mathfrak{C}$ los contiene a todos). Un disco cerrado es cerrado pero no abierto, y un disco abierto es abierto y no cerrado. El siguiente ejemplo da un conjunto que no es ni abierto ni cerrado.

EJEMPLO 8.15

Sea T consistente en todos los puntos $z = x + iy$ con $-1 \leq x \leq 1$ y $y > 0$. En la figura 8.28 se muestra esta banda infinita. Los puntos frontera son todos los puntos $-1 + iy$ con $y \geq 0$, todos los puntos $1 + iy$ con $y \geq 0$, y todos los puntos x con $-1 \leq x \leq 1$. Algunos de estos puntos están en T, por ejemplo, los puntos frontera $-1 + iy$ con $y > 0$. Esto significa que T no puede ser abierto. Pero algunos de estos puntos frontera no están en T, por ejemplo, los puntos x con $-1 \leq x \leq 1$. Así T no es cerrado. ■

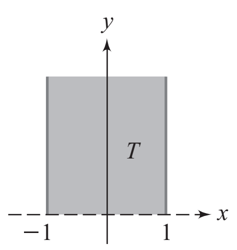


FIGURA 8.28 *La banda que consiste en todo $z = x + iy$ con $-1 \leq x \leq 1$, $y > 0$.*

8.2.6 Puntos límite

Un número z_0 es un *punto límite* de S si hay puntos de S arbitrariamente cercanos a z_0 pero diferentes de z_0.

DEFINICIÓN 8.7 *Punto límite*

Un número complejo z_0 es un punto límite de un conjunto S si todo disco abierto alrededor de z_0 contiene al menos un punto de S distinto de z_0.

El punto límite difiere del punto frontera en requerir que todo disco abierto alrededor del punto contenga algo de *S distinto de él mismo*. En el ejemplo 8.14, $-23i$ es un punto frontera de W, pero no es un punto límite de W, porque hay discos abiertos alrededor de $-23i$ que no contienen otro punto de W.

EJEMPLO 8.16

Para el conjunto V del ejemplo 8.8, todo punto del eje vertical es un punto límite. Dados cualesquiera de tales puntos $z_0 = iy_0$, todo disco alrededor de z_0 contiene puntos de V distintos que iy_0. Así z_0 es tanto un punto frontera como un punto límite. Este ejemplo muestra que un punto límite de un conjunto no necesita pertenecer al conjunto. Este conjunto tiene muchos otros puntos límite. Por ejemplo, todo número $x + iy$ con $x > 0$ es un punto límite que también pertenece a V. ■

EJEMPLO 8.17

Sea Q consistente en los números i/n para $n = 1, 2, \dots$. Todo disco abierto alrededor de 0, sin importar qué tan pequeño sea el radio, contiene puntos i/n en Q si elige n suficientemente grande. Por tanto, 0 es un punto límite de Q. En este ejemplo, 0 también es un punto frontera de Q (su único punto de frontera). ■

EJEMPLO 8.18

Sea N consistente en todo in, con n un entero. Entonces N no tiene puntos límite. Un disco abierto de radio $\frac{1}{2}$ alrededor de in puede tener solamente un punto en común con N, a saber, el mismo in. ■

Como prueban estos ejemplos, un punto límite de un conjunto puede o no estar en el conjunto. Los conjuntos cerrados son exactamente aquellos que contienen todos sus puntos límite, en el entendido de que un conjunto que no tiene puntos límite contiene a todos sus puntos límite.

TEOREMA 8.5

Sea S el conjunto de números complejos. Entonces S es cerrado si, y sólo si S contiene todos sus puntos límite. ■

Prueba Suponga primero que S es cerrado y sea w un punto límite de S. Probará que w está en S. Suponga que w no está en S. Sabe que cualquier disco $|z - w| < r$ debe contener un punto z_r de S distinto de w. Pero entonces este disco contiene un punto en S (a saber z_r) y un punto que no está en S (a saber el mismo w). Por tanto, w es un punto frontera de S. Pero S es cerrado y entonces contiene todos sus puntos frontera, en particular w. Esta contradicción muestra que w debe estar en S, así S contiene todos sus puntos límite.

En sentido inverso, suponga que si w es un punto límite de S, entonces w está en S. Quiere probar que S es cerrado. Para hacer esto, probaremos que S contiene sus puntos frontera. Sea b un punto frontera de S.

Suponga que b no está en S. Si $|z - b| < r$ es un disco abierto alrededor de b, entonces este disco contiene un punto de S, ya que b es un punto frontera. Pero este punto no está en b, porque supuso que b no estaba en S. Entonces todo disco abierto alrededor de b contiene un punto de S distinto de b, así b es un punto límite de S. Pero había supuesto que todo punto límite de S estaba en S, así b está en S. Esta contradicción prueba que S contiene todos sus puntos frontera, por tanto S es cerrado. ■

Aquí hay algunos ejemplos adicionales de puntos límite.

EJEMPLO 8.19

Sea X consistente en todos los números $2 - i/n$, con $n = 1, 2, \ldots$. Entonces 2 es un punto límite (y punto frontera) de X. No hay otros puntos límite de X. ■

EJEMPLO 8.20

Sea Q consistente en todos los números complejos $a + ib$ con a y b números racionales. Entonces todo número complejo es tanto un punto límite como un punto frontera de Q. Algunos puntos límite de Q están en Q (si a y b son racionales), y algunos no lo están (si a o b es irracional). ■

EJEMPLO 8.21

Sea P consistente en todos los números complejos $x + iy$ con $-1 \leq y < 1$. Entonces cada punto de P es un punto límite, y los $x + i$ también son puntos límite de P que no pertenecen a P. ■

EJEMPLO 8.22

Sea D el disco abierto $|z - z_0| < r$. Todo punto en D es un punto límite. Sin embargo, los puntos en el círculo frontera $|z - z_0| = r$, el cual no pertenece a D, también son puntos límite, así como puntos frontera, de D. ■

8.2.7 Sucesiones complejas

La noción de sucesión compleja es una adaptación directa del concepto de sucesión real.

DEFINICIÓN 8.8 Sucesión

Una sucesión compleja $\{z_n\}$ es una asignación de un número complejo z_n a cada entero positivo n.

El número z_n es el n-ésimo término de la sucesión. Por ejemplo, $\{i^n\}$ tiene n-ésimo término i^n.

Frecuentemente se indica una sucesión haciendo una lista de los primeros términos, incluyendo suficientes términos de manera que el patrón quede claro y uno pueda predecir que z_n es para cada n. Por ejemplo, puede escribir $\{i^n\}$ como

$$i, i^2, i^3, \ldots, i^n, \ldots.$$

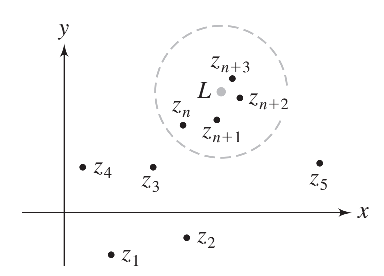


FIGURA 8.29 *Convergencia de $\{z_n\}$ a L.*

La convergencia de sucesiones complejas también está modelada a partir de la convergencia de sucesiones reales.

DEFINICIÓN 8.9 Convergencia

La sucesión compleja $\{z_n\}$ converge a un número L si, dado cualquier número positivo ϵ, existe un número positivo N tal que

$$|z_n - L| < \epsilon \quad \text{si } n \geq N.$$

Esto significa que puede hacer cada término z_n tan cerca como quiera de L eligiendo n al menos tan grande como algún número N. Puesto de otra manera, dado cualquier disco abierto D alrededor de z_0, puede encontrar algún término de la sucesión de manera que todos los términos de la lista a partir de él (esto es, para un índice suficientemente grande) caiga en D (figura 8.29). Esta es la misma idea que está detrás de la convergencia de sucesiones reales, excepto en que los intervalos abiertos en la recta real son reemplazados por discos abiertos. Cuando $\{z_n\}$ converge a L, se escribe $z_n \to L$ o $\lim_{n\to\infty} z_n = L$. Si una sucesión no converge para ningún número, entonces la sucesión *diverge*.

EJEMPLO 8.23

La sucesión $\{i^n\}$ diverge. Esta es la sucesión

$$i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, \ldots$$

y no hay ningún punto en la sucesión anterior a partir del cual todos los términos se aproximen a un número específico tanto como quiera. Por ejemplo, si toma el disco $|z - i| < \frac{1}{2}$, entonces los primeros términos de la sucesión, y cada cuarto término a partir de éste, está en el disco, pero ningún otro término está en este disco. ■

EJEMPLO 8.24

La sucesión $\{1 + i/n\}$ converge a 1. Esto se sigue a partir de la definición ya que, si $\epsilon > 0$, entonces

$$\left|\left(1 + \frac{i}{n}\right) - 1\right| = \left|\frac{i}{n}\right| = \frac{1}{n} < \epsilon$$

si n se elige mayor que $1/\epsilon$. Dada $\epsilon > 0$, puede elegir $N = 1/\epsilon$ en la definición de convergencia. ■

La convergencia de una sucesión compleja siempre se puede reducir a un problema de convergencia de dos sucesiones reales.

TEOREMA 8.6

Sea $z_n = x_n + iy_n$ y $L = a + ib$. Entonces $z_n \to L$ si, y sólo si $x_n \to a$ y $y_n \to b$. ■

Por ejemplo, sea $z_n = (1 + 1/n)^n + ((n + 2)/n)i$. Sabe que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

y

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n} = 1.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} z_n = e + i.$$

Prueba Suponga primero que $z_n \to a + bi$. Sea $\epsilon > 0$. Para alguna N, $|z_n - L| < \epsilon$ si $n \geq N$. Entonces, por el teorema 8.2(1), para $n \geq N$,

$$|x_n - a| = |\mathrm{Re}(z_n - L)| \leq |z_n - L| < \epsilon,$$

así $x_n \to a$. Análogamente, si $n \geq N$,

$$|y_n - b| = |\mathrm{Im}(z_n - L)| \leq |z_n - L| < \epsilon,$$

así $y_n \to b$.

Inversamente, suponga que $x_n \to a$ y $y_n \to b$. Sea $\epsilon > 0$. Para algún N_1,

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{si } n \geq N_1.$$

Para algún N_2,

$$|y_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{si } n \geq N_2.$$

Entonces, para $n \geq N_1 + N_2$,

$$|z_n - L| = |(x_n - a) + i(y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

probando que $z_n \to L$. ■

La noción de convergencia de una sucesión compleja está íntimamente ligada al concepto de punto límite de un conjunto.

TEOREMA 8.7

Sea K un conjunto de números complejos y sea w un número complejo. Entonces w es un punto límite de K si, y sólo si existe una sucesión $\{k_n\}$ de puntos en K, con cada $k_n \neq w$, que converge a w. ■

Esta es la razón para el nombre *punto límite*. Un número w puede ser un punto límite de un conjunto sólo si w es el límite de la sucesión de puntos en el conjunto, todos distintos de w. Esto se satisface si w está o no él mismo en el conjunto.

Por ejemplo, considere el disco abierto unitario $|z| < 1$. Sabe que i es un punto límite del disco, porque cualquier disco abierto alrededor de i contiene puntos del disco unitario diferentes de i. Pero también puede encontrar una sucesión de puntos en el disco unitario que converja a i, por ejemplo, $z_n = (1 - 1/n)i$.

Prueba Suponga primero que w es un punto límite de K. Entonces para cada entero positivo n, el disco abierto de radio $1/n$ alrededor de w debe contener un punto de K distinto de w. Elija tal punto y llámelo k_n. Entonces cada $k_n \neq w$, k_n está en K, y $|k_n - w| < 1/n$. Como $1/n \to 0$ conforme $n \to \infty$, entonces $\{k_n\}$ converge a w.

Inversamente, suponga que hay una sucesión de puntos k_n en K, todos distintos de w y que convergen a w. Sea D cualquier disco abierto alrededor de w, de radio ϵ. Debido a que $k_n \to w$, D debe contener todos los k_n para n mayor que algún número N. Pero entonces D contiene puntos de K diferentes de w, y por tanto w es un punto límite de K. ■

8.2.8 Subsucesiones

Una subsucesión de una sucesión se forma eligiendo ciertos términos para producir una nueva sucesión.

DEFINICIÓN 8.10 *Subsucesión*

Una sucesión $\{w_j\}$ es una subsucesión de $\{z_n\}$ si existen enteros positivos

$$n_1 < n_2 < \cdots$$

tales que

$$w_j = z_{n_j}$$

La subsucesión está, por tanto formada a partir de $\{z_n\}$ enlistando los términos de esta sucesión,

$$z_1, z_2, z_3, \ldots$$

y eligiendo después, en orden de izquierda a derecha, algunos de los z_j para formar una sucesión nueva. Una subsucesión es una sucesión por sí misma pero consiste en términos selectos de una sucesión dada de antemano.

EJEMPLO 8.25

Sea $z_n = i^n$. Puede definir muchas subsucesiones de $\{z_n\}$, veamos una. Sea

$$w_j = z_{4j}$$

para $j = 1, 2, \ldots$. Entonces cada $w_j = z_{4j} = i^{4j} = 1$, y todo término de esta subsucesión es igual a 1. Aquí $n_j = 4j$ en la definición. ■

Si una sucesión converge, entonces toda subsucesión de ella converge al mismo límite. Para ver esto, suponga que $z_n \to L$. Sea D un disco abierto alrededor de L. Entonces "eventualmente" (esto es, para n suficientemente grande), todo z_n está en D. Si $\{w_j\}$ es una subsucesión, entonces cada $w_j = z_{n_j}$, así eventualmente todos estos términos estarán también en D y la subsucesión también converge a L.

Sin embargo, una subsucesión de una sucesión divergente puede diverger, o puede converger, como muestra el ejemplo 8.25. La sucesión $\{i^n\}$ diverge, pero puede elegir una subsucesión que tenga todos sus términos iguales a 1, y esta subsucesión converge a 1.

También es posible que una sucesión divergente no tenga subsucesiones convergentes. Por ejemplo, sea $z_n = ni$. Esta sucesión diverge, y no es posible elegir una subsucesión que converja. Ahora no importa qué subsucesión se elija, sus términos crecerán sin cota conforme avance en la subsucesión.

En este ejemplo, la sucesión $\{ni\}$ no está acotada, por tanto es divergente, y cualquier subsucesión tampoco está acotada y es divergente. Obtendrá un resultado más interesante para sucesiones acotadas.

DEFINICIÓN 8.11 ***Sucesión acotada***

$\{z_n\}$ es una sucesión acotada si para algún número M, $|z_n| \leq M$ para $n = 1, 2, \ldots$.

Alternativamente, una sucesión está acotada si existe algún disco que contenga todos sus elementos. Toda sucesión acotada, convergente o no, tiene una subsucesión convergente.

TEOREMA 8.8

Sea $\{z_n\}$ una sucesión acotada. Entonces $\{z_n\}$ tiene una subsucesión convergente. ■

Este resultado tiene consecuencias importantes, por ejemplo, en el teorema integral de Cauchy. Suponga el resultado correspondiente para una sucesión acotada real, la conclusión para una sucesión acotada compleja se sigue del teorema 8.6.

Prueba Sea $z_n = x_n + iy_n$ una sucesión acotada. Entonces $\{x_n\}$ es una sucesión real acotada, de manera que tiene una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ que converge a algún número real a. Pero entonces $\{y_{n_j}\}$ también es una sucesión real acotada, y así tiene una subsucesión convergente $\{y_{n_{jk}}\}$ que converge a algún número real b. Usando estos índices, se forma la subsucesión $\{x_{n_{jk}}\}$ de $\{x_{nj}\}$. Esta subsucesión también converge a a. Entonces $\{x_{n_{jk}} + iy_{n_{jk}}\}$ es una subsucesión de $\{z_n\}$ que converge a $a + ib$.

8.2.9 Compactibilidad y el teorema de Bolzano-Weierstrass

DEFINICIÓN 8.12 ***Conjunto acotado***

Un conjunto K de números complejos está acotado si, para algún número M, $|z| \leq M$ para todo z en K.

Un conjunto acotado es, por tanto, uno cuyos puntos no pueden estar arbitrariamente lejos del origen. Ciertamente cualquier conjunto finito está acotado, como cualquier disco abierto o cerrado. El conjunto de puntos in, para n entero, no está acotado.

Los conceptos de conjunto cerrado y conjunto acotado son independientes. Sin embargo, cuando son combinados, caracterizan a unos conjuntos que tienen propiedades que son importantes en el análisis de funciones complejas. Tales conjuntos se llaman *compactos*.

DEFINICIÓN 8.13 Conjunto compacto

Un conjunto K de números complejos es compacto si es cerrado y acotado.

Cualquier disco cerrado es compacto, mientras que un disco abierto no lo es (no es cerrado). El conjunto de puntos in para n entero no es compacto ya que no está acotado (a pesar de ser cerrado). Cualquier conjunto finito es compacto.

Ahora probará que cualquier conjunto compacto infinito debe contener al menos un punto límite. Este es un resultado notable, ya que los conjuntos cerrados no tienen que contener (o incluso tener) ningún punto límite, y los conjuntos acotados no necesitan tener puntos límite.

TEOREMA 8.9 Bolzano-Weierstrass

Sea K un conjunto compacto infinito de números complejos. Entonces K contiene un punto límite. ■

Prueba Como K es cerrado, cualquier punto límite de K debe estar en K. Se concentrará por tanto en demostrar que hay un punto límite de K.

Elija cualquier número z_1 en K. Debido a que K es infinito, puede elegir un segundo número z_2 en K, distinto de z_1. Ahora elija algún z_3 en K distinto de z_1 y z_2 y continúe este proceso. De esta manera genera una sucesión infinita $\{z_n\}$ de puntos distintos en K. Como K es un conjunto acotado, esta sucesión es acotada. Por tanto, $\{z_n\}$ contiene una subsucesión $\{z_{n_j}\}$ que converge a algún número L. Como cada término de esta sucesión es distinto de todos los demás, elija la subsucesión de manera que ningún z_{n_j} sea igual a L. Por el teorema 8.7, L es un punto límite de K. ■

Ahora está listo para empezar el cálculo de funciones complejas.

SECCIÓN 8.2 PROBLEMAS

En cada problema del 1 al 11, determine el conjunto de todos los puntos z que satisfacen la ecuación o la desigualdad dada. En algunos casos puede ser conveniente que especifique el conjunto con un diagrama claramente etiquetado.

1. $|z - 8 + 4i| = 9$

2. $|z| = |z - i|$

3. $|z|^2 + \mathrm{Im}(z) = 16$

4. $|z - i| + |z| = 9$

5. $|z| + \mathrm{Re}(z) = 0$

6. $z + \overline{z}^2 = 4$

7. $\mathrm{Im}(z - i) = \mathrm{Re}(z + 1)$

8. $|z| = \mathrm{Im}(z - i)$

9. $|z + 1 + 6i| = |z - 3 + i|$

10. $|z - 4i| \leq |z + 1|$

11. $|z + 2 + i| > |z - 1|$

En cada problema del 12 al 19, un conjunto de puntos (números complejos) está dado. Determine si el conjunto es abierto, cerrado, abierto y cerrado, o ni abierto ni cerrado. Determine todos los puntos límite del conjunto, todos los puntos frontera, y la frontera del conjunto. También determine si el conjunto es compacto.

12. S es el conjunto de todos los puntos z con $|z| > 2$.

13. K es el conjunto de todos los puntos z que satisfacen $|z - 1| \leq |z + 4i|$.

14. T es el conjunto de los puntos z con $4 \leq |z + i| \leq 8$.

15. M consiste en todos los puntos z con $\mathrm{Im}(z) < 7$.

16. R es el conjunto de todos los números complejos $1/m + (1/n)i$, en donde m y n pueden ser enteros positivos.

17. U es el conjunto de todos los puntos z tal que $1 < \mathrm{Re}(z) \leq 3$.

18. V es el conjunto de todos los puntos z tal que $2 < \mathrm{Re}(z) \leq 3$ y $-1 < \mathrm{Im}(z) < 1$.

19. W consiste en todos los puntos z tales que $\text{Re}(z) > (Im(z))^2$.

20. Suponga que S es un conjunto finito de números complejos, a saber consiste en los números $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

(a) Pruebe que S no tiene punto límite.

(b) Pruebe que todo z_j es un punto frontera de S.

(c) Pruebe que S es cerrado.

En cada problema del 21 al 27, encuentre el límite de la sucesión, o establezca que la sucesión diverge.

21. $\left\{1 + \frac{2in}{n+1}\right\}$

22. $\{i^{2n}\}$

23. $\left\{\frac{1+2n^2}{n^2} - \frac{n-1}{n}i\right\}$

24. $\{e^{n\pi i/3}\}$

25. $\{-(i^{4n})\}$

26. $\{\text{sen}(n)i\}$

27. $\left\{\frac{1+3n^2 i}{2n^2 - n}\right\}$

28. Considere la sucesión $\{e^{n\pi i/3}\}$ del problema 24. Encuentre dos subsucesiones convergentes diferentes de esta sucesión.

29. Encuentre dos subsucesiones convergentes diferentes de la sucesión $\{i^{2n}\}$ del problema 22.

LÍMITES, CONTINUIDAD, Y DERIV
ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMAN
SERIES DE POTENCIAS LA EXPONENCIAL
Y FUNCIONES TRIGO

CAPÍTULO 9

Funciones complejas

9.1 Límites, continuidad y derivadas

Una *función compleja* es una función que está definida para los números complejos en algún conjunto S y toma valores complejos. Si $\mathfrak{C}$ denota al conjunto de los números complejos, y f es tal función, entonces $f : S \to \mathfrak{C}$. Esto simplemente significa que $f(z)$ es un número complejo para cada z en S. El conjunto S se llama el *dominio* de f. Por ejemplo, sea S consistente de todos los z con $|z| < 1$ y se define $f(z) = z^2$ para z en S. Entonces $f : S \to \mathfrak{C}$ f es una función compleja.

Con frecuencia se define una función por alguna expresión explícita en z, por ejemplo,

$$f(z) = \frac{z+i}{z^2+4}.$$

Si no se especifica el dominio S, se acuerda permitir a todo z para el cual la expresión $f(z)$ esté definida. Dicha función está, por tanto, definida para todo complejo z excepto $2i$ y $-2i$.

9.1.1 Límites

La notación de límite para una función compleja está modelada a partir de la de funciones con valores reales, reemplazando intervalos por discos.

DEFINICIÓN 9.1 Límite

Sea $f : S \to \mathfrak{C}$ una función compleja y sea z_0 un punto límite de S. Sea L un número complejo. Entonces

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

si, y sólo si, dado $\epsilon > 0$, existe un número positivo δ tal que

$$|f(z) - L| < \epsilon$$

para todo z en S tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta.$$

Cuando $\text{lím}_{z \to z_0} f(z) = L$, L es el límite de $f(z)$ conforme z se acerca a z_0.

Así, $\text{lím}_{z \to z_0} f(z) = L$ si es factible hacer que los valores de la función $f(z)$ estén arbitrariamente cercanos (a menos de ϵ) a L eligiendo z en S (de manera que $f(z)$ esté definida) y suficientemente cerca (a menos de δ) a z_0, pero de hecho no igual a z_0. La condición $0 < |z - z_0| < \delta$ excluye al punto z_0. Sólo interesa el comportamiento de $f(z)$ en otros puntos cercanos a z_0.

Dicho de otra manera, dado un disco abierto D_ϵ de radio ϵ alrededor de L, debe encontrar un disco abierto D_δ de radio δ alrededor de z_0 de manera que cada punto en D_δ, excepto el mismo z_0, que también está en S, es mandado por la función a D_ϵ. Esto se ilustra en la figura 9.1.

Aunque en esta definición no se pide que $f(z_0)$ esté definida, sí requiere que haya puntos arbitrariamente cercanos a z_0 en los cuales $f(z)$ está definida. Esto se asegura haciendo que z_0 sea un punto límite de S y es la razón por la cual se hace este requerimiento en la definición. No tiene sentido hablar de un límite de $f(z)$, conforme z se acerca a z_0, si $f(z)$ no está definida conforme z se acerca a z_0.

Aun si $f(z_0)$ está definida, no se está pidiendo que $f(z_0) = L$.

EJEMPLO 9.1

Sea

$$f(z) = \begin{cases} z^2 & \text{para } z \neq i \\ 0 & \text{para } z = i \end{cases}.$$

Entonces $\text{lím}_{z \to i} f(z) = -1$, pero el límite no es igual a $f(0)$. Aun si $f(0)$ no estuviera definida, todavía podría tener $\text{lím}_{z \to i} f(z) = -1$. ■

Frecuentemente se escribe

$$f(z) \to L \quad \text{conforme } z \to z_0$$

cuando $\text{lím}_{z \to z_0} f(z) = L$.

Muchos teoremas de límite del cálculo real también son válidos para funciones complejas. Suponga que $\text{lím}_{z \to z_0} f(z) = L$ y $\text{lím}_{z \to z_0} g(z) = K$. Entonces

$$\text{lím}_{z \to z_0} [f(z) + g(z)] = L + K,$$

$$\text{lím}_{z \to z_0} [f(z) - g(z)] = L - K,$$

$$\text{lím}_{z \to z_0} cf(z) = cL \quad \text{para cualquier número } c,$$

$$\text{lím}_{z \to z_0} [f(z)g(z)] = LK,$$

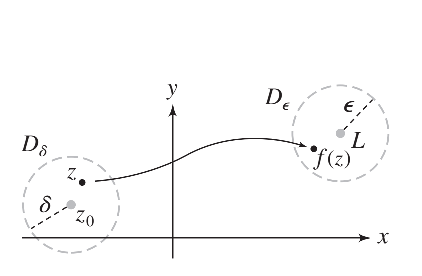


FIGURA 9.1 $\text{lím}_{z\to a} f(z) = L$.

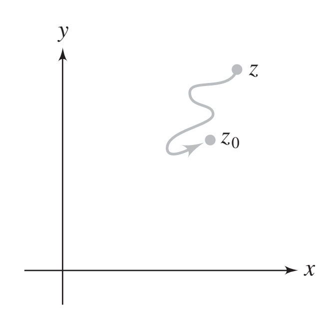


FIGURA 9.2 *z se aproxima a z_0 a lo largo de cualquier trayectoria en la definición de* $\text{lím}_{z\to z_0} f(z)$.

y, si $K \neq 0$,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{L}{K}.$$

Una diferencia significativa entre los límites de funciones complejas y los límites de funciones reales es la manera en que la variable se aproxima al punto. Para una función real g, $\text{lím}_{x\to a}\, g(x)$ involucra el comportamiento de $g(x)$ conforme x se aproxima a a por cualquier lado. En la recta hay sólo dos maneras de que x pueda aproximarse a a. Pero $\text{lím}_{z\to z_0} f(z) = L$ involucra el comportamiento de $f(z)$ conforme z se aproxima a z_0 en el plano complejo (o en un conjunto específico S de valores aceptables) y esto puede involucrar que z se aproxime a z_0 desde cualquier dirección (figura 9.2). Los números $f(z)$ deben aproximarse a L a lo largo de cualquier trayectoria de aproximación de z a z_0 en S. Si a lo largo de una sola trayectoria de aproximación de z a z_0, $f(z)$ no se aproxima a L, entonces $f(z)$ no tiene límite L ahí. Esto hace que $\text{lím}_{z\to z_0} f(z) = L$ en el plano complejo sea un enunciado más fuerte que su contraparte real, exigiendo más de $f(z)$ para z cerca de z_0 que lo que se exige a funciones reales. Más adelante se profundizará en este hecho para obtener propiedades acerca de las funciones complejas.

9.1.2 Continuidad

DEFINICIÓN 9.2

Una función compleja $f: S \to \mathfrak{C}$ es *continua* en un número z_0 en S si, y sólo si

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

f es continua en un conjunto K si f es continua en cada punto de K. En particular, si f es continua en todo punto z para el cual $f(z)$ está definida, entonces f es una función continua.

Muchas funciones familiares son continuas. Cualquier polinomio es continuo para todo punto z, y cualquier función racional (cociente de polinomios) es continua si su denominador es distinto de cero. Cuando tenga versiones complejas de las funciones trigonométricas y exponenciales, verá que también son continuas.

Si f es continua en z_0, también lo es $|f|$. Debe esperar esto. Si conforme se elige z más cerca de z_0, $f(z)$ llega a estar más cerca de $f(z_0)$, entonces es razonable que $|f(z)|$ se aproxime a $|f(z_0)|$. Más rigurosamente,

$$0 \leq ||f(z)| - |f(z_0)|| \leq |f(z) - f(z_0)| \to 0$$

si $\text{lím}_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Si $\{z_n\}$ es una sucesión de números complejos y cada $f(z_n)$ está definida, entonces $\{f(z_n)\}$ también es una sucesión compleja. Por ejemplo, si $f(z) = 2z^2$ y $z_n = 1/n$, entonces $f(z_n) = 2/n^2$. Se afirma que $\{f(z_n)\}$ converge si $\{z_n\}$ converge, cuando f es continua. Otra manera de decir esto es que la continuidad conserva la convergencia de sucesiones.

TEOREMA 9.1

Sea $f : S \to \mathfrak{C}$ continua, y sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos en S. Si $\{z_n\}$ converge a un número w en S, entonces $\{f(z_n)\}$ converge a $f(w)$. ■

Aquí está la idea detrás del teorema. Como f es continua en w, entonces $\lim_{z\to w} f(z) = f(w)$. Esto significa que $f(z)$ debe aproximarse a $f(w)$ a lo largo de cualquier trayectoria de aproximación de z a w en S. Pero, si $z_n \to w$, las z_n determinan una trayectoria de aproximación de la variable z a w. Entonces $f(z)$ debe aproximarse a $f(w)$ a lo largo de esta trayectoria, y por tanto $f(z_n) \to f(w)$.

También se puede probar el recíproco del teorema 9.1. Si $f(z_n) \to f(w)$ para *toda* sucesión $\{z_n\}$ de puntos de S que converge a w, entonces f es continua en w.

Ahora desarrolle una propiedad importante de funciones continuas. Primero, defina una función compleja (continua o no) acotada, si los números $f(z)$ no se vuelven arbitrariamente grandes en magnitud.

DEFINICIÓN 9.3 ***Función acotada***

Sea $f : S \to \mathfrak{C}$. Entonces f es una función acotada si existe un número positivo M tal que

$$|f(z)| \leq M$$

para todo z en S.

Alternativamente, f está acotada si existe un disco alrededor del origen que contiene todos los números $f(z)$ para z en S.

Una función continua no necesita ser acotada ($f(z) = 1/z$ para $z \neq 0$). Sin embargo, una función continua definida en un conjunto compacto está acotada. Esto es análogo al resultado de que toda función real que es continua en un intervalo cerrado es acotada. En la recta real, los intervalos cerrados son conjuntos compactos.

TEOREMA 9.2

Sea $f : S \to \mathfrak{C}$. Suponga que S es compacto y f es continua en S. Entonces f es acotada. ■

Prueba Suponga que f no es acotada. Entonces, si n es un entero positivo, el disco de radio n alrededor del origen no puede contener todas las $f(z)$ para z en S. Esto significa que hay algún z_n en S tal que $|f(z_n)| > n$.

Ahora $\{z_n\}$ es una sucesión de puntos en el conjunto acotado S, por tanto tiene una subsucesión convergente $\{z_{n_j}\}$. Esta subsucesión converge a w. Entonces w es un punto límite de S, y S es cerrado, de manera que w también está en S.

Debido a que f es continua, $f(z_{n_j}) \to f(w)$. Entonces, para algún N, es posible hacer que cada $f(z_{n_j})$ esté en el disco abierto de radio 1 alrededor de w eligiendo $n_j \geq N$. Pero esto contradice el hecho de que cada $|f(z_{n_j})| > n_j$. Por tanto, f debe ser una función acotada. ■

Es factible mejorar este teorema de la siguiente manera. Además de ser acotada, se afirma, bajo las condiciones del teorema anterior que, $|f(z)|$, que es un valor real, alcanza un máximo y un mínimo en S.

TEOREMA 9.3

Sea $f : S \to \mathfrak{C}$ continua, y suponga que S es compacto. Entonces existen números z_1 y z_2 en S tales que, para todo z en S,

$$|f(z_1)| \le |f(z)| \le |f(z_2)|. \blacksquare$$

9.1.3 La derivada de una función compleja

DEFINICIÓN 9.4 Derivada

Sea $f : S \to \mathfrak{C}$ y suponga que S es un conjunto abierto. Sea z_0 en S. Entonces f es diferenciable en z_0 si, para algún número complejo L,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = L.$$

En este caso llamamos L a la derivada de f en z_0 y la denota por $f'(z_0)$.

Si f es diferenciable en cada punto de un conjunto, entonces f es diferenciable en este conjunto.

La razón para pedir S abierto en la definición es estar seguros que existe algún disco abierto alrededor de z_0 en donde $f(z)$ esté definida. Cuando el número complejo h es en magnitud suficientemente pequeño, entonces $z_0 + h$ está en el disco y $f(z_0 + h)$ está definida. Esto permite que h se aproxime a cero desde cualquier dirección en el límite que define la derivada. Esto tendrá ramificaciones importantes en las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

EJEMPLO 9.2

Sea $f(z) = z^2$ para todo complejo z. Entonces

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2z+h) = 2z$$

para todo z. $\blacksquare$

Para funciones familiares tales como los polinomios, se aplican las reglas usuales para derivadas. Por ejemplo, si n es un entero positivo y $f(z) = z^n$, entonces $f'(z) = nz^{n-1}$. Cuando desarrolle la función compleja seno $f(z) = \text{sen}(z)$, verá que $f'(z) = \cos(z)$. Otras fórmulas familiares de derivadas son:

$$(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z),$$

$$(f-g)'(z) = f'(z) - g'(z),$$

$$(cf)'(z) = cf'(z),$$

$$(fg)'(z) = f(z)g'(z) + f'(z)g(z),$$

y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2} \quad \text{si } g(z) \neq 0.$$

Estas conclusiones suponen que las derivadas involucradas existen. También hay una versión compleja para la regla de la cadena. Recuerde que la composición de dos funciones está definida por

$$(f \circ g)(z) = f(g(z)).$$

La regla de la cadena para diferenciar una composición es

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z),$$

suponiendo que g es diferenciable en z y f es diferenciable en $g(z)$.

Frecuentemente $f'(z)$ se denota usando la notación de Leibniz

$$\frac{df}{dz}.$$

En esta notación, la regla de la cadena es

$$\frac{d}{dz}(f(g(z)) = \frac{df}{dw}\frac{dw}{dz},$$

donde $w = g(z)$.

No todas las funciones son diferenciables.

EJEMPLO 9.3

Sea $f(z) = \overline{z}$. Demostrará que f no es diferenciable en ningún punto. Para ver por qué esto es cierto, calcule

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\overline{z+h} - \overline{z}}{h} = \frac{\overline{h}}{h}.$$

Busque el límite de este cociente conforme $h \to 0$. Pero este límite está en el plano complejo, y el número complejo h debe poder aproximarse a cero a lo largo de cualquier trayectoria. Si h se aproxima a cero a lo largo del eje real, entonces h es real, $\overline{h} = h$ y $\overline{h}/h = 1 \to 1$. Pero si h se aproxima a cero a lo largo del eje imaginario, entonces $h = ik$ para k real, y

$$\frac{\overline{h}}{h} = \frac{-ik}{ik} = -1 \to -1$$

conforme $k \to 0$. El cociente $\overline{h}/h$ se acerca a números distintos conforme h se aproxima a cero a lo largo de trayectorias distintas. Esto significa que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h}$$

no existe, de manera que f no tiene derivada en ningún punto. ■

Como en el caso de las funciones reales, una función compleja diferenciable es continua.

TEOREMA 9.4

Sea f diferenciable en z_0. Entonces f es continua en z_0. ■

Prueba Sabe que

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}-f'(z_0)\right)=0.$$

Sea

$$\epsilon(h)=\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}-f'(z_0).$$

Entonces $\lim_{h\to 0}\epsilon(h)=0$. Más aún,

$$f(z_0+h)-f(z_0)=hf'(z_0)+h\epsilon(h).$$

Como el lado derecho tiene límite cero conforme $h\to 0$, entonces

$$\lim_{h\to 0}[f(z_0+h)-f(z_0)]=0.$$

Esto es lo mismo que

$$\lim_{h\to 0}f(z_0+h)=f(z_0),$$

que a su vez implica que $\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$. Por tanto, f es continua en z_0. ■

9.1.4 Las ecuaciones de Cauchy-Riemann

Obtendrá un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales que deberán ser satisfechas por las partes real e imaginaria de una función compleja diferenciable. Estas ecuaciones también juegan un papel importante en la teoría del potencial y en el tratamiento del problema de Dirichlet.

Sea f una función compleja. Si $z=x+iy$, siempre escriba

$$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y),$$

en donde u y v son funciones con valores reales de las dos variables reales x y y. Entonces

$$u(x,y)=\text{Re}[f(z)] \quad \text{y} \quad v(x,y)=\text{Im}[f(z)].$$

EJEMPLO 9.4

Sea $f(z)=1/z$ para $z\neq 0$. Entonces

$$f(x+iy)=\frac{1}{x+iy}=\frac{1}{x+iy}\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Para esta función

$$u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{y} \quad v(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}.$$ ■

Ahora obtendrá una relación entre las derivadas parciales de u y v en cualquier punto donde f es diferenciable.

TEOREMA 9.5 *Ecuaciones de Cauchy-Riemann*

Sea $f: S\to\mathfrak{C}$, con S un conjunto abierto. Escriba $f=u+iv$. Suponga que $z=x+iy$ es un punto de S y $f'(z)$ existe. Entonces, en (x, y),

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Prueba Empiece con

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Sabe que este límite existe, entonces debe tener el mismo valor, $f'(z)$, sin importar cómo se aproxima h a cero. Considere dos trayectorias de aproximación de h al origen.

Primero, sea $h \to 0$ a lo largo del eje real (figura 9.3). Ahora h es real, y $z + h = x + h + iy$. Entonces

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h, y) + iv(x+h, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

FIGURA 9.3

Ahora, tome el límite a lo largo del eje imaginario (figura 9.4). Ponga $h = ik$ con k real, así $h \to 0$ conforme $k \to 0$. Ahora $z = x + i(y + k)$ y

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{k\to 0} \frac{u(x, y+k) + iv(x, y+k) - u(x, y) - iv(x, y)}{ik} \\ &= \lim_{k\to 0} \left(\frac{1}{i} \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{k} + \frac{v(x, y+k) - v(x, y)}{k} \right) \\ &= -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}, \end{aligned}$$

FIGURA 9.4

en donde ha usado el hecho que $1/i = -i$.

Ahora tiene dos expresiones para $f'(z)$, de manera que deben ser iguales:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Haciendo la parte real del lado izquierdo igual a la parte real del lado derecho, y después la parte imaginaria del lado izquierdo a la parte imaginaria del lado derecho, se obtienen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. ■

Un resultado extra que se obtiene de esta prueba es que también ha obtenido fórmulas para $f'(z)$ en términos de las partes real e imaginaria de $f(z)$. Por ejemplo, si $f(z) = z^3$, entonces

$$f(z) = f(x+iy) = (x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3).$$

Entonces

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 \quad \text{y} \quad v(x, y) = 3x^2y - y^3,$$

de manera que

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \left(3x^2 - 3y^2\right) + i\,(6xy)\,.$$

Esto muestra automáticamente las partes real e imaginaria de $f'(z)$. Por supuesto, para esta función sencilla es igualmente fácil escribir directamente

$$f'(z) = 3z^2 = 3(x+iy)^2 = 3(x^2 - y^2) + 6xyi.$$

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann constituyen una condición necesaria para que f sea diferenciable en un punto. Si no se satisfacen, entonces $f'(z)$ no existe en ese punto.

EJEMPLO 9.5

Sea $f(z) = \overline{z}$. Entonces $f(z) = x - iy$ y $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$. Ahora

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y},$$

así las ecuaciones de Cauchy-Riemann no se cumplen para f, en cualquier punto, y por tanto f no es diferenciable en ningún punto. ■

EJEMPLO 9.6

Sea $f(z) = z\,\mathrm{Re}(z)$. Entonces

$$f(x+iy) = (x+iy)x = x^2 + ixy,$$

así $u(x, y) = x^2$ y $v(x, y) = xy$. Ahora

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y.$$

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann no se cumplen en ningún punto excepto en $z = 0$. Esto significa que f no es diferenciable en z si $z \neq 0$, pero puede tener derivada en 0. De hecho, esta función es diferenciable en 0, ya que

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \mathrm{Re}(h) = 0. \text{ ■}$$

Mientras que las ecuaciones de Cauchy-Riemann son condiciones necesarias para la diferenciabilidad, no son suficientes. Si las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en un punto z, entonces f puede o no ser diferenciable en z. En el ejemplo anterior, las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en el origen y $f'(0)$ existe. A continuación un ejemplo en el cual las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en el origen, pero f no tiene derivada ahí.

EJEMPLO 9.7

Sea

$$f(z) = \begin{cases} z^5/|z|^4 & \text{para } z \neq 0 \\ 0 & \text{para } z = 0 \end{cases}.$$

Demostrará que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en $z = 0$ pero que f no es diferenciable en 0. Primero algo de álgebra para obtener

$$u(x, y) = \frac{5xy^4 - 10x^3y^2 + x^5}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0),$$

$$v(x, y) = \frac{y^5 - 10x^2y^3 + 5x^4y}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0),$$

y

$$u(0,0) = v(0,0) = 0.$$

Calcule las derivadas parciales en el origen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(h,0) - u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^5}{hh^4} = 1;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(0,h) - u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{v(h,0) - v(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0;$$

y

$$\frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{v(0,h) - v(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^5}{hh^4} = 1.$$

Por tanto, las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en el origen. Sin embargo, f no es diferenciable en 0. Considere

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h^5}{h\,|h|^4} = \frac{h^5}{h(h\overline{h})^2} = \frac{h^2}{(\overline{h})^2} = \left(\frac{h}{\overline{h}}\right)^2.$$

Asegure que $(h/\overline{h})^2$ no tiene límite conforme $h \to 0$. Esto se puede ver fácilmente convirtiendo a la forma polar. Si $h = re^{i\theta}$, entonces $\overline{h} = re^{-i\theta}$ y

$$\left(\frac{h}{\overline{h}}\right)^2 = \frac{r^2 e^{2i\theta}}{r^2 e^{-2i\theta}} = e^{4i\theta}.$$

En la recta que forma un ángulo θ con el eje real positivo (figura 9.5), el cociente

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

tiene el valor constante $e^{4i\theta}$, y así se aproxima a este número conforme $h \to 0$. Por tanto, el cociente de las diferencias se aproxima a valores diferentes a lo largo de distintas trayectorias, y así no tiene límite conforme $h \to 0$. ■

Este ejemplo significa que debe agregar algunas condiciones a las ecuaciones de Cauchy-Riemann para garantizar la existencia de la derivada en un punto. El siguiente teorema da las condiciones suficientes para la diferenciabilidad.

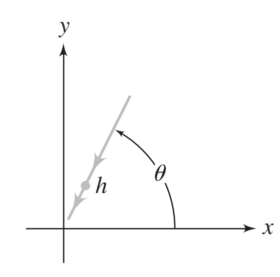


FIGURA 9.5

TEOREMA 9.6

Sea $f: S \to \mathfrak{C}$ una función compleja, con S un conjunto abierto. Sea $f = u + iv$. Suponga que u, v y sus primeras derivadas parciales son continuas en S. Asimismo u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en S. Entonces f es diferenciable en cada punto de S. ■

En cálculo real, una función cuya derivada es cero en todo un intervalo debe ser constante en ese intervalo. Aquí está el análogo complejo de este resultado, junto con otro resultado que necesitará más adelante.

TEOREMA 9.7

Sea f diferenciable en un disco abierto D. Sea $f = u + iv$ y suponga que u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann y son continuas con primeras derivadas parciales continuas en D. Entonces,

1. Si $f'(z) = 0$ para todo z en D, entonces $f(z)$ es constante en D.
2. Si $|f(z)|$ es constante en D, también lo es $f(z)$.

Prueba Para probar (1), recuerde que en la prueba del teorema 9.5, para z en D,

$$f'(z) = 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Pero entonces $\partial u/\partial x$ y $\partial v/\partial x$ son cero en todo D. Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $\partial u/\partial y$ y $\partial v/\partial y$ también son cero en cada punto de D. Entonces $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son constantes en D, y también lo es $f(z)$.

Para (2), suponga que $|f(z)| = k$ para todo z en D. Entonces

$$|f(z)|^2 = u(x, y)^2 + v(x, y)^2 = k^2 \tag{9.1}$$

para (x, y) en D. Si $k = 0$, entonces $|f(z)| = 0$ para todo z en D, entonces $f(z) = 0$ en D. Si $k \neq 0$, deriva respecto a x la ecuación (9.1) para obtener

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{9.2}$$

Deriva respecto a y la ecuación (9.1) para obtener

$$u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{9.3}$$

Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, las ecuaciones (9.2) y (9.3) pueden escribirse como

$$u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{9.4}$$

y

$$u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{9.5}$$

Al multiplicar la ecuación (9.4) por u y la ecuación (9.5) por v y sumar las ecuaciones resultantes obtiene

$$(u^2 + v^2)\frac{\partial u}{\partial x} = k^2\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Por tanto,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

para todo (x, y) en D. Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

en todo D. Ahora una manipulación semejante muestra que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

en D. Por tanto, $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son constantes en D, así que $f(z)$ también es constante. ■

SECCIÓN 9.1 PROBLEMAS

En cada problema del 1 al 12, encuentre u y v de manera que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, determine todos los puntos (si los hay) en donde las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfagan, y determine todos los puntos en donde la función es diferenciable. Se pueden suponer todos los resultados familiares acerca de la continuidad de funciones reales de dos variables.

1. $f(z) = z - i$
2. $f(z) = z^2 - iz$
3. $f(z) = |z|$
4. $f(z) = \dfrac{2z + 1}{z}$
5. $f(z) = i|z|^2$
6. $f(z) = z + \text{Im}(z)$
7. $f(z) = \dfrac{z}{\text{Re}(z)}$
8. $f(z) = z^3 - 8z + 2$
9. $f(z) = \overline{z}^2$
10. $f(z) = iz + |z|$
11. $f(z) = -4z + \dfrac{1}{z}$
12. $f(z) = \dfrac{z - i}{z + i}$

9.2 Series de potencias

Ahora sabe algunos resultados acerca de la continuidad y la diferenciabilidad. Sin embargo, las únicas funciones complejas que tiene hasta ahora son los polinomios y las funciones racionales. Un polinomio complejo es una función

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n,$$

en donde las a_j son números complejos, y una función racional es un cociente de polinomios,

$$R(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}.$$

Los polinomios son diferenciables para todo z, y una función racional es diferenciable para todo z en donde el denominador no sea cero.

El vehículo para enriquecer nuestro catálogo de funciones, obteniendo funciones exponenciales y trigonométricas, logaritmos, funciones de potencias, y otras, es la serie de potencias. Construirá las series de potencias complejas usando algunos resultados acerca de las series de constantes.

9.2.1 Series de números complejos

Suponga resultados estándares acerca de las series de números reales. Considere una serie compleja $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, con cada c_n un número complejo. La N-ésima *suma parcial* de la serie es la suma finita $\sum_{n=1}^{N} c_n$. La sucesión $\{\sum_{n=1}^{N} c_n\}$ es la *sucesión de sumas parciales* de esta serie, y la serie converge si, y sólo si esta sucesión de sumas parciales converge.

Si $c_n = a_n + ib_n$, entonces

$$\sum_{n=1}^{N} c_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + i\sum_{n=1}^{N} b_n,$$

de manera que $\{\sum_{n=1}^{N} c_n\}$ converge si, y sólo si las sumas parciales reales $\sum_{n=1}^{N} a_n$ y $\sum_{n=1}^{N} b_n$ convergen conforme $N \to \infty$. Más aún, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = A + iB.$$

Por tanto, puede estudiar cualquier serie de constantes complejas considerando dos series de constantes reales, para las cuales los criterios están disponibles (criterio de la razón, criterio de la raíz, criterio de comparación, etcétera).

Como en las series reales, si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge, entonces necesariamente $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

En algunos casos no sólo probaremos que la serie converge sino que es factible encontrar su suma. La serie geométrica es un ejemplo importante de esto que usará con frecuencia.

EJEMPLO 9.8

Considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$, con z un número complejo dado. Una serie que suma potencias sucesivas de un número se llama *serie geométrica*. Puede sumar esta serie como sigue. Sea

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} z^n = z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{N-1} + z^N.$$

Entonces

$$zS_N = z^2 + z^3 + \cdots + z^N + z^{N+1},$$

si resta esta suma finita, la mayoría de los términos se cancelan y queda

$$S_N - zS_N = (1-z)S_N = z - z^{N+1}.$$

Entonces, para $z \neq 1$,

$$S_N = \frac{z}{1-z} - \frac{1}{1-z}z^{N+1}.$$

Si $|z| < 1$, entonces $|z|^{N+1} \to 0$ conforme $N \to \infty$, entonces también $z^{N+1} \to 0$ y en este caso la serie geométrica converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \lim_{N\to\infty} S_N = \frac{z}{1-z}.$$

Si $|z| \geq 1$, la serie geométrica diverge. ■

Algunas veces tiene una serie geométrica con el primer término igual a 1. Esta es la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n = 1 + \frac{z}{1-z} = \frac{1}{1-z} \quad \text{si } |z| < 1.$$

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *converge absolutamente* si la serie real $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ converge.

TEOREMA 9.8

Si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge absolutamente, entonces esta serie converge. ■

Prueba Sea $c_n = a_n + ib_n$. Suponga que $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ converge. Como $0 \leq |a_n| \leq |c_n|$, entonces por comparación, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Análogamente, $0 \leq |b_n| \leq |c_n|$, así $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + ib_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge. ■

EJEMPLO 9.9

Considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2-i}{(1+i)^n}.$$

Calcule

$$\left|(-1)^n \frac{2-i}{(1+i)^n}\right| = \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{2})^n}.$$

Ahora la serie real $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{5}/(\sqrt{2})^n$ converge. Esto es $\sqrt{5}$ veces la serie geométrica real $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(\sqrt{2})^n$, la cual converge ya que $1/\sqrt{2} < 1$. Por tanto, la serie compleja dada converge absolutamente, de aquí que converge.

El punto para el teorema 9.8 es que $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ es una serie real, y tiene métodos para demostrar la convergencia o divergencia de las series reales. Por tanto, puede (en el caso de convergencia absoluta) probar la convergencia de una serie compleja probando la de una serie real. Sin embargo, este acercamiento no cubre todos los casos, ya que una serie puede converger, pero no converger absolutamente. Una serie así se dice que *converge condicionalmente*. Por ejemplo, se sabe que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

converge, pero la serie de los valores absolutos de sus términos es la serie armónica divergente $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$.

Con estos antecedentes sobre las series complejas, puede abordar las series de potencias.

9.2.2 Series de potencias

DEFINICIÓN 9.5 Serie de potencias

Una *serie de potencias* es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

en donde z_0 y cada c_n son números complejos dados.

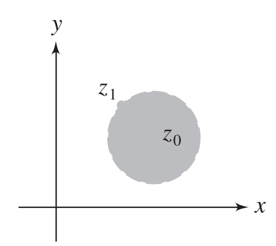


FIGURA 9.6 *Convergencia en $z_1 \neq z_0$ implica convergencia en $|z - z_0| < r = |z_1 - z_0|$.*

La sumatoria en una serie de potencias empieza en $n = 0$ para permitir un término constante:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots .$$

El número z_0 es el *centro* de la serie, y los números c_n son sus *coeficientes*.

Dada una serie de potencias, quiere saber para qué valores de z, si los hay, la serie converge. Indudablemente cualquier serie de potencias converge en su centro $z = z_0$, ya que entonces la serie es únicamente c_0. El siguiente teorema proporciona la clave para determinar si hay otros valores de z para los cuales converge. Dice que si encontramos un punto $z_1 \neq z_0$ donde la serie de potencias converge, entonces la serie debe converger absolutamente al menos para todo punto que esté más cerca de z_0 que z_1. Esto da convergencia (absoluta) al menos en los puntos interiores del disco de la figura 9.6.

TEOREMA 9.9

Suponga que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ converge para algún z_1 distinto de z_0. Entonces la serie de potencias converge absolutamente para todo z que satisfaga

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0| .$$

Prueba Suponga que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1 - z_0)^n$ converge. Entonces $\text{lím}_{n\to\infty} c_n(z_1 - z_0)^n = 0$. Entonces, para algún N,

$$\left|c_n(z_1 - z_0)^n\right| < 1 \quad \text{si } n \geq N.$$

Entonces, para $n \geq N$,

$$\left|c_n(z - z_0)^n\right| = |c_n| \left|\frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^n}\right| \left|(z_1 - z_0)^n\right| \leq \left|\frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^n}\right| = \left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right|^n .$$

Pero si $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, entonces

$$\left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right| < 1$$

y la serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right|^n$$

converge. Por comparación (ya que éstas son series de números reales),

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left| c_n (z - z_0)^n \right|$$

converge. Pero entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| c_n (z - z_0)^n \right|$$

converge, de manera que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ converge absolutamente, como quería probar. ■

Aplique esta conclusión de la siguiente manera. Imagine que se encuentra en z_0 en el plano complejo. Mirando en todas las direcciones, distinguirá que no hay ningún otro punto en el cual la serie de potencias converge. En este caso, la serie converge sólo para $z = z_0$. Esta es una serie de potencias poco interesante.

Una segunda posibilidad es que vea sólo puntos en donde la serie de potencias converge. Ahora la serie de potencias converge para todo z.

La tercera posibilidad es que vea algunos puntos en los que la serie converge y otros en los que diverge. Sea R la distancia de z_0 al punto más cercano, sea ζ, en el cual la serie de potencias diverge. La distancia R es crítica en el siguiente sentido.

Si z está más lejos de z_0 que ζ, entonces la serie de potencias debe diverger en z. Ya que si convirgiera, entonces debería converger en todos los puntos que están más cercanos a z_0 que z, y por el teorema 9.9 debería converger en ζ.

Si z está más cerca de z_0 que ζ, entonces la serie de potencias debe converger a z, ya que ζ es el punto más cercano a z_0 en el que la serie diverge.

Esto significa que en el tercer caso, la serie de potencias

converge para todo z con $|z - z_0| < R$,

y

diverge para todo z con $|z - z_0| > R$.

El número R se llama el *radio de convergencia* de la serie de potencias, y el disco abierto $|z - z_0| < R$ se llama el *disco abierto de convergencia*. La serie converge dentro de este disco y diverge fuera del disco cerrado $|z - z_0| \leq R$. En puntos de la frontera de este disco, $|z - z_0| = R$, la serie puede converger o diverger.

Si la serie de potencias converge sólo para $z = z_0$, el radio de convergencia es $R = 0$. En este caso no hay un disco abierto de convergencia.

Si la serie de potencias converge para todo z, sea $R = \infty$. Ahora el disco abierto de convergencia es todo el plano complejo. En este caso es conveniente denotar al disco de convergencia como $|z - z_0| < \infty$.

Algunas veces se puede calcular el radio de convergencia para una serie de potencias usando el criterio de la razón.

EJEMPLO 9.10

Considere la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n+1} (z - 1 + 2i)^{2n}.$$

El centro es $z_0 = 1 - 2i$. Busque el radio de convergencia de la serie.

Considere la magnitud del cociente de términos sucesivos de esta serie:

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{2^{n+1}}{n+2} (z - 1 + 2i)^{2n+2}}{(-1)^n \frac{2^n}{n+1} (z - 1 + 2i)^{2n}} \right| = \frac{2(n+1)}{n+2} |z - 1 + 2i|^2$$

$$\to 2\,|z - 1 + 2i|^2 \quad \text{conforme } n \to \infty.$$

A partir del criterio de la razón para series reales, la serie de potencias convergirá absolutamente si este límite es menor que 1 y divergirá si este límite es mayor que 1. Así, la serie de potencias converge absolutamente si

$$2\,|z - 1 + 2i|^2 < 1,$$

o

$$|z - 1 + 2i| < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Y la serie diverge si

$$2\,|z - 1 + 2i|^2 > 1,$$

o

$$|z - 1 + 2i| > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

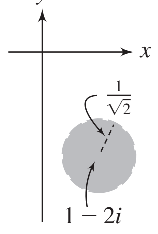


FIGURA 9.7

El radio de convergencia es $1/\sqrt{2}$ y el disco abierto de convergencia es $|z - 1 + 2i| < 1/\sqrt{2}$ (figura 9.7). ■

Suponga ahora que las series de potencia tienen un radio de convergencia positivo o infinito. Para cada z en el disco abierto de convergencia

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Esto define una función f sobre este disco. Debe explorar las propiedades de esta función, en particular si es diferenciable. Para responder a esta pregunta necesita el lema técnico.

LEMA 9.1

La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z - z_0)^{n-1}$ tienen el mismo radio de convergencia. ■

Una prueba de este lema, que está esbozada en los ejercicios, puede ser omitida pero la conclusión es importante. Establece que la diferenciación término a término de una serie de potencias no cambia el radio de convergencia. Esto significa que dentro del disco abierto de convergencia, una serie de potencias define una función diferenciable cuya derivada puede obtenerse diferenciando término a término.

TEOREMA 9.10

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ con radio de convergencia positivo o infinito. Para cada z en el disco abierto de convergencia, sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Entonces f es diferenciable en este disco abierto, y

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z - z_0)^{n-1}. \blacksquare$$

Mediante este teorema, puede diferenciar una función definida con una serie de potencias. Pero allí puede obtenerse más del teorema 9.10 que esto. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z - z_0)^{n-1}$ es una serie de potencias en sí misma, y tiene el mismo radio de convergencia que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$. Por tanto, puede aplicar este teorema a esta serie diferenciada y obtener

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(z - z_0)^{n-2}$$

dentro del disco abierto de convergencia. Más aún, continúe diferenciando tantas veces como quiera dentro de este disco. Si $f^{(k)}(z)$ denota la k-ésima derivada, entonces

$$f^{(3)}(z) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)c_n z^{n-3},$$

y en general

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)c_n(z - z_0)^{n-k}.$$

Si la k-ésima derivada es evaluada en z_0, entonces todos los términos de la serie para $f^{(k)}(z_0)$ que tienen potencias positivas de $z - z_0$ se hacen cero, dejando sólo el primer término constante en esta serie diferenciada. En este camino, obtiene

$$f(z_0) = c_0,$$
$$f'(z_0) = c_1,$$
$$f''(z_0) = 2c_2,$$
$$f^{(3)}(z_0) = 3(2)c_3$$

y, en general,

$$f^{(k)}(z_0) = k(k-1)(k-2)\cdots(1)c_k.$$

Puede resolver estas ecuaciones para los coeficientes en términos de la función y sus derivadas en z_0:

$$c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{9.6}$$

donde $k!$ es el producto de los enteros desde 1 hasta k, por convención $0! = 1$, y la derivada cero $f^{(0)}(z)$ es sólo $f(z)$. Esta notación permite escribir una fórmula para los coeficientes, sin considerar por separado el caso $k = 0$. Los números dados por la ecuación (9.6) son los *coeficientes de Taylor* de f en z_0, y la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n$$

se llama la *serie de Taylor* para f en (o alrededor de) z_0.

Ha probado que si una función f está definida en un disco por una serie de potencias con centro en z_0, entonces los coeficientes en esta serie de potencias deben ser los coeficientes de Taylor, y la serie de potencias debe ser la serie de Taylor de f alrededor de z_0.

Ahora está en la posición de definir algunas funciones complejas elementales, incluyendo las funciones exponencial y trigonométricas y funciones de potencias.

SECCIÓN 9.2 PROBLEMAS

En cada uno de los problemas del 1 al 8, determine el radio de convergencia y el disco abierto de convergencia de la serie de potencias.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}(z+3i)^n$

2. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2}(z-i)^{2n}$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}(z-1+3i)^n$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2i}{5+i}\right)^n (z+3-4i)^n$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^{n+1}}(z+8i)^n$

6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{n+2}(z-3)^n$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2n+1}(z+6+2i)^n$

8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{4^n}(z+2i)^{3n}$

9. ¿Es posible que $\sum c_n(z-2i)^n$ converja en 0 y diverja en i?

10. ¿Es posible que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-4+2i)^n$ converja en i y diverja en $1+i$?

11. Considere $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, donde $c_n = 2$ si n es par y $c_n = 1$ si n es impar. Pruebe que el radio de convergencia de esta serie de potencias es 1, pero que este número no se puede calcular usando el criterio de la razón. (Esto significa simplemente que no siempre se puede usar este criterio para determinar el radio de convergencia de una serie de potencias.)

9.3 Las funciones exponencial y trigonométricas

Busque definir la función exponencial compleja e^z de manera que coincida con la función exponencial real cuando z es real. Para todo real x,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n.$$

En esta serie, reemplace x con z, para obtener la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}z^n.$$

Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}|z| = 0.$$

Debido a que este límite es menor que 1 para todo z, esta serie de potencias converge para todo z, y hace la siguiente definición.

DEFINICIÓN 9.6 *Función exponencial*

Para z complejo, defina la función exponencial compleja e^z por

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

TEOREMA 9.11

Para todo número complejo, y todo entero positivo k, la k-ésima derivada de e^z es

$$f^{(k)}(z) = e^z. \blacksquare$$

Prueba Calcule

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = e^z.$$

Por tanto, $f'(z) = e^z$. Ahora al seguir diferenciando da $f^{(k)}(z) = e^z$ para cualquier entero positivo k. ■

Enseguida aparece una lista de las propiedades de la función exponencial compleja, muchas de las cuales son familiares del caso real. La conclusión (8) da las partes real e imaginaria de e^z, lo que permite escribir $e^z = u(x, y) + iv(x, y)$. La conclusión (9) es quizá la sorpresa principal al extender la función exponencial real al plano complejo. ¡La función exponencial compleja es periódica! Este periodo no se manifiesta en el caso real ya que es imaginario puro.

TEOREMA 9.12

1. $e^0 = 1$.
2. Si g es diferenciable en z, entonces también lo es $e^{g(z)}$, y
$$\frac{d}{dz} e^{g(z)} = g'(z) e^{g(z)}.$$
3. $e^{z+w} = e^z e^w$ para todo complejo z y w.
4. $e^z \neq 0$ para todo z.
5. $e^{-z} = 1/e^z$.
6. Si z es real, entonces e^z es real y $e^z > 0$.
7. (Fórmula de Euler) Si y es real, entonces
$$e^{iy} = \cos(y) + i \operatorname{sen}(y).$$
8. Si $z = x + iy$, entonces
$$e^z = e^x \cos(y) + ie^x \operatorname{sen}(y).$$
9. e^z es periódica con periodo $2n\pi i$ para cualquier entero n.

Prueba (1) es obvio y (2) se sigue a partir de la regla de la cadena para la diferenciación.

Para probar (3), fije cualquier número complejo u y defina $f(z) = e^z e^{u-z}$, para todo complejo z. Entonces

$$f'(z) = e^z e^{u-z} - e^z e^{u-z} = 0$$

para todo z. Por el teorema 9.7, en cualquier disco abierto $D : |z| < R$, $f(z)$ es constante. Para algunos números K, $f(z) = K$ para $|z| < R$. Pero entonces $f(0) = K = e^0 e^u = e^u$, de manera que para todo z en D,

$$e^z e^{u-z} = e^u.$$

Ahora $u = z + w$ para obtener

$$e^z e^w = e^{z+w}.$$

Como R puede ser tan grande como desee, esto se cumple para todo complejo z y w.

Para probar (4), suponga que $e^\alpha = 0$. Entonces

$$1 = e^0 = e^{\alpha-\alpha} = e^\alpha e^{-\alpha} = 0,$$

una contradicción.

Para (5), argumente como en (4) que

$$1 = e^0 = e^{z-z} = e^z e^{-z},$$

de manera que

$$e^{-z} = 1/e^z.$$

Para probar (7), escriba

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(iy)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(iy)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(iy)^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} i^{2n} y^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} i^{2n+1} y^{2n+1}. \end{aligned}$$

Ahora

$$i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n$$

y

$$i^{2n+1} = i(i^{2n}) = i(-1)^n,$$

de manera que

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} y^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} y^{2n+1} = \cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y),$$

en donde ha usado las expansiones de Maclaurin (real) de $\cos(y)$ y $\mathrm{sen}(y)$ para y real.

Para (8), use (7) para escribir

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y)).$$

Finalmente, para la conclusión (9), para cualquier entero n,

$$\begin{aligned} e^{z+2n\pi i} &= e^{x+i(y+2n\pi)} = e^x\,(\cos(y+2n\pi) + i\,\mathrm{sen}(y+2n\pi)) \\ &= e^x \cos(y) + i e^x\,\mathrm{sen}(y) = e^z. \end{aligned}$$

Así para cualquier entero n distinto de cero, $2n\pi i$ es un periodo de e^z.

La conclusión (8) da la forma polar de e^z en términos de x y y. Implica que la magnitud de e^z es e^x y que un argumento de e^z es y. Establezca estas conclusiones:

$$\left|e^z\right| = e^{\mathrm{Re}(z)} = e^x$$

y

$$\arg(e^z) = \mathrm{Im}(z) + 2n\pi = y + 2n\pi.$$

También es fácil de verificar que

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}}.$$

Para esto, escriba

$$\overline{e^z} = \overline{e^x(\cos(y) + i\ \mathrm{sen}(y))} = e^x(\cos(y) - i\ \mathrm{sen}(y)) = e^{x-iy} = e^{\overline{z}}.$$

Por ejemplo,

$$\overline{e^{2+6i}} = e^{\overline{2+6i}} = e^{2-6i} = e^2(\cos(6) - i\ \mathrm{sen}(6)).$$

La conclusión (9) se puede mejorar. No solamente es $2n\pi i$ un periodo de e^z sino que estos números son los únicos periodos. Esto es la parte (4) del siguiente teorema.

TEOREMA 9.13

1. $e^z = 1$ si, y sólo si $z = 2n\pi i$ para algún entero n.
2. $e^z = -1$ si, y sólo si $z = (2n + 1)\pi i$ para algún entero n.
3. $e^z = e^w$ si, y sólo si $z - w = 2n\pi i$ para algún entero n.
4. Si p es un periodo de e^z, entonces $p = 2n\pi i$ para algún entero n.

Compare la conclusión (2) de este teorema con la conclusión (6) del teorema anterior. Si x es real, entonces e^x es un número real positivo. Sin embargo, la función exponencial compleja puede dar valores negativos. La conclusión (2) de este teorema da todos los valores de z tales que e^z toma el -1.

Prueba Para (1), suponga primero que $e^z = 1$. Entonces

$$e^z = 1 = e^x \cos(y) + ie^x\ \mathrm{sen}(y).$$

Entonces

$$e^x \cos(y) = 1 \quad \text{y} \quad e^x\ \mathrm{sen}(y) = 0.$$

Ahora x es real, de manera que $e^x > 0$ y la segunda ecuación requiere que $\mathrm{sen}(y) = 0$. Como esta es la función seno real, conoce todos sus ceros y puede concluir que $y = k\pi$ para k entero. Ahora debe tener

$$e^x \cos(y) = e^x \cos(k\pi) = 1.$$

Pero $\cos(k\pi) = (-1)^k$ para k entero, de manera que

$$e^x(-1)^k = 1.$$

Para que se satisfaga esto, primero necesita que $(-1)^k$ sea positivo, mientras k debe ser un entero par, $k = 2n$. Esto deja

$$e^x = 1,$$

de manera que $x = 0$. Por tanto, $z = x + iy = 2n\pi i$.

Recíprocamente, suponga que $z = 2n\pi i$ para algún entero n. Entonces

$$e^z = \cos(2n\pi) + i\,\text{sen}(2n\pi) = 1.$$

La conclusión (2) puede probarse con un argumento paralelo al que acaba de elaborar para (1).

Para (3), si $z - w = 2n\pi i$, entonces

$$e^{z-w} = \frac{e^z}{e^w} = e^{2n\pi i} = 1,$$

así

$$e^z = e^w.$$

Recíprocamente, suponga que $e^z = e^w$. Entonces $e^{z-w} = 1$, de manera que por (1), $z - w = 2n\pi i$ para algún entero n.

Finalmente, para (4), suponga que p es un periodo de e^z. Entonces

$$e^{z+p} = e^z$$

para todo z. Pero entonces

$$e^z e^p = e^z$$

de manera que $e^p = 1$ y, por (1), $p = 2n\pi i$ para algún entero n. ■

Usando las propiedades que ha obtenido para e^z, algunas veces puede resolver ecuaciones que involucran a esta función.

EJEMPLO 9.11

Encontrar todas las z tales que

$$e^z = 1 + 2i.$$

Para hacer esto, sea $z = x + iy$, de manera que

$$e^x\cos(y) + ie^x\,\text{sen}(y) = 1 + 2i.$$

Entonces

$$e^x\cos(y) = 1$$

y

$$e^x\,\text{sen}(y) = 2.$$

Sume el cuadrado de estas ecuaciones para obtener

$$e^{2x}(\cos^2(y) + \text{sen}^2(y)) = e^{2x} = 5.$$

Entonces

$$x = \tfrac{1}{2}\ln(5),$$

en donde ln(5) es el logaritmo natural real de 5. Ahora, dividiendo

$$\frac{e^x\,\text{sen}(y)}{e^x\cos(y)} = \tan(y) = 2,$$

así $y = \tan^{-1}(2)$. Una solución de la ecuación dada es $z = \frac{1}{2}\ln(5) + i\tan^{-1}(2)$, o aproximadamente $0.8047 + 1.1071i$. ■

Ahora está listo para extender las funciones trigonométricas de la recta real al plano complejo. Busque definir sen(z) y cos(z) para todo complejo z de manera que estas funciones coincidan con las funciones seno y coseno reales cuando z es real. Aplique el método usado para extender la función exponencial de la recta real al plano complejo, empiece con la serie de potencias.

DEFINICIÓN 9.7

Para todo complejo z, sea

$$\operatorname{sen}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \text{y} \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

La definición presupone que estas series convergen para todo complejo z, un hecho fácil de probar. A partir de la serie de potencias, es inmediato que

$$\cos(-z) = \cos(z) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z).$$

Diferenciando término a término esta serie, encuentra que para todo z,

$$\frac{d}{dz}\operatorname{sen}(z) = \cos(z) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dz}\cos(z) = -\operatorname{sen}(z).$$

La fórmula de Euler establece que, para y real, $e^{iy} = \cos(y) + i\operatorname{sen}(y)$. Ahora extienda esto a todo el plano complejo.

TEOREMA 9.14

Para todo número complejo z,

$$e^{iz} = \cos(z) + i\operatorname{sen}(z). \quad ■$$

Se sigue la prueba del teorema 9.12(7), con z en lugar de y.

Exprese sen(z) y cos(z) en términos de la función exponencial de la siguiente manera. Primero, del teorema 9.14,

$$e^{iz} = \cos(z) + i\operatorname{sen}(z)$$

y

$$e^{-iz} = \cos(z) - i\operatorname{sen}(z).$$

Resuelva estas ecuaciones para sen(z) y cos(z) para obtener

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Fórmulas como éstas revelan uno de los beneficios de extender estas funciones familiares al plano complejo. En la recta real, no hay una conexión evidente entre e^x, sen(x) y cos(x). Estas formulaciones también son convenientes para llevar a cabo manipulaciones que involucren sen(z) y cos(z). Por ejemplo, para obtener la identidad

$$\operatorname{sen}(2z) = 2\cos(z)\operatorname{sen}(z),$$

inmediatamente tiene que

$$2\,\text{sen}(z)\cos(z) = 2\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$$

$$= \frac{1}{2i}(e^{2iz}-e^{-2iz}+1-1) = \frac{1}{2i}(e^{2iz}-e^{-2iz}) = \text{sen}(2z).$$

Las identidades que involucran funciones trigonométricas reales siguen siendo ciertas en el caso complejo, y siempre las usará sin probarlas. Por ejemplo,

$$\text{sen}(z+w) = \text{sen}(z)\cos(w) + \cos(z)\,\text{sen}(w).$$

No todas las propiedades del seno y coseno reales pasan a sus extensiones complejas. Recuerde que $|\cos(x)| \leq 1$ y $|\text{sen}(x)| \leq 1$ para x real. Contraste esto con el siguiente.

TEOREMA 9.15

$\cos(z)$ y $\text{sen}(z)$ no están acotados en el plano complejo. ■

La prueba consiste en mostrar que ambas funciones pueden hacerse arbitrariamente grandes en magnitud para cierta elección de z. Sea $z = iy$ con y real. Entonces

$$\text{sen}(z) = \text{sen}(iy) = \frac{1}{2i}(e^{-y} - e^{y})$$

así

$$|\text{sen}(z)| = \frac{1}{2}|e^{y} - e^{-y}|,$$

y el lado derecho puede hacerse tan grande como se quiera eligiendo y suficientemente grande en magnitud. Esto es, conforme z se aleja del origen en cualquier dirección a lo largo del eje vertical, $|\text{sen}(z)|$ crece en magnitud sin cota. Es fácil verificar que $|\cos(z)|$ muestra el mismo comportamiento.

Frecuentemente es útil conocer las partes real e imaginaria de estas funciones.

TEOREMA 9.16

Sea $z = x + iy$. Entonces

$$\cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\,\text{sen}(x)\,\text{senh}(y)$$

y

$$\text{sen}(z) = \text{sen}(x)\cosh(y) + i\cos(x)\,\text{senh}(y).$$ ■

Es rutinario obtener estas expresiones a partir de las expresiones exponenciales para el $\text{sen}(z)$ y el $\cos(z)$.

Ahora probará que las funciones seno y coseno complejas tienen exactamente los mismos periodos y ceros que sus contrapartes reales.

TEOREMA 9.17

1. $\text{sen}(z) = 0$ si, y sólo si $z = n\pi$ para algún entero n.
2. $\cos(z) = 0$ si, y sólo si $z = (2n+1)\pi/2$ para algún entero n.

3. $\text{sen}(z)$ y $\cos(z)$ son periódicas con periodos $2n\pi$, para n cualquier entero distinto de cero. Más aún, estos son los únicos periodos para estas funciones.

La conclusión (3) significa que

$$\cos(z + 2n\pi) = \cos(z) \quad \text{y} \quad \text{sen}(z + 2n\pi) = \text{sen}(z)$$

para todo complejo z y, recíprocamente, si

$$\cos(z + p) = \cos(z) \quad \text{para todo } z,$$

Entonces $p = 2n\pi$, y si

$$\text{sen}(z + q) = \text{sen}(z) \quad \text{para todo } z,$$

Entonces $q = 2n\pi$. Esto garantiza que las funciones seno y coseno no tendrán periodos adicionales cuando se extienden al plano complejo, como ocurre con la función exponencial compleja.

Prueba Para (1), si n es un entero, entonces

$$\text{sen}(n\pi) = \frac{1}{2i}(e^{n\pi i} - e^{-n\pi i}) = \frac{1}{2i}(1 - 1) = 0.$$

Así todo $z = n\pi$, con n un entero, es un cero de $\text{sen}(z)$. Para probar que estos son los únicos ceros, suponga que $\text{sen}(z) = 0$. Sea $z = x + iy$. Entonces

$$\text{sen}(x)\cosh(y) + i\cos(x)\,\text{senh}(y) = 0.$$

Entonces

$$\text{sen}(x)\cosh(y) = 0 \quad \text{y} \quad \cos(x)\,\text{senh}(y) = 0.$$

Como $\cosh(y) > 0$ para todo real y, entonces $\text{sen}(x) = 0$, y para esta función seno real, esto significa que $x = n\pi$ para algún entero n. Entonces

$$\cos(x)\,\text{senh}(y) = \cos(n\pi)\,\text{senh}(y) = 0.$$

Pero $\cos(n\pi) = (-1)^n \neq 0$, de manera que $\text{senh}(y) = 0$ y esto fuerza que $y = 0$. Por tanto, $z = n\pi$.

(2) puede probarse con un argumento similar al utilizado para (1).

Para (3), si n es un entero, entonces

$$\begin{aligned}\text{sen}(z + 2n\pi) &= \frac{1}{2i}(e^{i(z+2n\pi)} - e^{-i(z+2n\pi)}) \\ &= \frac{1}{2i}(e^{iz}e^{2n\pi i} - e^{-iz}e^{-2n\pi i}) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \text{sen}(z),\end{aligned}$$

así cada entero par múltiplo de π es un periodo de $\text{sen}(z)$. Para probar que no hay otros periodos, suponga que p es un periodo de $\text{sen}(z)$. Entonces

$$\text{sen}(z + p) = \text{sen}(z)$$

para todo complejo z. En particular, esto debe cumplirse para $z = 0$, de manera que $\text{sen}(p) = 0$ y entonces por (1), $p = n\pi$ para n entero. Pero también puede poner $z = i$ para tener

$$\text{sen}(i + n\pi) = \text{sen}(i).$$

Entonces

$$e^{i(i+n\pi)} - e^{-i(i+n\pi)} = e^{-1} - e.$$

Por tanto,

$$e^{-1}\cos(n\pi) - e\cos(n\pi) = e^{-1} - e.$$

Si n es par, entonces $\cos(n\pi) = 1$ y esta ecuación es cierta. Si n es impar, entonces $\cos(n\pi) = -1$ y esta ecuación se convierte en

$$-e^{-1} + e = e^{-1} - e,$$

que es imposible. Por tanto, n es par, y los únicos periodos de $\operatorname{sen}(z)$ son enteros pares múltiplos de π.

Un argumento similar establece el mismo resultado para los periodos de $\cos(z)$. ■

El siguiente es un ejemplo en el cual se usan resultados acerca del $\cos(z)$ para resolver una ecuación.

EJEMPLO 9.12

Resolver $\cos(z) = i$.

Sea $z = x + iy$, de manera que

$$\cos(x)\cosh(y) - i\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y) = i.$$

Entonces

$$\cos(x)\cosh(y) = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y) = -1.$$

Como $\cosh(y) > 0$ para todo real y, la primera ecuación implica que $\cos(x) = 0$, así

$$x = \frac{2n+1}{2}\pi,$$

en donde (hasta aquí) n puede ser un entero. A partir de la segunda ecuación,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)\operatorname{senh}(y) = -1.$$

Ahora $\operatorname{sen}((2n + 1)\pi/2) = (-1)^n$, de manera que

$$\operatorname{senh}(y) = (-1)^{n+1},$$

con n cualquier entero. Así $y = \operatorname{senh}^{-1}((-1)^{n+1})$. Las soluciones de $\cos(z) = i$ son, por tanto, los números complejos

$$\frac{2n+1}{2}\pi + i\operatorname{senh}^{-1}(-1) \quad \text{para } n \text{ un entero par,}$$

y

$$\frac{2n+1}{2}\pi + i\operatorname{senh}^{-1}(1) \quad \text{para } n \text{ un entero impar.}$$

Una fórmula estándar para la función del seno hiperbólico inversa da

$$\operatorname{senh}^{-1}(\beta) = \ln\left(\beta + \sqrt{\beta^2 + 1}\right)$$

para β real. Por tanto, las soluciones se pueden escribir como

$$\frac{2n+1}{2}\pi + i\ln\left(-1 + \sqrt{2}\right) \quad \text{para } n \text{ un entero par,}$$

y

$$\frac{2n+1}{2}\pi + i\ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \quad \text{para } n \text{ un entero par.} \;■$$

Las otras funciones trigonométricas se definen por

$$\sec(z) = \frac{1}{\cos(z)}, \quad \csc(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(z)},$$
$$\tan(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)}, \quad \cot(z) = \frac{\cos(z)}{\operatorname{sen}(z)},$$

en cada caso para todo z para el cual el denominador no sea cero. Las propiedades de estas funciones se pueden obtener a partir de las propiedades del sen(z) y cos(z).

SECCIÓN 9.3 PROBLEMAS

En cada problema del 1 al 10, escriba la función en la forma $a + bi$.

1. e^i

2. $\operatorname{sen}(1 - 4i)$

3. $\cos(3 + 2i)$

4. $\tan(3i)$

5. e^{5+2i}

6. $\cot\left(1 - \frac{\pi i}{4}\right)$

7. $\operatorname{sen}^2(1 + i)$

8. $\cos(2 - i) - \operatorname{sen}(2 - i)$

9. $e^{\pi i/2}$

10. $\operatorname{sen}(e^i)$

11. Encuentre $u(x, y)$ y $v(x, y)$ tales que $e^{z^2} = u(x, y) + iv(x, y)$. Pruebe que u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann para todo complejo z.

12. Encuentre $u(x, y)$ y $v(x, y)$ tales que $e^{1/z} = u(x, y) + iv(x, y)$. Pruebe que u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann para todo z excepto cero.

13. Encuentre $u(x, y)$ y $v(x, y)$ tales que $\tan(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Determine dónde están definidas estas funciones y pruebe que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann para estos puntos (x, y).

14. Encuentre $u(x, y)$ y $v(x, y)$ tales que $\sec(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Determine dónde están definidas estas funciones y pruebe que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann para tales puntos.

15. Pruebe que $\operatorname{sen}^2(z) + \cos^2(z) = 1$ para todo complejo z.

16. Sean z y w números complejos.

(a) Pruebe que $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen}(z)\cos(w) + \cos(z)\operatorname{sen}(w)$.

(b) Pruebe que $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(w)$.

17. Encuentre todas las soluciones de $e^z = 2i$.

18. Encuentre todas las soluciones de $\operatorname{sen}(z) = i$.

19. Encuentre todas las soluciones de $e^z = -2$.

9.4 El logaritmo complejo

En cálculo real, el logaritmo natural es la inversa de la función exponencial para $x > 0$,

$$y = \ln(x) \quad \text{si, y sólo si } x = e^y.$$

En este sentido, el logaritmo natural real se puede pensar como la solución de la ecuación $x = e^y$ para y en términos de x.

Puede intentar este acercamiento para buscar una definición del logaritmo complejo. Dado $z \neq 0$, cuando existen números complejos w tales que

$$e^w = z.$$

Para contestar a esta pregunta, ponga z en la forma polar como $z = re^{i\theta}$. Sea $w = u + iv$. Entonces

$$z = re^{i\theta} = e^{w} = e^{u}e^{iv}. \tag{9.7}$$

Como θ y v son reales, $|e^{i\theta}| = |e^{iv}| = 1$ y la ecuación (9.7) dan $r = |z| = e^{u}$. De donde

$$u = \ln(r),$$

el logaritmo natural real del número positivo r.

Pero ahora la ecuación (9.7) implica que $e^{i\theta} = e^{iv}$, de manera que por el teorema 9.13(3),

$$iv = i\theta + 2n\pi i$$

y por tanto

$$v = \theta + 2n\pi,$$

en donde n puede ser cualquier entero.

En resumen, dado un número complejo $z = re^{i\theta}$ distinto de cero, existe una infinidad de números complejos w tales que $e^{w} = z$, y estos números son

$$w = \ln(r) + i\theta + 2n\pi i,$$

con n cualquier entero. Como θ es cualquier argumento de z, y todos los argumentos de z están contenidos en la expresión $\theta + 2n\pi$ para n entero, entonces en términos de z,

$$w = \ln(|z|) + i\arg(z),$$

con el entendido de que hay una infinidad de valores distintos para $\arg(z)$. Cada uno de estos números se llama un *logaritmo complejo* de z.

Cada número complejo distinto de cero tiene, por tanto, una infinidad de logaritmos. Para enfatizar esto, escriba

$$\log(z) = \{\ln(|z| + i\arg(z)\}\ .$$

Esto se lee, "el logaritmo de z es el conjunto de todos los números $\ln(|z|) + i\theta$, donde θ varía sobre todos los argumentos de z".

EJEMPLO 9.13

Sea $z = 1 + i$. Entonces $z = \sqrt{2}e^{i(\pi/4+2n\pi)}$. Entonces

$$\log(z) = \left\{\ln\left(\sqrt{2}\right) + i\frac{\pi}{4} + 2n\pi i\right\}.$$

Algunos de los logaritmos de $1 + i$ son

$$\ln\left(\sqrt{2}\right) + \frac{\pi}{4}i, \quad \ln\left(\sqrt{2}\right) + \frac{9\pi}{4}i, \quad \ln\left(\sqrt{2}\right) - \frac{7\pi}{4}i, \ldots. \ ■$$

EJEMPLO 9.14

Sea $z = -3$. Un argumento de z es π, y en la forma polar $z = 3e^{i(\pi+2n\pi)} = 3e^{(2n+1)\pi i}$. Entonces

$$\log(z) = \{\ln(3) + (2n+1)\pi i\}.$$

Algunos valores de $\log(-3)$ son $\ln(3) + \pi i$, $\ln(3) + 3\pi i$, $\ln(3) + 5\pi i, \ldots$, $\ln(3) - \pi i$, $\ln(3) - 3\pi i$, y así sucesivamente. ■

El logaritmo complejo no es una función ya que con cada z distinto de cero están asociados infinidad de números complejos distintos. No obstante, $\log(z)$ muestra algunas de las propiedades de la función logaritmo real, con las que está familiarizado. ■

TEOREMA 9.18

Sea $z \neq 0$. Si w es cualquier valor de $\log(z)$, entonces $e^w = z$.

Esta es la función compleja equivalente al hecho que en cálculo real, $e^{\ln(x)} = x$. Esta es la condición para entender una definición de $\log(z)$.

TEOREMA 9.19

Sean z y w números complejos distintos de cero. Entonces cada valor de $\log(zw)$ es una suma de valores de $\log(z)$ y $\log(w)$.

Prueba Sean $z = re^{i\theta}$ y $w = \rho e^{i\varphi}$. Entonces $zw = r\rho e^{i(\theta+\varphi)}$. Si α es cualquier valor de $\log(zw)$, entonces para algún entero N,

$$\alpha = \ln(\rho r) + i(\theta + \varphi + 2N\pi) = [\ln(r) + i\theta] + [\ln(\rho) + i(\varphi + 2N\pi)].$$

Pero $\ln(r) + i\theta$ es un valor de $\log(z)$, y $\ln(\rho) + i(\varphi + 2N\pi)$ es un valor de $\log(w)$, lo que prueba el teorema. ■

Aquí hay un ejemplo del uso del logaritmo para resolver una ecuación que involucra la función exponencial.

EJEMPLO 9.15

Resolver para todo z tal que $e^z = 1 + 2i$.

En el ejemplo 9.11 encontró una solución separando las partes real e imaginaria de e^z. Usando el logaritmo, obtiene todas las soluciones como sigue:

$$e^z = 1 + 2i$$

significa que

$$z = \log(1 + 2i) = \ln(|1 + 2i|) + i \arg(1 + 2i) = \frac{1}{2}\ln(5) + i(\arctan(2) + 2n\pi),$$

en donde n es cualquier entero positivo. ■

Algunas veces es conveniente elegir un logaritmo en particular para usarlo con los números complejos distintos de cero. Esto se puede hacer eligiendo un argumento. Por ejemplo, para $z \neq 0$,

$$Log(z) = \ln(|z|) + i\theta,$$

donde $0 \leq \theta < 2\pi$. Esto asignado al símbolo $Log(z)$ cuyo valor particular de $\log(z)$ corresponde al argumento de z que está en $[0, 2\pi)$. Por ejemplo,

$$Log(1 + i) = \ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}$$

y

$$Log(-3) = \ln(3) + i\pi.$$

Si se hace esto, entonces hay que tener cuidado con los cálculos. Por ejemplo, en general $Log(zw) \neq Log(z) + Log(w)$.

SECCIÓN 9.4 PROBLEMAS

En cada problema del 1 al 6, determine todos los valores de $\log(z)$ y también el valor de $Log(z)$ definido en la discusión.

1. $-4i$

2. $2 - 2i$

3. -5

4. $1 + 5i$

5. $-9 + 2i$

6. 5

7. Sean z y w números complejos distintos de cero. Pruebe que cada valor de $\log(z / w)$ es igual al valor de $\log(z)$ menos un valor de $\log(w)$.

8. Dé un ejemplo para probar que, en general $Log(zw) \neq Log(z) + Log(w)$ para todo complejo z y w distinto de cero.

9.5 Potencias

Busque asignarle un significado al símbolo z^w cuando w y z son números complejos y $z \neq 0$. Construirá esta idea en pasos. A lo largo de esta sección z es un número complejo distinto de cero.

9.5.1 Potencias enteras

Las potencias enteras no presentan problemas. Defina $z^0 = 1$. Si n es un entero positivo, entonces $z^n = z \cdot z \cdot \cdots \cdot z$, un producto de n factores de z. Por ejemplo,

$$(1 + i)^4 = (1 + i)(1 + i)(1 + i)(1 + i) = -4.$$

Si n es un entero negativo, entonces $z^n = 1/z^{|n|}$. Por ejemplo,

$$(1 + i)^{-4} = \frac{1}{(1 + i)^4} = -\frac{1}{4}.$$

9.5.2 $z^{1/n}$ para n entero positivo

Sea n un entero positivo. Un número u tal que $u^n = z$ se llama la n-ésima *raíz* de z, y se denota $z^{1/n}$. Como con el logaritmo y el argumento, este es un símbolo que denota más que un número. De hecho, todo número complejo distinto de cero tiene exactamente n raíces n-ésimas distintas.

Para determinar estas n-ésimas raíces de z, sea $z = re^{i\theta}$, con $r = |z|$ y θ cualquier argumento de z. Entonces

$$z = re^{i(\theta + 2k\pi)},$$

en donde k puede ser cualquier entero. Entonces

$$z^{1/n} = r^{1/n}e^{i(\theta + 2k\pi)/n}. \tag{9.8}$$

Aquí $r^{1/n}$ es la única raíz n-ésima real del número positivo r. Conforme k varía sobre los enteros, la expresión del lado derecho de la ecuación (9.8) produce números complejos cuyas n-ésimas potencias son iguales a z. Vea cuántos de tales números produce.

Para $k = 0, 1, \ldots, n-1$, tenemos n raíces n-ésimas distintas de z. Ellas son

$$r^{1/n}e^{i\theta/n},\ r^{1/n}e^{i(\theta+2\pi)/n},\ r^{1/n}e^{i(\theta+4\pi)/n},\ \ldots,\ r^{1/n}e^{i(\theta+2(n-1)\pi)/n}. \tag{9.9}$$

Otra elección de k simplemente reproduce una de estas raíces n-ésimas. Por ejemplo, si $k = n$, entonces la ecuación (9.8) lleva a

$$r^{1/n}e^{i(\theta+2n\pi)/n} = r^{1/n}e^{i\theta/n}e^{2\pi i} = r^{1/n}e^{i\theta/n},$$

el primer número de la lista (9.9). Si $k = n + 1$, obtiene

$$r^{1/n}e^{i(\theta+2(n+1)\pi)/n} = r^{1/n}e^{i(\theta+2\pi)/n}e^{2\pi i} = r^{1/n}e^{i(\theta+2\pi)/n},$$

el segundo número en la lista (9.9), y así sucesivamente.

En resumen, para cualquier entero positivo n, el número de raíces n-ésimas de cualquier número complejo z distinto de cero, es n. Estas raíces n-ésimas son

$$r^{1/n}e^{i(\theta+2k\pi)/n} \quad \text{para } k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

o

$$r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right) \quad \text{para } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

EJEMPLO 9.16

Encuentre las raíces cuartas de $1 + i$.

Como un argumento de $1 + i$ es $\pi/4$ y $|1 + i| = \sqrt{2}$, tiene la forma polar

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i(\pi/4+2k\pi)}.$$

Las raíces cuartas son

$$(\sqrt{2})^{1/4}e^{i(\pi/4+2k\pi)/4} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, 3.$$

Estos números son

$$2^{1/8}e^{\pi i/16}, \quad 2^{1/8}e^{i(\pi/4+2\pi)/4}, \quad 2^{1/8}e^{i(\pi/4+4\pi)/4}, \quad 2^{1/8}e^{i(\pi/4+6\pi)/4},$$

o

$$2^{1/8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{16}\right)\right),$$

$$2^{1/8}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{16}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{9\pi}{16}\right)\right),$$

$$2^{1/8}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{16}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{17\pi}{16}\right)\right),$$

$$2^{1/8}\left(\cos\left(\frac{25\pi}{16}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{25\pi}{16}\right)\right). \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 9.17

Las raíces n-ésimas de 1 se llaman las raíces n-ésimas de la unidad. Estos números tienen muchos usos, por ejemplo, en conexión con la transformada rápida de Fourier. Como 1 tiene magnitud 1, y un argumento de 1 es cero, las raíces n-ésimas de la unidad son

$$e^{2k\pi i/n} \quad \text{para} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

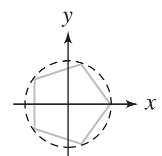


FIGURA 9.8

Si pone $\omega = e^{2\pi i/n}$, entonces estas raíces n-ésimas de la unidad son $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$.

Por ejemplo, las raíces quintas de la unidad son

$$1,\ e^{2\pi i/5},\ e^{4\pi i/5},\ e^{6\pi i/5} \text{ y } e^{8\pi i/5}.$$

Estas son

$$1, \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right), \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{5}\right),$$

$$\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi}{5}\right), \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{5}\right). \blacksquare$$

Si dibuja como puntos en el plano, las raíces n-ésimas de la unidad forman los vértices de un polígono regular con los vértices en el círculo unitario $|z| = 1$ y teniendo un vértice en $(1, 0)$. La figura 9.8 muestra las raíces quintas de la unidad vistas de esta manera.

Si n es un entero negativo, entonces

$$z^{1/n} = \frac{1}{z^{1/|n|}},$$

en el sentido que los n números representados por el símbolo en la izquierda son calculados tomando los n números producidos en la derecha. Éstos son sólo los recíprocos de las raíces n-ésimas de z.

9.5.3 Potencias racionales

Un número racional es un cociente de enteros, a saber $r = m/n$. Suponga que n es positivo y que m y n no tienen factores comunes. Escriba

$$z^r = z^{m/n} = (z^m)^{1/n},$$

las raíces n-ésimas de z^m.

Verifique que obtiene los mismos números si primero saca las raíces n-ésimas de z, entonces eleva cada una a la potencia m. Esto se debe a que

$$\left(z^m\right)^{1/n} = \left(r^m e^{im(\theta+2k\pi)}\right)^{1/n} = r^{m/n} e^{im(\theta+2k\pi)/n} = \left(r^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n}\right)^m = \left(z^{1/n}\right)^m.$$

EJEMPLO 9.18

Encuentre todos los valores de $(2 - 2i)^{3/5}$.

Primero, $(2 - 2i)^3 = -16 - 16i$. Así que quiere las raíces quintas de $-16 - 16i$. Ahora $|-16 - 16i| = \sqrt{512}$, y $5\pi/4$ es un argumento de $-16 - 16i$. Entonces

$$-16 - 16i = (512)^{1/2} e^{i(5\pi/4 + 2k\pi)}$$

y

$$(-16-16i)^{1/5} = (512)^{1/10}e^{i(5\pi/4+2k\pi)/5}.$$

Haciendo $k = 0, 1, 2, 3, 4$, obtiene los números

$$(512)^{1/10}e^{5\pi i/4}, \quad (512)^{1/10}e^{13\pi i/20}, \quad (512)^{1/10}e^{21\pi i/20}, \quad (512)^{1/10}e^{29\pi i/20}, \quad (512)^{1/10}e^{37\pi i/20}.$$

Estos son todos los valores de $(2-2i)^{3/5}$. ■

9.5.4 Potencias z^w

Suponga que $z \neq 0$ y sea w cualquier número complejo. Busca definir el símbolo z^w.

En el caso de potencias reales, a^b se define como $b\ln(a)$. Por ejemplo, $2^\pi = e^{\pi \ln(2)}$, y éste está definido ya que ln(2) está determinado. Siga el mismo camino para z^w, excepto que ahora, para el hecho de que $\log(z)$, denote un conjunto infinito de números complejos. Por tanto, defina z^w como el conjunto de todos los números $e^{w \log(z)}$.

Si $w = m/n$, un número racional en su mínima expresión, entonces $e^{w\log(z)}$ tiene n valores distintos. Si w no es un número racional, entonces z^w es un conjunto infinito de números complejos.

EJEMPLO 9.19

Calcule todos los valores de $(1-i)^{1+i}$.

Estos números se obtienen como $e^{(1+i)\log(1-i)}$. Primero, $|1-i| = \sqrt{2}$ y $-\pi/4$ es un argumento de $1-i$ (obtiene el punto $(1,-1)$ rotando $\pi/4$ radianes en sentido negativo desde el eje real positivo). Por tanto, en la forma polar,

$$1-i = \sqrt{2}e^{i(-\pi/4+2n\pi)}.$$

Así todos los valores de $\log(1-i)$ están dados por

$$\ln(\sqrt{2}) + i\left(-\frac{\pi}{4}+2n\pi\right).$$

Todo valor de $(1-i)^{1+i}$ está contenido en la expresión

$$e^{(1+i)[\ln(\sqrt{2})+i(-\pi/4+2n\pi)]} = e^{\ln(\sqrt{2})+\pi/4-2n\pi}e^{i(\ln(\sqrt{2})-\pi/4+2n\pi)}$$

$$= \sqrt{2}e^{\pi/4-2n\pi}\left(\cos(\ln(\sqrt{2}-\pi/4+2n\pi)) + i\operatorname{sen}(\ln(\sqrt{2}-\pi/4+2n\pi))\right)$$

$$= \sqrt{2}e^{\pi/4-2n\pi}\left(\cos(\ln(\sqrt{2}-\pi/4)) + i\operatorname{sen}(\ln(\sqrt{2}-\pi/4))\right).$$

Conforme n varía entre todos los valores enteros, esta expresión da todos los valores de $(1-i)^{1+i}$. ■

SECCIÓN 9.5 PROBLEMAS

En cada problema del 1 al 14, determine todos los valores de z^w.

1. i^{1+i}
2. $(1+i)^{2i}$
3. i^i
4. $(1+i)^{2-i}$
5. $(-1+i)^{-3i}$
6. $(1-i)^{1/3}$
7. $i^{1/4}$
8. $16^{1/4}$

9. $(-4)^{2-i}$

10. 6^{-2-3i}

11. $(-16)^{1/4}$

12. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{1/3}$

13. $1^{1/6}$

14. $(7i)^{3i}$

15. Sea n un entero positivo, y sean $u_1, \ldots, u_n$ las raíces n-ésimas de la unidad. Pruebe que $\sum_{j=1}^{n} u_j = 0$. *Sugerencia:* Escriba cada raíz n-ésima de la unidad como una potencia de $e^{2\pi i/n}$.

16. Sea n un entero positivo, y $\omega = e^{2\pi i/n}$. Evalúe $\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \omega^j$.

CURVAS EN EL PLANO LA INTEGRAL
DE UNA FUNCIÓN COMPLE
EL TEOREMA DE CAUCHY CONSECUENCIAS
DEL TEOREMA DE

CAPÍTULO 10

Integración compleja

Ahora conoce algunas funciones complejas importantes, así como ciertos resultados acerca de las derivadas de las funciones complejas. A continuación se desarrolla una integral para las funciones complejas.

Las funciones reales están definidas sobre conjuntos de números reales y con frecuencia se integran sobre intervalos. Las funciones complejas están definidas sobre conjuntos de puntos en el plano y se integran sobre curvas. Antes de definir esta integral, repasará algunos resultados sobre las curvas.

10.1 Curvas en el plano

Una curva en el plano complejo es una función $\Gamma: [a, b] \rightarrow \mathfrak{C}$, definida en un intervalo real $[a, b]$ y que toma valores complejos. Para cada número t en $[a, b]$, $\Gamma(t)$ es un número complejo, o punto en el plano. El lugar geométrico de tales puntos es la *gráfica* de la curva. Sin embargo, la curva es más que un lugar geométrico de puntos en el plano. Γ tiene una orientación natural, que es la dirección en la que el punto $\Gamma(t)$ se mueve a lo largo de la gráfica conforme t crece de a a b. En este sentido, es natural referirse a $\Gamma(a)$ como el *punto inicial* de la curva y a $\Gamma(b)$ como el *punto final*.

Si $\Gamma(t) = x(t) + iy(t)$, entonces la gráfica de Γ es el lugar geométrico de los puntos $(x(t), y(t))$ para $a \leq t \leq b$. El punto inicial de Γ es $(x(a), y(a))$ y el punto final es $(x(b), y(b))$ y $(x(t), y(t))$ se mueve del punto inicial al punto final conforme t varía de a a b. Las funciones $x(t)$ y $y(t)$ son las *funciones coordenadas* de Γ.

EJEMPLO 10.1

Sea $\Gamma(t) = 2t + t^2 i$ para $0 \leq t \leq 2$. Entonces

$$\Gamma(t) = x(t) + iy(t),$$

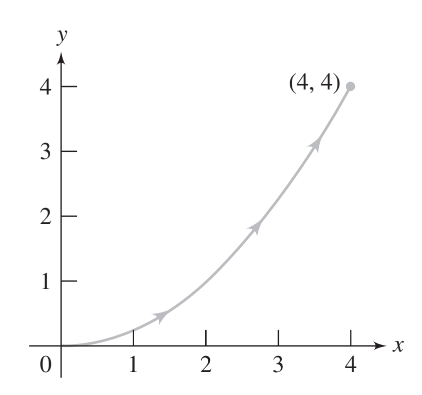


FIGURA 10.1 $x = 2t$, $y = t^2$ *para* $0 \leq t \leq 2$.

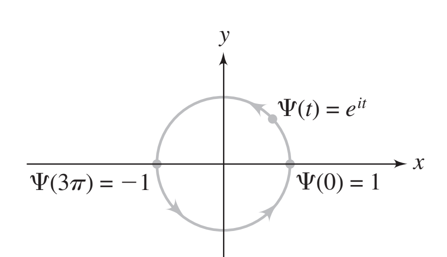


FIGURA 10.2 $\Psi(t) = e^{it}$ *para* $0 \leq t \leq 3\pi$.

donde $x(t) = 2t$ y $y(t) = t^2$. La gráfica de esta curva es la parte de la parábola $y = (x/2)^2$, que se muestra en la figura 10.1. Conforme t varía de 0 a 2, el punto $\Gamma(t) = (2t, t^2)$ se mueve a lo largo de esta gráfica del punto inicial $\Gamma(0) = (0, 0)$ al punto final $\Gamma(2) = (4, 4)$. Las flechas en la gráfica indican esta orientación. ■

EJEMPLO 10.2

Sea $\Psi(t) = e^{it}$ para $0 \leq t \leq 3\pi$. Entonces $\Psi(t) = \cos(t) + i\,\text{sen}(t) = x(t) + iy(t)$, así

$$x(t) = \cos(t), \qquad y(t) = \text{sen}(t).$$

Como $x^2 + y^2 = 1$, todo punto en esta curva está en el círculo unitario alrededor del origen. Sin embargo, el punto inicial de Ψ es $\Psi(0) = 1$ y el punto final es $\Psi(3\pi) = e^{3\pi i} = -1$. Esta curva no es cerrada. Si ésta fuera una pista de carreras, la carrera empezaría en el punto 1 de la figura 10.2 y terminaría en -1. Una pista de carreras circular no significa que los puntos de inicio y fin de la carrera sean el mismo. Esto no es evidente a partir sólo de la gráfica. Ψ está orientada positivamente, como lo indica la flecha. ■

EJEMPLO 10.3

Sea $\Theta(t) = e^{it}$ para $0 \leq t \leq 4\pi$. Esta curva es cerrada, ya que $\Theta(0) = 1 = \Theta(4\pi)$. Sin embargo, el punto $(x(t), y(t))$ se mueve alrededor del círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ dos veces conforme t varía de 0 a 4π. Esto tampoco es evidente a partir sólo de la gráfica (figura 10.3). ■

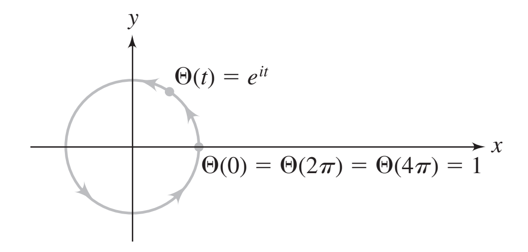


FIGURA 10.3 $\Theta(t) = e^{it}$ para $0 \leq t \leq 4\pi$.

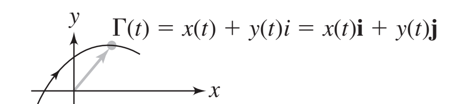


FIGURA 10.4 *Vector posición de una curva.*

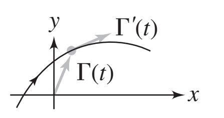


FIGURA 10.5 *Vector tangente a una curva.*

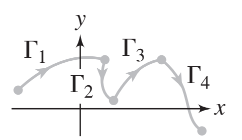


FIGURA 10.6 *La concatenación* $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus \Gamma_4$.

Una curva Γ *es simple* si $\Gamma(t_1) \neq \Gamma(t_2)$ siempre que $t_1 \neq t_2$. Esto significa que el mismo punto nunca se repite en tiempos diferentes. Se hace una excepción para las curvas cerradas, que requieren que $\Gamma(a) = \Gamma(b)$. Si éste es el único punto en el cual $\Gamma(t_1) = \Gamma(t_2)$ con $t_1 \neq t_2$, entonces Γ es una *curva cerrada simple*. La curva Θ del ejemplo 10.3 es cerrada, pero no simple. Si define $\Lambda(t) = e^{it}$ para $0 \leq t \leq 2\pi$, entonces $(x(t), y(t))$ recorre el círculo exactamente una vez conforme t varía de 0 a 2π, y Λ es una curva cerrada simple.

Una curva $\Gamma\colon [a, b] \to \mathfrak{C}$ es *continua* si cada una de sus funciones coordenadas es continua en $[a, b]$. Si $x(t)$ y $y(t)$ son diferenciables en $[a, b]$, Γ es una *curva diferenciable*. Si $x'(t)$ y $y'(t)$ son continuas, y no valen cero para el mismo valor de t, Γ es una *curva suave*. Todas las curvas en los ejemplos anteriores son suaves.

En términos vectoriales, escriba $\Gamma(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ (figura 10.4). Si Γ es diferenciable, y $x'(t)$ y $y'(t)$ no son cero, entonces $\Gamma'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$ es el vector tangente a la curva en el punto $(x(t), y(t))$ (figura 10.5). Si Γ es suave, entonces $x'(t)$ y $y'(t)$ son continuas, así que el vector tangente es continuo. Una curva suave es, por tanto, la que tiene una tangente continua. Para ilustrar, en el ejemplo 10.3, $\Theta(t) = \cos(t) + i\,\text{sen}(t)$, de manera que $\Theta'(t) = -\text{sen}(t) + i\cos(t)$. Puede dejar esto como está o escribir el vector tangente $\Theta'(t) = -\text{sen}(t)\mathbf{i} + \cos(t)\mathbf{j}$, explotando la correspondencia natural entre los números complejos y los vectores en el plano.

Algunas veces se forma una curva Γ juntando varias curvas $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ en sucesión, en el entendido de que el punto final de Γ_{j-1} debe ser el mismo que el punto inicial de Γ_j para $j = 2, \ldots, n$ (figura 10.6). Una curva así se llama la *concatenación de* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ y se denota

$$\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \cdots \oplus \Gamma_n.$$

Las curvas Γ_j son las *componentes* de esta concatenación. Si cada componente de una concatenación es suave, entonces ésta es *suave a pedazos*. Tiene una tangente continua en cada punto, excepto quizá en los puntos de conexión donde Γ_{j-1} es unida a Γ_j. Si la conexión es de manera suave, la concatenación puede tener una tangente en cada uno de estos puntos y ella misma ser suave.

EJEMPLO 10.4

Sea $\Gamma_1(t) = e^{it}$ para $0 \leq t \leq \pi$ y sea $\Gamma_2(t) = -1 + ti$ para $0 \leq t \leq 3$. Entonces $\Gamma_1(\pi) = -1 = \Gamma_2(0)$, de manera que el punto final de Γ_1 es el punto inicial de Γ_2. La figura 10.7 muestra una gráfica de $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$. Esta curva es suave a pedazos, ya que es la concatenación de dos curvas suaves. La concatenación tiene una tangente en cada punto excepto en -1, donde se hace la conexión para formar la concatenación. ■

Se definirá un tipo de equivalencia entre curvas. Suponga

$$\Gamma\colon [a, b] \to \mathfrak{C} \quad \text{y} \quad \Phi\colon [A, B] \to \mathfrak{C}$$

son dos curvas suaves. Llame a estas curvas *equivalentes* si una se puede obtener a partir de la otra mediante un cambio de variables definido por una función creciente y diferenciable. Esto significa que existe una función φ que manda puntos de $[A, B]$ en $[a, b]$ tal que

1. $\varphi'(p) > 0$ para $A < p < B$,
2. $\varphi(A) = a$ y $\varphi(B) = b$, y
3. $\Phi(p) = \Gamma(\varphi(p))$ para $A \leq p \leq B$.

Si piensa en $t = \varphi(p)$, entonces $\Gamma(t) = \Phi(p)$. Las curvas tienen el mismo punto inicial y terminal y la misma gráfica y orientación, pero $\Gamma(t)$ se mueve a lo largo de la gráfica conforme t varía de a a b, mientras $\Phi(p)$ se mueve a lo largo de la misma gráfica en la misma dirección conforme p varía de A a B. Informalmente, dos curvas son equivalentes si una es sólo una reparametrización de la otra.

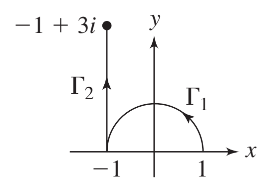


FIGURA 10.7 *La concatenación de* $\Gamma_1(t) = e^{it}$ para $0 \leq t \leq \pi$, *con* $\Gamma_2(t) = -1 + it$ *para* $0 \leq t \leq 3$.

EJEMPLO 10.5

Sean

$$\Gamma(t) = t^2 - 2ti \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1,$$

y

$$\Phi(p) = \text{sen}^2(p) - 2\,\text{sen}(p)i \quad \text{para } 0 \leq p \leq \pi/2.$$

Ambas curvas tienen la misma gráfica (figura 10.8), extendiéndose del punto inicial 0 al punto final $1 - 2i$. Sea

$$t = \varphi(p) = \text{sen}(p) \quad \text{para } 0 \leq p \leq \pi/2.$$

Entonces φ es una función creciente y diferenciable, que manda $[0, \pi/2]$ sobre $[0, 1]$. Más aún, para $0 \leq p \leq \pi/2$,

$$\Gamma(\text{sen}(p)) = \text{sen}^2(p) - 2\,\text{sen}(p)i = \Phi(p).$$

Por tanto, estas curvas son equivalentes. ■

Informalmente, se describirá a menudo una curva geométricamente y se hablará de la curva y de su gráfica de manera indistinta. Cuando se hace esto, es importante no perder de vista la orientación a lo largo de la curva y si es o no una curva cerrada.

Por ejemplo, suponga que Γ es una recta de $1 + i$ a $3 + 3i$ (figura 10.9). Esto proporciona la gráfica y su orientación, y así encuentra Γ. Como la gráfica es el segmento de recta de $(1, 1)$ a $(3, 3)$, las funciones coordenadas son

$$x = t,\ y = t \quad \text{para } 1 \leq t \leq 3.$$

Entonces

$$\Gamma(t) = x(t) + y(t)i = (1 + i)t \quad \text{para } 1 \leq t \leq 3$$

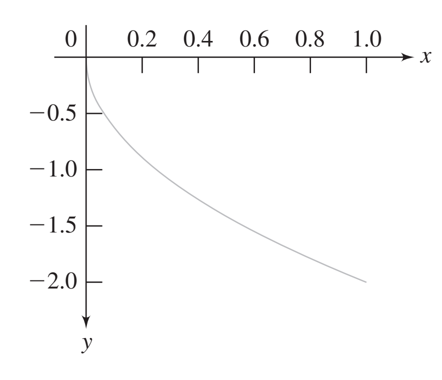
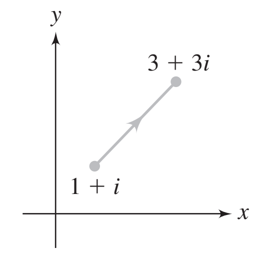
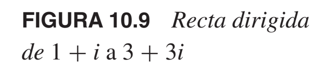



FIGURA 10.8 *Gráfica de* $\Gamma(t) = t^2 - 2it$ *para* $0 \leq t \leq 1$.




FIGURA 10.9 *Recta dirigida de* $1 + i$ a $3 + 3i$

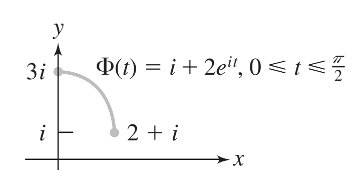


FIGURA 10.10

es una representación de la curva que ha sido descrita. Por supuesto, hay otras representaciones equivalentes.

Como otro ejemplo, suponga que Φ es el cuarto de círculo de radio 2 alrededor de i, de $2 + i$ a $3i$ (figura 10.10). Nuevamente, se ha dado la gráfica y su orientación. Usando coordenadas polares con centro en $i = (0, 1)$, puede escribir las funciones coordenadas

$$x(t) = 2\cos(t),\ y(t) = 1 + 2\,\mathrm{sen}(t) \quad \text{para } 0 \leq t \leq \pi/2.$$

Como una función, esta curva puede escribirse como

$$\Phi(t) = 2\cos(t) + 2i\,\mathrm{sen}(t) + i = i + 2e^{it} \quad \text{para } 0 \leq t \leq \pi/2.$$

También se pueden usar otras representaciones equivalentes.

Finalmente, interpretará con frecuencia enunciados tales como "f es continua en Γ", lo que significa que f es una función compleja que es continua en todos los puntos en la gráfica de Γ. Y "z en Γ", significa un número complejo z que está en la gráfica de Γ.

Las curvas son los objetos sobre los cuales se integran las funciones complejas. Ahora se definirá esta integral.

SECCIÓN 10.1 PROBLEMAS

En cada problema del 1 al 10, dibuje la gráfica de la curva, determine sus puntos inicial y terminal, si es o no cerrada, si es o no simple y la tangente a la curva en cada punto donde exista. Esta tangente puede expresarse como un vector o como una función compleja.

1. $\Gamma(t) = 4 - 2i + 2e^{it}$ para $0 \leq t \leq \pi$
2. $\Gamma(t) = ie^{2it}$ para $0 \leq t \leq 2\pi$
3. $\Gamma(t) = t + t^2 i$ para $1 \leq t \leq 3$
4. $\Gamma(t) = 3\cos(t) + 5\,\mathrm{sen}(t)i$ para $0 \leq t \leq 2\pi$
5. $\Theta(t) = 3\cos(t) + 5\,\mathrm{sen}(t)i$ para $0 \leq t \leq 4\pi$
6. $\Lambda(t) = 4\,\mathrm{sen}(t) - 2\cos(t)i$ para $-\pi \leq t \leq \pi/2$
7. $\Psi(t) = t - t^2 i$ para $-2 \leq t \leq 4$
8. $\Phi(t) = (2t + 1) - \frac{1}{2}t^2 i$ para $-3 \leq t \leq -1$
9. $\Gamma(t) = \cos(t) - 2\,\mathrm{sen}(2t)i$ para $0 \leq t \leq 2$
10. $\Delta(t) = t^2 - t^4 i$ para $-1 \leq t \leq 1$

10.2 La integral de una función compleja

Definirá la integral de una función compleja en dos pasos, empezando con el caso especial donde f es una función compleja definida en un intervalo $[a, b]$ de números reales. Un ejemplo de este tipo de función es $f(x) = x^2 + \operatorname{sen}(x)i$ para $0 \le x \le \pi$. Es natural integrar tal función como

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} x^2\,dx + i\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx = \frac{1}{3}\pi^3 + 2i.$$

Este es el modelo para estas funciones.

DEFINICIÓN 10.1

Sea $f : [a, b] \to \mathfrak{C}$ una función compleja. Sea $f(x) = u(x) + iv(x)$ para $a \le x \le b$. Entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx.$$

Ambas integrales de la derecha son integrales de Riemann de funciones de variable real sobre $[a, b]$.

EJEMPLO 10.6

Sea $f(x) = x - ix^2$ para $1 \le x \le 2$. Entonces

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 x\,dx - i\int_1^2 x^2\,dx = \frac{3}{2} - \frac{7}{3}i. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 10.7

Sea $f(x) = \cos(2x) + i\operatorname{sen}(2x)$ para $0 \le x \le \pi/4$. Entonces

$$\int_0^{\pi/4} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/4} \cos(2x)\,dx + i\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(2x)\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i. \quad \blacksquare$$

En el último ejemplo, es tentador hacer $f(x) = e^{2ix}$ y adaptar el teorema fundamental del cálculo a funciones complejas para obtener

$$\int_0^{\pi/4} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/4} e^{2ix}\,dx = \left[\frac{1}{2i}e^{2ix}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2i}\left(e^{\pi i/2} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right) = \frac{1}{2i}(-1 + i) = \frac{1}{2}(1 + i).$$

Estos cálculos se justificarán en breve.

Ahora se define la integral de una función compleja sobre una curva en el plano.

DEFINICIÓN 10.2

Sea f una función compleja. Sea Γ: $[a, b] \to \mathfrak{C}$ una curva suave en el plano. Suponga que f es continua en todos los puntos en Γ. Entonces la integral de f sobre Γ se define como

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\Gamma(t))\Gamma'(t)\,dt.$$

Como $z = \Gamma(t)$ en la curva, esta integral se escribe frecuentemente como

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt.$$

Esta formulación tiene la ventaja de sugerir la manera que $\int_\Gamma f(z)\,dz$ es evaluada, reemplace z con $z(t)$ en la curva. Sea $dz = z'(t)\,dt$, e integre sobre el intervalo $a \leq t \leq b$.

EJEMPLO 10.8

Evaluar $\int_\Gamma \overline{z}\,dz$ si $\Gamma(t) = e^{it}$ para $0 \leq t \leq \pi$.

La gráfica de Γ es la mitad superior del círculo unitario, orientado en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj de 1 a -1 (figura 10.11). En Γ, $z(t) = e^{it}$ y $z'(t) = ie^{it}$. Más aún, $f(z(t)) = \overline{z(t)} = e^{-it}$ ya que t es real. Entonces

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_0^\pi e^{-it} i e^{it}\,dt = i\int_0^\pi dt = \pi i. \blacksquare$$

EJEMPLO 10.9

Evaluar $\int_\Phi z^2\,dz$ si $\Phi(t) = t + it$ para $0 \leq t \leq 1$.

La gráfica de Φ es el segmento de recta del origen a $(1, 1)$, como se muestra en la figura 10.12. En la curva, $z(t) = (1 + i)t$. Como $f(z) = z^2$,

$$f(z(t)) = (z(t))^2 = (1 + i)^2t^2 = 2it^2$$

y

$$z'(t) = 1 + i.$$

Entonces

$$\int_\Phi z^2\,dz = \int_0^1 2it^2(1 + i)\,dt = (-2 + 2i)\int_0^1 t^2\,dt = \frac{2}{3}(-1 + i). \blacksquare$$

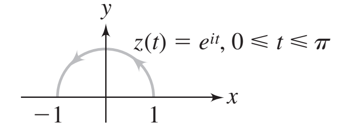


FIGURA 10.11

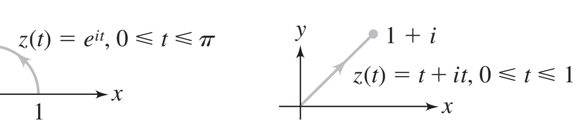


FIGURA 10.12

EJEMPLO 10.10

Evaluar $\int_\Gamma z \operatorname{Re}(z)\, dz$ si $\Gamma(t) = t - it^2$ para $0 \le t \le 2$.

Aquí $f(z) = z \operatorname{Re}(z)$, y en esta curva, $z(t) = t - it^2$, así

$$f(z(t)) = z(t) \operatorname{Re}(z(t)) = (t - it^2)t = t^2 - it^3.$$

Más aún,

$$z'(t) = 1 - 2it,$$

así

$$\int_\Gamma z \operatorname{Re}(z)\, dz = \int_0^2 (t^2 - it^3)(1 - 2it)\, dt = \int_0^2 (t^2 - 3it^3 - 2t^4)\, dt$$

$$= \int_0^2 (t^2 - 2t^4)\, dt - 3i \int_0^2 t^3\, dt = -\frac{152}{15} - 12i. \quad ■$$

Se probará que las integrales de una función sobre curvas equivalentes son iguales. Esto es importante porque posibilita parametrizar una curva de una infinidad de maneras distintas, y esto no cambiará el valor de la integral de una función dada sobre la curva.

TEOREMA 10.1

Sean Γ y Φ curvas equivalentes y sea f continua en su gráfica. Entonces

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_\Phi f(z)\, dz. \quad ■$$

Prueba Suponga que $\Gamma: [a, b] \to \mathfrak{C}$ y $\Phi : [A, B] \to \mathfrak{C}$. Debido a que estas curvas son equivalentes, existe una función continua φ con derivada positiva en $[A, B]$ tal que $\varphi(A) = a$ y $\varphi(B) = b$ y $\Phi(p) = \Gamma(\varphi(p))$ para $A \le p \le B$. Por la regla de la cadena,

$$\Phi'(p) = \Gamma'(\varphi(p))\varphi'(p).$$

Entonces

$$\int_\Phi f(z)\, dz = \int_A^B f(\Phi(p))\Phi'(p)\, dp = \int_A^B f(\Gamma(\varphi(p))\Gamma'(\varphi(p))\varphi'(p)\, dp.$$

Sea $s = \varphi(p)$. Entonces s varía de a a b conforme p varía de A a B. Continuando a partir de la última ecuación,

$$\int_\Phi f(z)\, dz = \int_a^b f(\Gamma(s))\Gamma'(s)\, ds = \int_\Gamma f(z)\, dz. \quad ■$$

Hasta aquí integra sólo sobre curvas suaves. Puede extender la definición a una integral sobre curvas suaves a pedazos sumando las integrales sobre las componentes de la concatenación.

DEFINICIÓN 10.3

Sea $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \cdots \oplus \Gamma_n$ una concatenación de curvas suaves. Sea f continua en cada Γ_j. Entonces

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_j} f(z)\,dz.$$

EJEMPLO 10.11

Sea $\Gamma_1(t) = 3e^{it}$ para $0 \le t \le \pi/2$, y sea $\Gamma_2(t) = t^2 + 3i(t+1)$ para $0 \le t \le 1$. Γ_1 es el cuarto de círculo de radio 3 alrededor del origen, recorrido en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, de 3 a $3i$, y Γ_2 es la parte de la parábola $x = (y-3)^2/9$ de $3i$ a $1 + 6i$. La figura 10.13 muestra la gráfica de $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$. Evaluará $\int_\Gamma \operatorname{Im}(z)\,dz$.

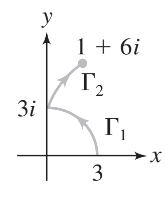


FIGURA 10.13

En Γ_1, escriba $z(t) = 3e^{it} = 3\cos(t) + 3i\,\mathrm{sen}(t)$. Entonces

$$\int_{\Gamma_1} \operatorname{Im}(z)\,dz = \int_0^{\pi/2} \operatorname{Im}(z(t))z'(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} 3\,\mathrm{sen}(t)[-3\,\mathrm{sen}(t) + 3i\cos(t)]\,dt$$

$$= -9\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^2(t)\,dt + 9i\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}(t)\cos(t)\,dt = -\frac{9}{4}\pi + \frac{9}{2}i.$$

En Γ_2, $z(t) = t^2 + 3i(t+1)$ y $z'(t) = 2t + 3i$, así

$$\int_{\Gamma_2} \operatorname{Im}(z)\,dz = \int_0^1 \operatorname{Im}[t^2 + 3i(t+1)][2t + 3i]\,dt$$

$$= \int_0^1 3(t+1)(2t+3i)\,dt = \int_0^1 (6t^2 + 6t + 9it + 9i)\,dt$$

$$= \int_0^1 (6t^2 + 6t)\,dt + 9i\int_0^1 (t+1)\,dt = 5 + \frac{27}{2}i.$$

Entonces

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = -\frac{9}{4}\pi + \frac{9}{2}i + 5 + \frac{27}{2}i = 5 - \frac{9}{2}\pi + 18i. \quad ■$$

10.2.1 La integral compleja en términos de integrales reales

Es posible pensar en la integral de una función compleja sobre una curva como una suma de integrales de línea de funciones de valor real de dos variables reales sobre la curva. Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y, en la curva Γ, suponga que $z(t) = x(t) + iy(t)$ para $a \le t \le b$. Ahora

$$f(z(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))$$

y

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

así

$$f(z(t))z'(t) = [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))]\,[x'(t) + iy'(t)]$$
$$= u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)$$
$$+ i[v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)].$$

Entonces

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_a^b \left[u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\right] dt$$
$$+ i\int_a^b [v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)]\,dt.$$

En la notación de integrales de línea reales,

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\Gamma v\,dx + u\,dy. \quad (10.1)$$

Esta formulación permite una perspectiva que algunas veces es útil en el desarrollo de las propiedades de las integrales complejas.

EJEMPLO 10.12

Evaluar $\int_\Gamma iz^2\,dz$ si $\Gamma(t) = 4\cos(t) + i\,\text{sen}(t)$ para $0 \leq t \leq \pi/2$. La figura 10.14 muestra la gráfica de Γ, que es parte de la elipse

$$\frac{x^2}{16} + y^2 = 1.$$

Para evaluar $\int_\Gamma iz^2\,dz$ en términos de integrales de línea reales, primero calcule

$$f(z) = iz^2 = -2xy + i(x^2 - y^2) = u + iv,$$

donde

$$u(x, y) = -2xy \quad \text{y} \quad v(x, y) = x^2 - y^2.$$

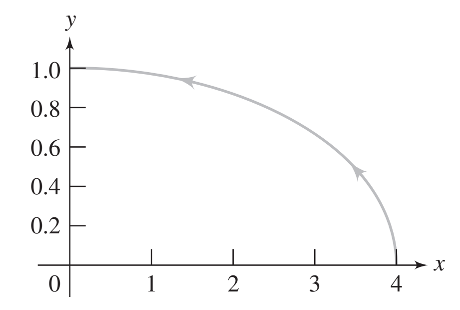


FIGURA 10.14 $x = 4\cos(t)$, $y = \text{sen}(t)$ *para* $0 \leq t \leq \pi/2$.

En la curva, $x(t) = 4\cos(t)$ y $y(t) = \text{sen}(t)$. Ahora la ecuación (10.1) da

$$\int_\Gamma iz^2\,dz = \int_0^{\pi/2} (-8\cos(t)\,\text{sen}(t))\,(-4\,\text{sen}(t))\,dt - \int_0^{\pi/2} \left(16\cos^2(t) - \text{sen}^2(t)\right)\cos(t)\,dt$$

$$+ i\left[\int_0^{\pi/2} \left(16\cos^2(t) - \text{sen}^2(t)\right)(-4\,\text{sen}(t))\,dt + \int_0^{\pi/2} (-8\cos(t)\,\text{sen}(t))\cos(t)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{64}{3}i. \quad \blacksquare$$

Tendrá una manera fácil de evaluar integrales de línea sencillas tales como $\int_\Gamma iz^2\,dz$, cuando tenga más propiedades de las integrales complejas.

10.2.2 Propiedades de las integrales complejas

Desarrollará algunas propiedades de $\int_\Gamma f(z)dz$.

TEOREMA 10.2 *Linealidad*

Sea Γ una curva suave a pedazos y sean f y g continuas en Γ. Sean α y β números complejos. Entonces

$$\int_\Gamma (\alpha f(z) + \beta g(z))\,dz = \alpha\int_\Gamma f(z)\,dz + \beta\int_\Gamma g(z)\,dz. \quad \blacksquare$$

Esta conclusión es ciertamente lo que se espera de cualquier cosa llamada una integral. El resultado se extiende a sumas finitas arbitrarias:

$$\int_\Gamma \sum_{j=1}^{n} \alpha_i f_j(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_\Gamma f_j(z)\,dz.$$

La orientación juega un papel significativo en la integral compleja, ya que es una parte intrínseca de la curva sobre la cual se calcula la integral. Suponga que $\Gamma: [a, b] \to \mathfrak{C}$ es una curva suave, como se distingue en la figura 10.15. La flecha indica la orientación. Puede invertir esta orientación definiendo una curva nueva

$$\Gamma_r(t) = \Gamma(a + b - t) \quad \text{para } a \le t \le b.$$

Γ_r es una curva suave que tiene la misma gráfica que Γ. Sin embargo,

$$\Gamma_r(a) = \Gamma(b) \quad \text{y} \quad \Gamma_r(b) = \Gamma(a).$$

Γ_r empieza donde termina Γ, y Γ_r termina donde empieza Γ. Se invirtió la orientación.

Invertir la orientación cambia el signo de la integral.

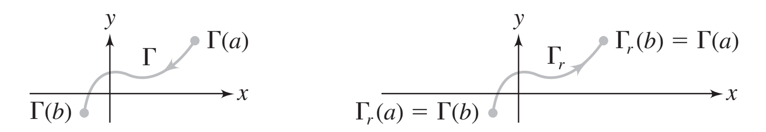


FIGURA 10.15 *Orientación invertida en una curva.*

TEOREMA 10.3 *Inversión de la orientación*

Sea $\Gamma: [a, b] \to C$ una curva suave. Sea f continua en Γ. Entonces

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = -\int_{\Gamma_r} f(z)\,dz. \quad ■$$

Prueba Sea $u = a + b - t$. Por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dt}\Gamma_r(t) = \frac{d}{dt}\Gamma(a+b-t) = \Gamma'(u)u'(t) = -\Gamma'(u) = -\Gamma'(a+b-t).$$

Entonces

$$\int_{\Gamma_r} f(z)\,dz = \int_a^b f(\Gamma_r(t))\Gamma_r'(t)\,dt = -\int_a^b f(\Gamma(a+b-t))\Gamma'(a+b-t)\,dt.$$

Ahora cambie variables poniendo $s = a + b - t$. Entonces

$$\int_{\Gamma_r} f(z)\,dz = -\int_b^a f(\Gamma(s))\Gamma'(s)(-1)\,ds = -\int_a^b f(\Gamma(s))\Gamma'(s)\,ds = -\int_{\Gamma} f(z)\,dz. \quad ■$$

No necesita definir Γ_r para invertir la orientación en integrales específicas, sólo integrar de b a a en lugar de a a b. Esto invierte los papeles de los puntos inicial y terminal y por tanto, la orientación. O puede integrar de a a b y tomar el negativo del resultado.

Enuncie una versión compleja del teorema fundamental del cálculo. Establece que si f tiene una antiderivada continua F, entonces el valor de $\int_\Gamma f(z)dz$ es el valor de F en el punto final de Γ menos el valor de F en el punto inicial.

TEOREMA 10.4

Sea f continua en un conjunto abierto G y suponga que $F'(z) = f(z)$ para z en G. Sea $\Gamma: [a, b] \to G$ una curva suave en G. Entonces

$$\int_a^b f(z)\,dz = F(\Gamma(b)) - F(\Gamma(a)).$$

Prueba Con $\Gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$ y $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$,

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt = \int_a^b F'(z(t))z'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}F(z(t))\,dt.$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}U(x(t), y(t))\,dt + i\int_a^b \frac{d}{dt}V(x(t), y(t))\,dt.$$

Ahora es factible aplicar el teorema fundamental del cálculo a las dos integrales reales de la derecha para obtener

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = U(x(b), y(b)) + iV(x(b), y(b)) - [U(x(a), y(a)) + iV(x(a), y(a))]$$

$$= F(x(b), y(b)) - F(x(a), y(a)) = F(\Gamma(b)) - F(\Gamma(a)). \quad ■$$

EJEMPLO 10.13

Calculará $\int_\Gamma (z^2 + iz)\,dz$ si $\Gamma(t) = t^5 - t\cos(t)i$ para $0 \le t \le 1$.

Este es un cálculo elemental pero tedioso si lo hace calculando $\int_0^1 f(z(t))z'(t)\,dt$. Sin embargo, si G es todo el plano complejo, entonces G es abierto, y $F(z) = z^3/3 + iz^2/2$ satisface $F'(z) = f(z)$. El punto inicial de Γ es $\Gamma(0) = 0$ y el punto final es $\Gamma(1) = 1 - \cos(1)i$. Por tanto,

$$\int_\Gamma (z^2 + iz)\,dz = F(\Gamma(1)) - F(\Gamma(0)) = F(1 - \cos(1)i) - F(0)$$
$$= \frac{1}{3}(1-\cos(1)i)^3 + \frac{i}{2}(1-\cos(1)i)^2 = (1-\cos(1)i)^2\left(\frac{1}{3}(1-\cos(1)i) + \frac{1}{2}i\right).$$

Una consecuencia del teorema 10.4 es que bajo las condiciones dadas, el valor de $\int_\Gamma f(z)dz$ depende solamente de los puntos inicial y terminal de la curva. Si Φ también es una curva suave en G teniendo el mismo punto inicial que Γ y el mismo punto final que Γ, entonces

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Phi f(z)\,dz.$$

Esto se llama *independencia de la trayectoria*, la cual verá más adelante.

Otra consecuencia es que si Γ es una curva cerrada en G, entonces los puntos inicial y final coinciden y

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

Considerará esta circunstancia con más detalle cuando vea el teorema de Cauchy.

El siguiente resultado se usa para acotar la magnitud de una integral, ya que algunas veces lo necesita para hacer estimaciones en ecuaciones o desigualdades.

TEOREMA 10.5

Sea Γ: $[a, b] \to C$ una curva suave y sea f continua en Γ. Entonces

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \leq \int_a^b |f(z(t))|\left|z'(t)\right| dt.$$

Si, además, existe un número positivo M tal que $|f(z)| \leq M$ para todo z en Γ, entonces

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \leq ML,$$

donde L es la longiud de Γ.

Prueba Escribir el número complejo $\int_\Gamma f(z)\,dz$ en la forma polar:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = re^{i\theta}.$$

Entonces

$$r = e^{-i\theta}\int_\Gamma f(z)\,dz = e^{-i\theta}\int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt.$$

Como r es real,

$$r = \mathrm{Re}(r) = \mathrm{Re}\left[e^{-i\theta}\int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt\right] = \int_a^b \mathrm{Re}\left[e^{-i\theta} f(z(t))z'(t)\right] dt.$$

Ahora para cualquier número complejo w, $\mathrm{Re}(w) \leq |w|$. Por tanto,

$$\mathrm{Re}\left[e^{-i\theta} f(z(t))z'(t)\right] \leq \left|e^{-i\theta} f(z(t))z'(t)\right| = \left|f(z(t))z'(t)\right|,$$

como $|e^{-i\theta}| = 1$ para θ real. Entonces

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| = r = \left|\int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt\right| \le \int_a^b \left|f(z(t))z'(t)\right| dt = \int_a^b |f(z(t))|\left|z'(t)\right| dt,$$

como quería demostrar.

Si ahora $|f(z)| \le M$ en Γ, entonces

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \le \int_a^b |f(z(t))|\left|z'(t)\right| dt \le M\int_a^b \left|z'(t)\right| dt.$$

Si $\Gamma(t) = x(t) + iy(t)$, entonces

$$\left|z'(t)\right| = \left|x'(t) + iy'(t)\right| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2},$$

así

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \le M\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = ML.$$

EJEMPLO 10.14

Obtendrá una cota en $\left|\int_\Gamma e^{\mathrm{Re}(z)}\,dz\right|$, donde Γ es el círculo de radio 2 alrededor del origen, recorrido una vez en sentido del movimiento de las manecillas del reloj.

En Γ puede escribir $z(t) = 2\cos(t) + 2i\,\mathrm{sen}(t)$ para $0 \le t \le 2\pi$. Ahora

$$\left|e^{\mathrm{Re}(z(t))}\right| = e^{2\cos(t)} \le e^2$$

para $0 \le t \le 2\pi$. Como la longitud de Γ es 4π, entonces

$$\left|\int_\Gamma e^{\mathrm{Re}(z)}\,dz\right| \le 4\pi e^2. \quad ■$$

Este número acota la magnitud de la integral. No se pide que sea una aproximación del valor de la integral con ningún grado de exactitud.

10.2.3 Integrales de series de funciones

Frecuentemente querrá intercambiar una integral y una serie. Se dan condiciones bajo las cuales

$$\int_\Gamma \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\,dz\right) \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\int_\Gamma f_n(z)\,dz.$$

Probará que si puede acotar cada $f_n(z)$, para z en la curva, por una constante positiva M_n de manera que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converja, entonces intercambiará la sumatoria y la integral e integrará la serie término a término.

TEOREMA 10.6 Integración término a término

Sea Γ una curva suave y sea f_n continua en Γ para $n = 1, 2, \ldots$. Suponga que para cada entero positivo n existe un número positivo M_n tal que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge y, para todo z en Γ,

$$|f_n(z)| \le M_n.$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge absolutamente para todo z en Γ. Más aún, si denota $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = g(z)$, entonces

$$\int_\Gamma g(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Gamma f_n(z)\,dz. \quad \blacksquare$$

Prueba Para cada z en Γ, la serie real $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ converge por comparación con la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$. Ahora sea L la longitud de Γ y considere la suma parcial

$$F_N(z) = \sum_{n=1}^{N} f_n(z).$$

Cada F_N es continua en Γ y

$$\left| \int_\Gamma g(z)\,dz - \sum_{n=1}^{N} \int_\Gamma f_n(z)\,dz \right| = \left| \int_\Gamma [g(z)\,dz - F_N(z)]\,dz \right|$$
$$\leq L \left(\max_{z \text{ en } \Gamma} |g(z) - F_N(z)| \right).$$

Ahora para todo z en Γ,

$$|g(z) - F_n(z)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(z) \right| \leq \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n \right|.$$

Si ϵ es cualquier número positivo, puede elegir N suficientemente grande para que $\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n < \epsilon/\text{L}$, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge. Pero entonces

$$\max_{z \text{ en } \Gamma} |g(z) - F_N(z)| < \frac{\epsilon}{L},$$

así

$$\left| \int_\Gamma g(z)\,dz - \sum_{n=1}^{N} \int_\Gamma f_n(z)\,dz \right| < L\frac{\epsilon}{L} = \epsilon$$

para N suficientemente grande. Esto prueba que

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_\Gamma f_n(z)\,dz = \int_\Gamma g(z)\,dz,$$

como quería demostrar. $\blacksquare$

Por supuesto, el teorema se aplica a series de potencias dentro de su círculo de convergencia, con $f_n(z) = c_n(z - z_0)^n$.

SECCIÓN 10.2 PROBLEMAS

En cada problema del 1 al 15, evalúe $\int_\Gamma f(z)dz$. Todas las curvas cerradas están orientadas en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, a menos que se especifique la excepción.

1. $f(z) = 1$; $\Gamma(t) = t^2 - it$ para $1 \leq t \leq 3$.

2. $f(z) = z^2 - iz$; Γ es el cuarto de círculo alrededor del origen de 2 a $2i$.

3. $f(z) = \text{Re}(z)$; Γ es el segmento de recta de 1 a $2 + i$.

4. $f(z) = 1/z$; Γ es la parte del semicírculo de radio 4 alrededor del origen de $4i$ a $-4i$.

5. $f(z) = z - 1$; Γ es cualquier curva suave a pedazos de $2i$ a $1 - 4i$.

6. $f(z) = iz^2$; Γ es el segmento de recta de $1 + 2i$ a $3 + i$.

7. $f(z) = \text{sen}(2z)$; Γ es el segmento de recta de $-i$ a $-4i$.

8. $f(z) = 1 + z^2$; Γ es la parte del círculo de radio 3 alrededor del origen de $-3i$ a $3i$.

9. $f(z) = -i\cos(z)$; Γ es cualquier curva suave a pedazos de 0 a $2 + i$.

10. $f(z) = |z|^2$; Γ es el segmento de recta de -4 a i.

11. $f(z) = (z - i)^3$; $\Gamma(t) = t - it^2$ para $0 \leq t \leq 2$.

12. $f(z) = e^{iz}$; Γ es cualquier curva suave a pedazos de -2 a $-4 - i$.

13. $f(z) = i\overline{z}$; Γ es el segmento de recta de 0 a $-4 + 3i$.

14. $f(z) = \text{Im}(z)$; Γ es el círculo de radio 1 alrededor del origen.

15. $f(z) = |z|^2$; Γ es el segmento de recta de $-i$ a 1.

16. Encuentre una cota para $\left|\int_\Gamma \cos(z^2)\,dz\right|$, si Γ es el círculo de radio 4 alrededor del origen.

17. Encuentre una cota para $\left|\int_\Gamma \frac{1}{1+z}\,dz\right|$, si Γ es el segmento de recta de $2 + i$ a $4 + 2i$.

10.3 Teorema de Cauchy

El teorema de Cauchy (o de la integral de Cauchy) es considerado el teorema fundamental de la integración compleja y su nombre es en honor del matemático e ingeniero francés del siglo XIX, Augustin-Louis Cauchy. Él tuvo la idea del teorema, así como de muchas de sus consecuencias, pero fue capaz de probarlo sólo bajo condiciones, que después se encontró que son restriciones innecesarias. Edouard Goursat probó el teorema como se suele enunciar ahora, y por esta razón algunas veces es llamado el teorema de Cauchy-Goursat.

El enunciado del teorema usa implícitamente el teorema de la curva de Jordan, que establece que una curva continua, simple y cerrada Γ en el plano separa al plano en dos conjuntos abiertos. Uno de estos conjuntos es no acotado y se llama el *exterior* de Γ, y el otro es acotado y se llama el *interior* de Γ. La (gráfica de la) curva no pertenece a ninguno de estos conjuntos, pero forma la frontera de ambos. La figura 10.16 ilustra el teorema. A pesar de que esta conclusión puede parecer obvia para las curvas cerradas que se suelen dibujar, es difícil de probar debido a la generalidad de su enunciado.

Alguna terminología determinará al enunciado del teorema de Cauchy más eficiente.

DEFINICIÓN 10.4 Trayectoria

Una trayectoria es una curva simple, suave a pedazos.

Una trayectoria en un conjunto S es una trayectoria cuya gráfica está en S.

Así, una trayectoria es una concatenación de curvas suaves que no se cruzan a sí mismas.

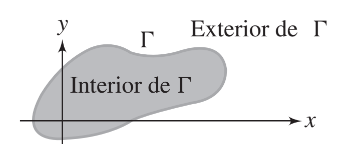


FIGURA 10.16 *Teorema de la curva de Jordan.*

DEFINICIÓN 10.5 Conjunto conexo

Un conjunto S de números complejos es conexo si, dados dos puntos cualesquiera z y w en S, existe una trayectoria en S que tiene a z y a w como puntos extremos.

S es conexo si es posible ir desde cualquier punto de S a cualquier otro punto moviéndose a lo largo de alguna trayectoria totalmente contenida en S. Un disco abierto es conexo, así como también lo es un disco cerrado, mientras que el conjunto que consiste en los dos discos abiertos $|z| < 1$ y $|z - 10i| < 1$ no lo es (figura 10.17), ya que no es posible ir de 0 a $10i$ sin salir del conjunto.

DEFINICIÓN 10.6 Dominio

Un conjunto de números complejos, abierto y conexo se llama un dominio.

D es un dominio si:

1. Alrededor de cualquier z en D, hay algún disco abierto que contiene sólo puntos de D.
2. Puede ir desde cualquier punto en D a cualquier otro punto en D por una trayectoria en D.

Por ejemplo, cualquier disco abierto es un dominio, como lo es el semiplano superior que consiste de todo z con $\text{Im}(z) > 0$. Un disco cerrado no es un dominio (es conexo pero no abierto), y un conjunto que consiste en dos discos abiertos ajenos no es un dominio (es abierto pero no conexo).

DEFINICIÓN 10.7 Simplemente conexo

Un conjunto S de números complejos es simplemente conexo si toda trayectoria cerrada en S encierra únicamente puntos de S.

Todo disco abierto es simplemente conexo (figura 10.18). Si dibuja una trayectoria cerrada en un disco abierto, esta trayectoria cerrada encerrará solamente puntos en el disco abierto. El anillo de la figura 10.19, que consiste de los puntos entre dos círculos concéntricos, no es simplemente conexo, a pesar de ser conexo. Puede dibujar una trayectoria cerrada contenida en el anillo, pero que encierra la frontera interior circular del anillo. Esta curva encierra puntos que no están en el anillo, a saber aquellos encerrados por la frontera interior circular.

Ahora está listo para enunciar una versión del teorema de Cauchy.

TEOREMA 10.7 Teorema de Cauchy

Sea f diferenciable en un dominio simplemente conexo G. Sea Γ una trayectoria cerrada en G. Entonces

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0. \blacksquare$$

Con frecuencia las integrales alrededor de trayectorias cerradas se denotan por $\oint$. En esta notación, la conclusión del teorema se lee $\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$. El óvalo en el signo de la integral es sólo para recordar que la trayectoria es cerrada y no altera cómo opera la integral o la manera de evaluarla.

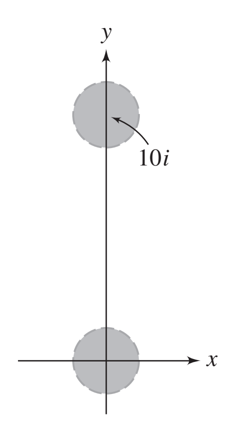


FIGURA 10.17 *Discos abiertos ajenos forman un conjunto que no es conexo.*

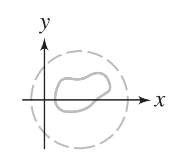


FIGURA 10.18 *Un disco abierto es simplemente conexo.*

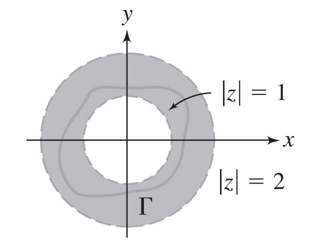


FIGURA 10.19 *El conjunto de puntos entre dos círculos concéntricos no es simplemente conexo.*

Informalmente, el teorema de Cauchy establece que $\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0$ si f es diferenciable en la curva y en todo punto encerrado por la curva. Se analizará la prueba después de ver dos ejemplos. Como una convención, las curvas cerradas están orientadas positivamente (en sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj), a menos que se especifique.

EJEMPLO 10.15

Evaluar $\oint_\Gamma e^{z^2}\,dz$, donde Γ es cualquier trayectoria cerrada en el plano.

La figura 10.20 muestra una Γ típica. Aquí $f(z) = e^{z^2}$ es diferenciable para todo z, y el plano completo es un dominio simplemente conexo. Por tanto,

$$\oint_\Gamma e^{z^2}\,dz = 0. \quad ■$$

EJEMPLO 10.16

Evaluar

$$\oint_\Gamma \frac{2z+1}{z^2+3iz}\,dz,$$

donde Γ es el círculo $|z+3i| = 2$ de radio 2 y centro $-3i$ (figura 10.21).

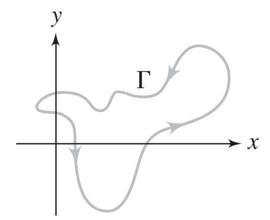


FIGURA 10.20 *Una trayectoria cerrada simple* Γ.

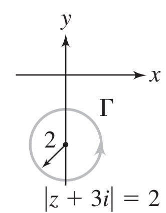


FIGURA 10.21

Puede parametrizar $\Gamma(t) = -3i + 2e^{it}$ para $0 \leq t \leq 2\pi$. $\Gamma(t)$ recorre el círculo una vez, en sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj, conforme t varía de 0 a 2π.

Primero observe que $f(z)$ es diferenciable excepto en los puntos donde el denominador se anula, 0 y $-3i$. Use una descomposición en fracciones parciales para escribir

$$f(z) = \frac{1}{3i}\frac{1}{z} + \left(\frac{6+i}{3}\right)\frac{1}{z+3i}.$$

Como $1/z$ es diferenciable en Γ y dentro del dominio simplemente conexo encerrado por ella, por el teorema de Cauchy,

$$\oint_\Gamma \frac{1}{3i}\frac{1}{z}\,dz = 0.$$

Sin embargo, $1/(z + 3i)$ no es diferenciable en el dominio simplemente conexo encerrado por Γ, de manera que no es posible aplicar el teorema de Cauchy a la integral de esta función. Evalúe esta integral directamente escribiendo $z(t) = -3i + 2e^{it}$:

$$\oint_\Gamma \left(\frac{6+i}{3}\right)\frac{1}{z+3i}\,dz = \frac{6+i}{3}\int_0^{2\pi} \frac{1}{z(t)+3i} z'(t)\,dt$$

$$= \frac{6+i}{3}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2e^{it}} 2ie^{it}\,dt = \frac{6+i}{3}\int_0^{2\pi} i dt = \frac{6+i}{3}(2\pi i).$$

Por tanto,

$$\oint_\Gamma \frac{2z+1}{z^2+3iz}\,dz = \frac{6+i}{3}(2\pi i) = \left(-\frac{2}{3} + 4i\right)\pi. \blacksquare$$

En breve veremos otras ramificaciones del teorema de Cauchy impresionantes.

10.3.1 Prueba del teorema de Cauchy para un caso especial

Si añade una hipótesis adicional, es fácil probar el teorema de Cauchy. Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y suponga que u y v y sus primeras derivadas parciales son continuas en G. Ahora obtiene el teorema de Cauchy inmediatamente aplicando el teorema de Green y las ecuaciones de Cauchy-Riemann a la ecuación (10.1). Si D consiste en todos los puntos en y encerrados por Γ, entonces

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \oint_\Gamma udx - vdy \quad + i\oint_\Gamma vdx + udy$$
$$= \iint_D \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dA + i\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dA = 0,$$

ya que, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Este argumento es suficientemente bueno para muchas situaciones donde se usa el teorema de Cauchy. Sin embargo, no es un argumento óptimo ya que hace una suposición adicional acerca de la continuidad de las derivadas parciales de u y v. Una prueba rigurosa del teorema como está enunciado involucra sutilezas topológicas con las cuales no es conveniente involucrarnos aquí.

En la siguiente sección desarrollará algunas consecuencias importantes del teorema de Cauchy.

SECCIÓN 10.3 PROBLEMAS

En cada problema del 1 al 12, evalúe la integral de la función sobre la trayectoria cerrada dada. Todas las trayectorias están orientadas positivamente (en sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj). En algunos casos se satisface el teorema de Cauchy, y en otros no.

1. $f(z) = \text{sen}(3z)$; Γ es el círculo $|z| = 4$.

2. $f(z) = \dfrac{2z}{z-i}$; Γ es el círculo $|z - i| = 3$.

3. $f(z) = \dfrac{1}{(z-2i)^3}$; Γ está dada por $|z - 2i| = 2$.

4. $f(z) = z^2 \,\text{sen}(z)$; Γ es el cuadrado con vértices 0, 1, $1 + i$, e i.

5. $f(z) = \overline{z}$; Γ es el círculo unitario alrededor del origen.

6. $f(z) = 1/\overline{z}$; Γ es el círculo de radio 5 alrededor del origen.

7. $f(z) = ze^z$; Γ es el círculo $|z - 3i| = 8$.

8. $f(z) = z^2 - 4z + i$; Γ es el rectángulo con vértices 1, 8, $8 + 4i$ y $1 + 4i$.

9. $f(z) = |z|^2$; Γ es el círculo de radio 7 alrededor del origen.

10. $f(z) = \text{sen}(1/z)$; Γ es el círculo $|z - 1 + 2i| = 1$.

11. $f(z) = \text{Re}(z)$; Γ está dada por $|z| = 2$.

12. $f(z) = z^2 + \text{Im}(z)$; Γ es el cuadrado con vértices 0, $-2i$, $2 - 2i$ y 2.

10.4 Consecuencias del teorema de Cauchy

Esta sección exhibe algunos de los resultados principales de la integración compleja, con implicaciones profundas para entender el comportamiento y las propiedades de las funciones complejas, así como para las aplicaciones de la integral. Como es usual, todas las integrales sobre curvas cerradas son tomadas con una orientación en sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj a menos que se diga otra cosa.

10.4.1 Independencia de la trayectoria

En la sección 10.2.2 se mencionó la independencia de la trayectoria, en la que, bajo ciertas condiciones sobre f, el valor de $\int_\Gamma f(z)\,dz$ depende solamente de los extremos de la curva, y no de la curva particular elegida entre estos extremos.

La independencia de la trayectoria también se puede ver bajo la perspectiva del teorema de Cauchy. Suponga que f es diferenciable en un dominio simplemente conexo G, y z_0 y z_1 son puntos de G. Sean Γ_1 y Γ_2 curvas suaves a pedazos en G con punto inicial z_0 y punto final z_1 (figura 10.22). Si invierte la orientación en Γ_2, obtiene una curva nueva, $-\Gamma_2$, que va de z_1 a z_0. Más aún, la concatenación de Γ_1 y $-\Gamma_2$ forma una curva cerrada Γ, con punto inicial y final z_0 (figura 10.23). Por el teorema de Cauchy y el teorema 10.3,

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0 = \oint_{\Gamma_1 \oplus (-\Gamma_2)} f(z)\,dz = \oint_{\Gamma_1} f(z)\,dz - \oint_{\Gamma_2} f(z)\,dz,$$

implicando que

$$\oint_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \oint_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

Esto significa que la integral no depende de la curva particular (en G) entre z_0 y z_1 y es, por tanto, independiente de la trayectoria.

Este argumento no es muy riguroso, ya que $\Gamma_1 \oplus (-\Gamma_2)$ puede no ser una curva simple (figura 10.24). De hecho, Γ_1 y Γ_2 pueden cruzarse una a la otra cualquier número de veces conforme van de z_0 a z_1. No obstante, se quiere señalar la conexión entre el teorema de Cauchy y el concepto de independencia de la trayectoria de una integral que fue discutida antes.

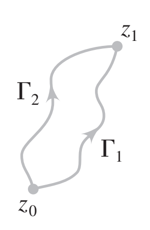


FIGURA 10.22 *Trayectorias* Γ_1 y Γ_2 *de* z_0 *a* z_1.

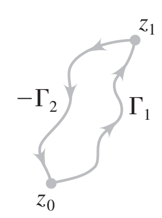


FIGURA 10.23 *Curva cerrada* $\Gamma = \Gamma_1 \oplus (-\Gamma_2)$.

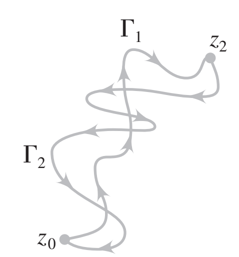


FIGURA 10.24 $\Gamma_1 \oplus (-\Gamma_2)$ *no necesita ser simple*.

Si $\int_\Gamma f(z)\,dz$ es independiente de la trayectoria en G, y Γ es cualquier trayectoria de z_0 a z_1, algunas veces se escribe

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz.$$

El símbolo de la derecha tiene el valor de la integral de línea de la izquierda, siendo Γ cualquier trayectoria de z_0 a z_1 en G.

10.4.2 El teorema de deformación

El teorema de deformación permite, bajo ciertas condiciones, reemplazar una trayectoria de integración cerrada por otra, quizá más conveniente.

TEOREMA 10.8 *Teorema de deformación*

Sean Γ y γ trayectorias cerradas en el plano, con γ en el interior de Γ. Sea f diferenciable en un conjunto abierto que contiene ambas trayectorias y todos los puntos entre ellas. Entonces,

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz. \quad \blacksquare$$

La figura 10.25 muestra la situación del teorema. Puede pensar en deformar una curva, γ, en otra. Imagine que γ está hecha de goma, y la deforma de manera continua en la forma de Γ. Al hacer esto, es necesario que en los pasos intermedios de la deformación de γ a Γ sólo se pase sobre puntos en donde f

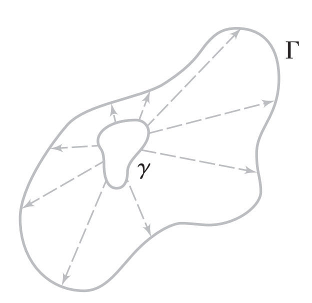


FIGURA 10.25 *Deformando* γ *continuamente en* Γ.

es diferenciable, de aquí la hipótesis acerca de que f sea diferenciable en algún conjunto abierto que contiene ambas trayectorias y todos los puntos entre ellas.

El teorema establece que la integral de f tiene el mismo valor sobre ambas trayectorias cuando una puede ser deformada en la otra, moviéndose sólo sobre los puntos en los cuales la función es diferenciable. Esto significa que reemplaza Γ con otra trayectoria γ que pueda ser más conveniente para usar en la evaluación de la integral. Considere el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 10.17

Evaluar

$$\oint_\Gamma \frac{1}{z-a}\,dz$$

sobre cualquier trayectoria cerrada que encierra el número complejo a dado.

La figura 10.26 muestra una trayectoria típica. No es posible parametrizar Γ porque no la conoce específicamente, es simplemente cualquier trayectoria que encierra a a. Sea γ un círculo de radio r alrededor de a, con r suficientemente pequeño para que γ quede encerrada por Γ (figura 10.27). Ahora $f(z) = 1/(z-a)$ es diferenciable en todos los puntos excepto a, es decir, en ambas curvas y la región entre ellas. Por el teorema de deformación,

$$\oint_\Gamma \frac{1}{z-a}\,dz = \oint_\gamma \frac{1}{z-a}\,dz.$$

Pero γ se puede parametrizar fácilmente: $\gamma(t) = a + re^{it}$ para $0 \le t \le 2\pi$. Entonces

$$\oint_\gamma \frac{1}{z-a}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.$$

Por tanto,

$$\oint_\Gamma \frac{1}{z-a}\,dz = 2\pi i.$$

El punto es que por medio del teorema de deformación, puede evaluar esta integral sobre cualquier trayectoria que encierre a a. Por supuesto, si Γ no encierra a a, y a no está en Γ, entonces $1/(z-a)$ es diferenciable en Γ y el conjunto que encierra, de manera que $\oint_\Gamma [1/(z-a)]\,dz = 0$ por el teorema de Cauchy. ■

La prueba del teorema emplea una técnica útil en diversas ocasiones.

Prueba La figura 10.28 muestra gráficas de trayectorias típicas Γ y γ. Inserta rectas L_1 y L_2 entre Γ y γ (figura 10.29) y las usa para formar dos trayectorias cerradas Φ y Ψ (en la figura 10.30 se muestran separadas para enfatizar). Una trayectoria, Φ, consiste de partes de Γ y γ, junto con L_1 y L_2, con orientación en cada pieza como se muestra para tener orientación positiva en Φ. La otra trayectoria, Ψ, consiste del resto de Γ y γ, nuevamente con L_1 y L_2, con la orientación elegida en cada pieza de manera que Ψ tenga orientación positiva. La figura 10.31 muestra las trayectorias más realísticamente, compartiendo los segmentos insertados L_1 y L_2. En la figura 10.31, Γ está orientada en sentido contrario del movimiento

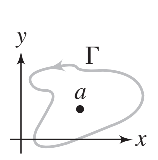


FIGURA 10.26

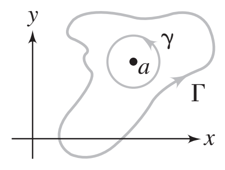


FIGURA 10.27

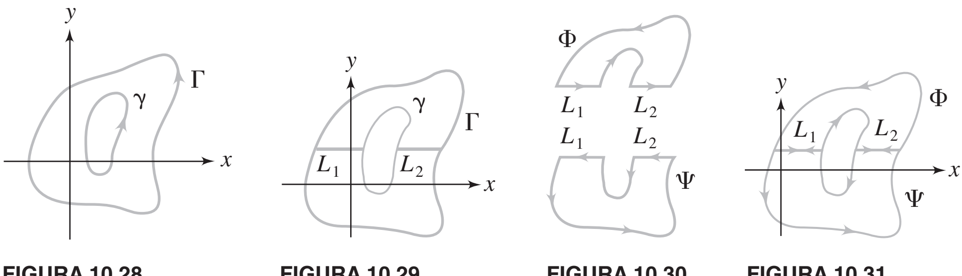


FIGURA 10.28 **FIGURA 10.29** **FIGURA 10.30** **FIGURA 10.31**

de las manecillas del reloj, pero γ en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, debido a sus orientaciones como parte de Φ y Ψ.

Debido a que *f* es diferenciable en ambas Φ y Ψ y los conjuntos que encierra, se satisface el teorema de Cauchy

$$\oint_{\Phi} f(z)\,dz = \oint_{\Psi} f(z)\,dz = 0.$$

Entonces

$$\oint_{\Phi} f(z)\,dz + \oint_{\Psi} f(z)\,dz = 0. \tag{10.2}$$

En esta suma de integrales, cada uno de L_1 y L_2 es integrado en una dirección como parte de Φ y la dirección opuesta como parte de Ψ. Las contribuciones de estos segmentos se cancelan en la suma (10.2). Ahora observe que en la suma de estas integrales, obtiene la integral sobre toda Γ, orientada en sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj, junto con la integral sobre toda γ, orientada en sentido del movimiento de las manecillas del reloj. En vista del teorema 10.3, la ecuación (10.2) se convierte en

$$\oint_{\Phi} f(z)\,dz - \oint_{\gamma} f(z)\,dz = 0,$$

o

$$\oint_{\Phi} f(z)\,dz = \oint_{\gamma} f(z)\,dz,$$

en donde la orientación en ambas Γ y γ en estas integrales es positiva (en sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj). Esto prueba el teorema. ■

10.4.3 Fórmula de la integral de Cauchy

Ahora se establecerá un resultado notable que da una fórmula de la integral para los valores de una función diferenciable.

TEOREMA 10.9 *Fórmula de la integral de Cauchy*

Sea *f* diferenciable en un conjunto abierto *G*. Sea Γ una trayectoria cerrada en *G* que encierra únicamente puntos de *G*. Entonces, para cualquier z_0 encerrada por Γ,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz. \quad ■$$

Verá muchos usos de este teorema, pero uno es inmediato. Escriba la fórmula como

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0).$$

Esto da, bajo las condiciones del teorema, una evaluación de la integral de la izquierda como un múltiplo constante del valor de la función de la derecha.

EJEMPLO 10.18

Evaluar

$$\oint_\Gamma \frac{e^{z^2}}{z-i}\,dz$$

para cualquier trayectoria cerrada que no pase por i.

Sea $f(z) = e^{z^2}$. Entonces f es diferenciable para todo z. Hay dos casos.

Caso 1 Γ no encierra a i. En este caso $\oint_\Gamma \frac{e^{z^2}}{z-i}\,dz = 0$ por el teorema de Cauchy, ya que $e^{z^2}/(z-2)$ es diferenciable en Γ y dentro de ella.

Caso 2 Γ encierra a i. Por la fórmula de la integral de Cauchy, con $z_0 = i$,

$$\oint_\Gamma \frac{e^{z^2}}{z-i}\,dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i e^{-1}. \blacksquare$$

EJEMPLO 10.19

Evaluar

$$\oint_\Gamma \frac{e^{2z}\,\mathrm{sen}(z^2)}{z-2}\,dz$$

sobre cualquier trayectoria que no pase por 2.

Sea $f(z) = e^{2z}\,\mathrm{sen}(z^2)$. Entonces f es diferenciable para todo z. Esto lleva a dos casos.

Caso 1 Si Γ no encierra a 2, entonces $f(z)/(z-2)$ es diferenciable en la curva y en todos los puntos que encierra. Así que la integral es cero por el teorema de Cauchy.

Caso 2 Si Γ encierra a 2, entonces por la fórmula de la integral,

$$\oint_\Gamma \frac{e^{2z}\,\mathrm{sen}(z^2)}{z-2}\,dz = 2\pi i f(2) = 2\pi i e^4\,\mathrm{sen}(4). \blacksquare$$

Observe los distintos papeles de $f(z)$ en el teorema de Cauchy y en la representación integral de Cauchy. El teorema de Cauchy está interesado en $\oint_\Gamma f(z)\,dz$. La representación integral está interesada en las integrales de la forma $\oint_\Gamma [f(z)/(z-z_0)]\,dz$, con $f(z)$ dada, pero multiplicada por un factor $1/(z-z_0)$, que no está definido en z_0. Si Γ no encierra a z_0, entonces $f(z)/(z-z_0) = g(z)$ puede ser diferenciable en z_0 y puede intentar aplicar el teorema de Cauchy a $\oint_\Gamma g(z)\,dz$. Si z_0 está encerrada por Γ, entonces, bajo condiciones apropiadas, la fórmula de la integral da $\oint_\Gamma g(z)\,dz$ en términos de $f(z_0)$.

Aquí está una prueba de la representación integral.

Prueba Primero use el teorema de la deformación para reemplazar Γ por un círculo γ de radio r alrededor de z_0, como en la figura 10.32. Entonces

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \oint_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)+f(z_0)}{z-z_0}\,dz$$

$$= f(z_0)\oint_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz + \oint_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz,$$

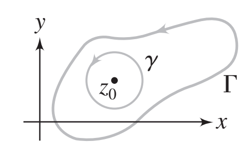


FIGURA 10.32

en donde $f(z_0)$ pudo sacarse de la primera integral ya que $f(z_0)$ es constante. Por el ejemplo 10.17,

$$\oint_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = 2\pi i$$

debido a que γ encierra a z_0. Por tanto,

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0) + \oint_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz.$$

La representación integral está probada si prueba que la última integral es cero. Escriba $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ para $0 \le t \le 2\pi$. Entonces

$$\begin{aligned}\left|\oint_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| &= \left|\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})-f(z_0)}{re^{it}} ire^{it}\,dt\right| \\ &= \left|\int_0^{2\pi} [f(z_0+re^{it})-f(z_0)]\,dt\right| \\ &\le \int_0^{2\pi} \left|f(z_0+re^{it})-f(z_0)\right|dt \\ &\le 2\pi\left(\max_{0\le t\le 2\pi}\left|f(z_0+re^{it})-f(z_0)\right|\right).\end{aligned}$$

Debido a la continuidad de $f(z)$ en z_0, $f(z_0+re^{it}) \to f(z_0)$ conforme $r \to 0$, así el término de la derecha en esta desigualdad tiene límite cero conforme $r \to 0$. Por tanto, puede hacer

$$\left|\oint_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right|$$

arbitrariamente pequeño haciendo r suficientemente pequeño. Pero esta integral es independiente de r por el teorema de la deformación. Así

$$\left|\oint_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| = 0,$$

así

$$\oint_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz = 0$$

y el teorema queda probado. ■

La representación integral da alguna idea de lo fuerte que es la condición de diferenciabilidad para las funciones complejas. La integral

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

es igual a $2\pi i\, f(z_0)$ y de esta manera determina $f(z_0)$ en cada z_0 encerrada por Γ. Pero el valor de esta integral depende sólo del valor de $f(z)$ en Γ. Así, para una función diferenciable, conociendo los valores

de la función en Γ determina los valores de la función en todos los puntos encerrados por Γ. No hay un resultado análogo para funciones diferenciables reales. El conocimiento de los valores de una función diferenciable real $\varphi(x)$ en los extremos de un intervalo en general no da información acerca de los valores de esta función en todo el intervalo.

10.4.4 La fórmula de la integral de Cauchy para derivadas superiores

Ahora probará que una función compleja que es diferenciable en un conjunto abierto debe tener derivadas de todos los órdenes en este conjunto. No hay un resultado como éste para funciones reales. Una función real que es diferenciable puede no tener segunda derivada. Y si tiene segunda derivada, puede no tener una tercera, y así sucesivamente.

No solamente una función compleja diferenciable tiene derivadas de todos los órdenes, probará que la n-ésima derivada de la función en un punto también está dada por una fórmula integral, muy parecida a la fórmula integral de Cauchy.

TEOREMA 10.10 Fórmula integral de Cauchy para derivadas de orden superior

Sea f diferenciable en un conjunto abierto G. Entonces f tiene derivadas de todos los órdenes en cada punto de G. Más aún, si Γ es una trayectoria cerrada en G que encierra únicamente puntos de G, y z_0 es cualquier punto encerrado por Γ, entonces

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz. \quad ■$$

La integral de la derecha es exactamente lo que obtendría diferenciando la fórmula integral de Cauchy para $f(z_0)$, n veces respecto a z_0, bajo el signo de la integral.

Como con la fórmula de la integral, esta conclusión se usa frecuentemente para evaluar integrales.

EJEMPLO 10.20

Evaluar

$$\oint_\Gamma \frac{e^{z^3}}{(z - i)^3}\, dz$$

con Γ cualquier trayectoria que no pase por i.

Si Γ no encierra a i entonces esta integral es cero por el teorema de Cauchy, ya que el único punto en el que $e^{z^3}/(z - i)^3$ no es diferenciable es i. Entonces suponga que Γ encierra a i. Debido a que el factor $z - i$ aparece a la tercera potencia en el denominador, use $n = 2$ en el teorema, con $f(z) = e^{z^3}$, para obtener

$$\oint_\Gamma \frac{e^{z^3}}{(z - i)^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2!} f^{(2)}(i) = \pi i f''(i).$$

Ahora

$$f'(z) = 3z^2 e^{z^3} \quad \text{y} \quad f''(z) = 6z e^{z^3} + 9z^4 e^{z^3},$$

así

$$\oint_\Gamma \frac{e^{z^3}}{(z - i)^3}\, dz = \pi i \left[6i e^{-i} + 9e^{-i}\right] = (-6 + 9i)\pi e^{-i}. \quad ■$$

El teorema puede probarse por inducción sobre n, pero no se llevarán a cabo los detalles.

10.4.5 Cotas en las derivadas y el teorema de Liouville

La fórmula integral de Cauchy para derivadas de orden superior puede utilizarse para obtener cotas para las derivadas de todos los órdenes.

TEOREMA 10.11

Sea f diferenciable en un conjunto abierto G. Sea z_0 un punto de G y deje el disco abierto de radio r alrededor de z_0 que está contenido en G. Suponga que

$$|f(z)| \leq M$$

para z en el círculo de radio r alrededor de z_0. Entonces, para cualquier entero positivo n,

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{Mn!}{r^n}. \ \blacksquare$$

Prueba Sea $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ para $0 \leq t \leq 2\pi$. Entonces $|f(z_0 + re^{it})| \leq M$ para $0 \leq t \leq 2\pi$. Por los teoremas 10.10 y 10.5,

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})}{r^{n+1}e^{i(n+1)t}}ire^{it}\,dt\right|$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left|f(z_0+re^{it})\right|}{r^n}\,dt \leq \frac{n!}{2\pi}(2\pi)M\frac{1}{r^n} = \frac{Mn!}{r^n}. \ \blacksquare$$

Como una aplicación de este teorema, probará el teorema de Liouville para funciones diferenciables y acotadas.

TEOREMA 10.12 Liouville

Sea f una función acotada que es diferenciable para todo z. Entonces f es una función constante. ■

Anteriormente observó que sen(z) no es una función acotada en el plano complejo como lo es en la recta real. Esto es consistente con el teorema de Liouville. Como sen(z) es diferenciable para todo z y claramente no es una función constante, no puede ser acotada.

Aquí está una prueba del teorema de Liouville.

Prueba Suponga que $|f(z)| \leq M$ para todo complejo z. Elija cualquier número z_0 y cualquier $r > 0$. Por el teorema 10.11, con $n = 1$,

$$\left|f'(z_0)\right| \leq \frac{M}{r}.$$

como f es diferenciable en todo el plano complejo, r se puede elegir tan grande como quiera, así que $|f'(z_0)|$ debe ser menor que cualquier número positivo. Se concluye que $|f'(z_0)| = 0$, de donde $f'(z_0) = 0$. Como z_0 es cualquier número, entonces $f(z) =$ constante. ■

El teorema de Liouville se puede usar para una demostración sencilla del teorema fundamental del álgebra. Este teorema establece que cualquier polinomio complejo no constante $p(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$ tiene una raíz compleja. Esto es, para algún número ζ, $p(\zeta) = 0$. A partir de esto se puede probar que si $a_n \neq 0$, entonces $p(z)$ debe tener exactamente n raíces, contando cada raíz k veces en la lista si su multiplicidad es k. Por ejemplo, $p(z) = z^2 - 6z + 9$ tiene exactamente dos raíces, 3 y 3 (una raíz de multiplicidad 2).

Este teorema fundamental supone terminología elemental para su enunciado y usualmente se incluye, en alguna forma, en el currículum de matemáticas de enseñanza media. El matemático más importante del siglo XIX, Carl Friedrich Gauss, consideró este teorema tan importante que lo demostró de distintas mane-

ras (cerca de 20) a lo largo de su vida. Pero aún hoy en día las pruebas rigurosas del teorema requieren términos matemáticos y técnicas que están lejos de las que se necesitan para enunciarlo.

Para probar el teorema usando el teorema de Liouville, suponga que $p(z)$ es un polinomio complejo no constante y que $p(z) \neq 0$ para todo z. Entonces $1/p(z)$ es diferenciable para todo z.

Sea $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ con $n \geq 1$ y $a_n \neq 0$. Pruebe que $|p(z)|$ está acotado para todo z. Como

$$a_n z^n = p(z) - a_0 - a_1 z - \cdots - a_{n-1} z^{n-1},$$

entonces

$$|a_n|\,|z|^n \leq |p(z)| + |a_0| + |a_1|\,|z| + \cdots + |a_{n-1}|\,|z|^{n-1}.$$

Entonces, para $|z| \geq 1$,

$$\begin{aligned} |p(z)| &\geq |a_n|\,|z|^n - \left(|a_0| + |a_1|\,|z| + \cdots + |a_{n-1}|\,|z|^{n-1}\right) \\ &= |z|^{n-1}\left(|a_n|\,|z| - \frac{|a_0|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_1|}{|z|^{n-2}} - \cdots - \frac{|a_{n-1}|}{|z|^{n-n}}\right) \\ &\geq |z|^{n-1}\left(|a_n|\,|z| - |a_0| - |a_1| - \cdots - |a_{n-1}|\right). \end{aligned}$$

Pero entonces

$$\frac{1}{|p(z)|} \leq \frac{1}{|z|^{n-1}\left(|a_n|\,|z| - |a_0| - |a_1| - \cdots - |a_{n-1}|\right)} \to 0$$

conforme $|z| \to \infty$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} 1/|p(z)| = 0$. Esto implica que para algún número positivo R,

$$\frac{1}{|p(z)|} < 1 \quad \text{si } |z| > R.$$

Pero el disco cerrado $|z| \leq R$ es compacto, y $1/|p(z)|$ es continuo, de manera que, por el teorema 9.1, $1/\ |p(z)|$ está acotado en este disco. Por tanto, para algún M,

$$\frac{1}{|p(z)|} \leq M \quad \text{para } |z| \leq R.$$

Ahora tiene que $1/|p(z)|$ está acotado dentro y fuera $|z| \leq 1$. Poniendo estas cotas juntas,

$$\frac{1}{|p(z)|} \leq M + 1 \quad \text{para todo } z,$$

tanto en $|z| \leq R$ como en $|z| \geq R$. Esto hace que $1/p(z)$ sea una función acotada y diferenciable para todo z. Por el teorema de Liouville, $1/p(z)$ debe ser constante, una contradicción. Por tanto debe haber algún complejo ζ tal que $p(\zeta) = 0$, lo que prueba el teorema fundamental del álgebra.

El análisis complejo proporciona varias demostraciones de este teorema. Más adelante verá una usando una técnica para evaluar integrales reales de funciones racionales involucrando senos y cosenos.

10.4.6 Un teorema de deformación extendido

El teorema de deformación permite deformar una trayectoria cerrada de integración, Γ, en otra, γ, sin cambiar el valor de la integral de línea de una función diferenciable f. Una condición crucial para este proceso es que ningún paso de la deformación debe pasar sobre un punto en el cual f no sea diferenciable. Esto significa que f necesita ser diferenciable en ambas curvas y en la región entre ellas. Ahora extenderá este resultado al caso que Γ encierra un número finito de trayectorias cerradas ajenas. Como es usual, a menos que se establezca explícitamente de otra manera, todas las trayectorias cerradas se suponen orientadas positivamente (en sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj).

TEOREMA 10.13 Teorema de deformación extendido

Sea Γ una trayectoria cerrada. Sean $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ trayectorias cerradas dentro de Γ. Suponga que ningún par de trayectorias se intersecan, y que ningún punto interior de alguna γ_j es interior a alguna otra γ_k. Sea f diferenciable en un conjunto abierto que contiene a Γ, cada γ_j, y todos los puntos que son interiores a Γ y exteriores a cada γ_j. Entonces,

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \oint_{\gamma_j} f(z)\,dz. \blacksquare$$

Este es el teorema de deformación en el caso $n = 1$. La figura 10.33 muestra un escenario típico cubierto por este teorema. Con las curvas como se muestran (y suponiendo la diferenciabilidad de f), la integral de f alrededor de Γ es la suma de las integrales de f alrededor de cada una de las curvas cerradas $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$.

Después de una ilustración de un uso típico del teorema se hace un bosquejo de la demostración.

EJEMPLO 10.21

Considere

$$\oint_\Gamma \frac{z}{(z+2)(z-4i)}\,dz,$$

donde Γ es una trayectoria cerrada que encierra a -2 y a $4i$. Evalúe esta integral usando el teorema de deformación extendido. Coloque un círculo γ_1 alrededor de -2 y un círculo γ_2 alrededor de $4i$ con radios suficientemente pequeños para que ningún círculo interseque al otro o a Γ y que cada uno esté encerrado por Γ (figura 10.34). Entonces

$$\oint_\Gamma \frac{z}{(z+2)(z-4i)}\,dz = \oint_{\gamma_1} \frac{z}{(z+2)(z-4i)}\,dz + \oint_{\gamma_2} \frac{z}{(z+2)(z-4i)}\,dz.$$

Use la descomposición en fracciones parciales para escribir

$$\frac{z}{(z+2)(z-4i)} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i}{z+2} + \frac{\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i}{z-4i}.$$

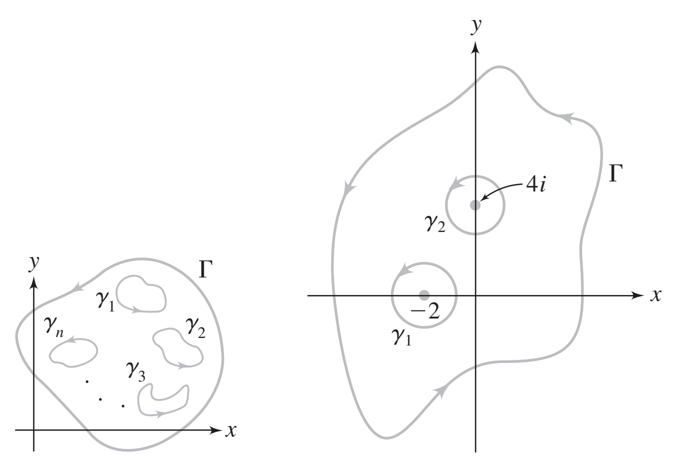


FIGURA 10.33 FIGURA 10.34

Entonces

$$\oint_\Gamma \frac{z}{(z+2)(z-4i)}\,dz = \left(\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i\right)\oint_{\gamma_1}\frac{1}{z+2}\,dz + \left(\frac{4}{5}+\frac{2}{5}i\right)\oint_{\gamma_1}\frac{1}{z-4i}\,dz$$
$$+\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i\right)\oint_{\gamma_2}\frac{1}{z+2}\,dz + \left(\frac{4}{5}+\frac{2}{5}i\right)\oint_{\gamma_2}\frac{1}{z-4i}\,dz.$$

A la derecha, la segunda y tercera integrales son cero por el teorema de Cauchy (γ_1 no encierra a $4i$ y γ_2 no encierra a -2). La primera y cuarta integrales son iguales a $2\pi i$ por el ejemplo 10.17. Por tanto,

$$\oint_\Gamma \frac{z}{(z+2)(z-4i)}\,dz = 2\pi i\left[\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i\right)+\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{5}i\right)\right] = 2\pi i. \quad ■$$

Se puede modelar una prueba del teorema, a partir de la prueba del teorema de deformación.

Prueba Como se sugiere en la figura 10.35, dibuje los segmentos de recta L_1 de Γ a γ_1, L_2 de γ_1 a γ_2, . . . , L_n de γ_{n-1} a γ_n, y, finalmente, L_{n+1} de γ_n a Γ. Forme las trayectorias cerradas Φ y Δ mostradas separadamente en las figuras 10.36, 10.37 y 10.38. Entonces

$$\oint_\Phi f(z)\,dz + \oint_\Delta f(z)\,dz = 0,$$

ambas integrales son cero por el teorema de Cauchy. (Por las hipótesis del teorema, f es diferenciable en Φ y Δ y dentro de ellas.)

En esta suma de integrales sobre Φ y Δ, cada segmento de recta L_j es integrado en ambas direcciones, de donde las contribuciones de las integrales sobre estos segmentos son cero. Más aún, en esta suma recupere la integral de $f(z)$ sobre toda Γ y sobre cada γ_j, con la orientación en sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj en Γ y en sentido del movimiento de las manecillas del reloj en cada γ_j (observe las orientaciones en la figura 10.38). Invirtiendo las orientaciones en las γ_j, de manera que todas

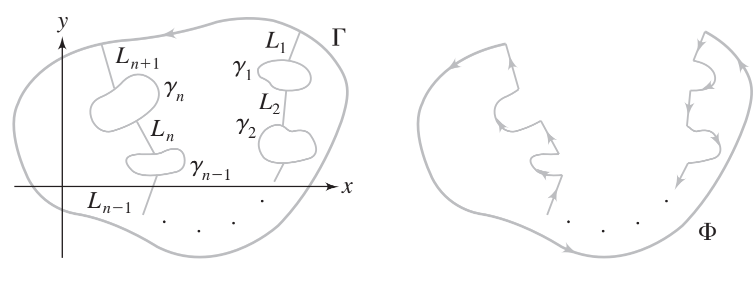


FIGURA 10.35 FIGURA 10.36

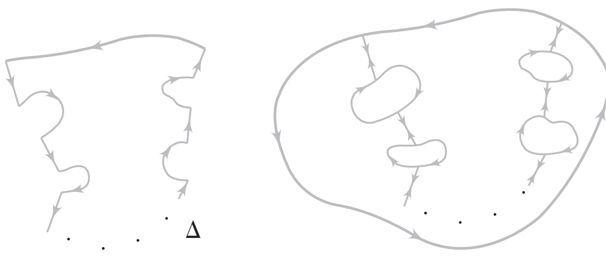


FIGURA 10.37 FIGURA 10.38

las trayectorias sean orientadas en sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj, la última suma se convierte en

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{n} \oint_{\gamma_j} f(z)\,dz = 0,$$

llegando a la conclusión del teorema. ■

SECCIÓN 10.4 PROBLEMAS

En cada problema del 1 al 12, evalúe $\int f(z)\,dz$ para la función y trayectoria dadas. Estos problemas pueden involucrar el teorema de Cauchy, las fórmulas integrales de Cauchy, y/o los teoremas de deformación.

1. $f(z) = \dfrac{z^4}{z - 2i}$; Γ es cualquier trayectoria cerrada que encierra a $2i$.

2. $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(z^2)}{z - 5}$; Γ es cualquier trayectoria cerrada que encierra a 5.

3. $f(z) = \dfrac{z^2 - 5z + i}{z - 1 + 2i}$; Γ es el círculo $|z| = 3$.

4. $f(z) = \dfrac{2z^3}{(z - 2)^2}$; Γ es el rectángulo con vértices $4 \pm i$ y $-4 \pm i$.

5. $f(z) = \dfrac{ie^z}{(z - 2 + i)^2}$; Γ es el círculo $|z - 1| = 4$.

6. $f(z) = \dfrac{\cos(z - i)}{(z + 2i)^3}$; Γ es cualquier trayectoria cerrada que encierra a $-2i$.

7. $f(z) = \dfrac{z\,\operatorname{sen}(3z)}{(z + 4)^3}$; Γ es el círculo $|z - 2i| = 9$.

8. $f(z) = 2i\bar{z}\,|z|$; Γ es el segmento de recta de 1 a $-i$.

9. $f(z) = -\dfrac{(2 + i)\operatorname{sen}(z^4)}{(z + 4)^2}$; Γ es cualquier trayectoria cerrada que encierra a -4.

10. $f(z) = (z - i)^2$; Γ es el semicírculo de radio 1 alrededor de 0 de i a $-i$.

11. $f(z) = \operatorname{Re}(z + 4)$; Γ es el segmento de recta de $3 + i$ a $2 - 5i$.

12. $f(z) = \dfrac{3z^2 \cosh(z)}{(z + 2i)^2}$; Γ es el círculo de radio 8 alrededor de 1.

13. Evalúe

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)} \cos(\operatorname{sen}(\theta))\,d\theta.$$

Sugerencia: Considere $\oint_{\Gamma} (e^z/z)dz$, con Γ el círculo unitario alrededor del origen. Evalúe esta integral una vez usando la fórmula de la integral de Cauchy, después otra vez directamente usando las funciones coordenadas para Γ.

14. Use la forma extendida del teorema de deformación para evaluar $\oint_{\Gamma} \dfrac{z - 4i}{z^3 + 4z}dz$, donde Γ es una trayectoria cerrada que encierra al origen, $2i$ y $-2i$.

LA SERIE DE FOURIER DE UNA
FUNCION CONVERGENCIA DE UN
SERIE DE FOURIER SERIE DE FO
EN COSENOS EN SENOS INTEGRA

CAPÍTULO 11

Representación en serie de una función

Ahora se desarrollarán dos tipos de representaciones de una $f(z)$ en serie de potencias de $z - z_0$. La primera serie contendrá solamente potencias enteras no negativas, así que es una serie de potencias, y se aplica cuando f es diferenciable en z_0. La segunda contendrá además potencias enteras negativas de $z - z_0$ y se usará cuando f no es diferenciable en z_0.

11.1 Representación en serie de potencias

Ya sabe que una serie de potencias que converge en un disco abierto, o quizá en todo el plano, define una función que es infinitamente diferenciable dentro del disco o del plano. Ahora irá por el otro sentido y probará que una función que es diferenciable en un disco abierto está representada por un desarrollo en serie de potencias alrededor del centro de ese disco. Esto tendrá aplicaciones importantes, incluyendo información acerca de los ceros de las funciones y el máximo valor que puede ser tomado por el módulo $|f(z)|$ de una función diferenciable.

TEOREMA 11.1 *Serie de Taylor*

Sea f diferenciable en un disco abierto D alrededor de z_0. Entonces, para cada z en D,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n. \quad ■$$

La serie de la derecha es la serie de Taylor de $f(z)$ alrededor de z_0, y el número $f^{(n)}(z_0)/n!$ es el n-ésimo *coeficiente de Taylor* de $f(z)$ en z_0. El teorema afirma que la serie de Taylor de $f(z)$ converge a $f(z)$, así que representa a $f(z)$, dentro del disco.

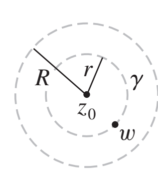


FIGURA 11.1

Prueba Sea z cualquier punto de D y R el radio de D. Elija un número r con $|z - z_0| < r < R$ y sea γ el círculo de radio r alrededor de z_0 (figura 11.1). Por la fórmula de la integral de Cauchy, usando w para la variable de integración en γ,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

Ahora

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{w - z_0} \frac{1}{1 - (z - z_0)/(w - z_0)}.$$

Como w está en γ y z está encerrada por γ, entonces

$$\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| < 1,$$

de manera que use una serie geométrica convergente para escribir

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(w - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n.$$

Entonces

$$\frac{f(w)}{w - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n. \tag{11.1}$$

Como f es continua en γ, para algún M, $|f(w)| \leq M$ para w en γ. Más aún, $|w - z_0| = r$, así

$$\left| \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \right| \leq M \frac{1}{r} \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n.$$

Llamada

$$M \frac{1}{r} \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n = M_n.$$

Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge (esta serie es una constante por una serie geométrica convergente). Por el teorema 10.6, la serie en la ecuación (11.1) puede ser integrada término a término para llegar a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \right) dw$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw \right) (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

en donde use la fórmula de la integral de Cauchy para la n-ésima derivada para escribir el coeficiente en la última serie. Esto prueba el teorema. ■

Se dice que una función compleja es *analítica* en z_0 si tiene un desarrollo en serie de potencias en algún disco abierto alrededor de z_0. Acaba de probar que una función que es diferenciable en un disco abierto alrededor de un punto es analítica en ese punto.

Sólo se han calculado los coeficientes de una serie de Taylor por las fórmulas de derivación o integración cuando otros medios fallan. Cuando es posible, use series conocidas y operaciones tales como dife-

renciación e integración para obtener una representación en serie. Esta estrategia hace uso de la unicidad de las representaciones en serie de potencias.

TEOREMA 11.2

Suponga que, en algún disco $|z - z_0| < r$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n.$$

Entonces, para $n = 0, 1, 2, \ldots, c_n = d_n$.

Prueba Si llama $f(z)$ a la función definida en este disco por ambas series de potencias, entonces

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = d_n. \blacksquare$$

Esto significa que sin importar qué método se use para encontrar una serie de potencias para $f(z)$ alrededor de z_0, el resultado final es la serie de Taylor.

EJEMPLO 11.1

Encontrar el desarrollo de Taylor de e^z alrededor de i.

Sabe que para todo z,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

Para un desarrollo alrededor de i, la serie de potencias debe estar en términos de potencias de $z - i$. De esta manera

$$e^z = e^{z-i+i} = e^i e^{z-i} = \sum_{n=0}^{\infty} e^i \frac{1}{n!} (z - i)^n.$$

Esta serie converge para todo z. ■

En este ejemplo, hubiera sido igual de fácil calcular los coeficientes de Taylor directamente:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(i)}{n!} = \frac{e^i}{n!}.$$

EJEMPLO 11.2

Escriba la serie de Maclaurin para $\cos(z^3)$.

Un desarrollo de Maclaurin es una serie de Taylor alrededor de cero. Para todo z,

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

Todo lo que necesita hacer es reemplazar z con z^3:

$$\cos(z^3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (z^3)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{6n}.$$

Como es un desarrollo alrededor del origen, es el desarrollo que buscaba. ■

EJEMPLO 11.3

Desarrollar

$$\frac{2i}{4+iz}$$

en una serie de Taylor alrededor de $-3i$.

Busque una serie de potencias en $z+3i$. Haga un poco de manipulación algebraica y después use la serie geométrica. Para obtener $z+3i$, escriba

$$\frac{2i}{4+iz} = \frac{2i}{4+i(z+3i)+3} = \frac{2i}{7+i(z+3i)} = \frac{2i}{7}\frac{1}{1+(i/7)(z+3i)}.$$

Si $|t| < 1$, entonces

$$\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-(-t)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.$$

Con $t = (z+3i)i/7$, tiene

$$\frac{1}{1+(i/7)(z+3i)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{i}{7}(z+3i)\right)^n.$$

Por tanto,

$$\frac{2i}{4+iz} = \frac{2i}{7}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{i}{7}\right)^n(z+3i)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n i^{n+1}}{7^{n+1}}(z+3i)^n.$$

Debido a que es un desarrollo en serie de la función alrededor de $-3i$, es la serie de Taylor alrededor de $-3i$. Esta serie converge para

$$\left|\frac{i}{7}(z+3i)\right| < 1,$$

o

$$|z+3i| < 7.$$

Así z debe estar en el disco abierto de radio 7 alrededor de $-3i$. El radio de convergencia de esta serie es 7. ■

Por la sección 9.2, puede diferenciar una serie de Taylor término a término dentro de su disco abierto de convergencia. Algunas veces, esto es útil para la obtención del desarrollo de Taylor de una función.

EJEMPLO 11.4

Encontrar el desarrollo de Taylor de $f(z) = 1/(1-z)^3$ alrededor del origen.

Es posible hacerlo por manipulación algebraica, pero es más fácil empezar con la serie geométrica familiar

$$g(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{para } |z| < 1.$$

Entonces

$$g'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$$

y

$$g''(z) = \frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)z^n$$

para $|z| < 1$. Entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(n+1)(n+2)z^n \quad \text{para } |z| < 1. \blacksquare$$

Cuando se desarrolla $f(z)$ en una serie de potencias alrededor de z_0, el radio de convergencia de la serie será la distancia de z_0 al punto más cercano en donde $f(z)$ no es diferenciable. Piense en un disco expandiéndose uniformemente a partir de z_0, que puede continuar su expansión hasta que choca con un punto en donde $f(z)$ no es diferenciable.

Por ejemplo, suponga que $f(z) = 2i/(4 + iz)$ y quiere el desarrollo de Taylor alrededor de $-3i$. El único punto en donde $f(z)$ no está definida es $4i$, de manera que el radio de convergencia de esta serie será la distancia entre $-3i$ y $4i$ o 7. Este resultado se obtiene previamente a partir del desarrollo de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty}(2(-1)^n i^{n+1}/7^{n+1})(z+3i)^n$ de $f(z)$.

EJEMPLO 11.5

Encuentre el radio de convergencia de la serie de Taylor de $\csc(z)$ alrededor de $3 - 4i$.

Como $\csc(z) = 1/\text{sen}(z)$, esta función es diferenciable excepto en $z = n\pi$, con n cualquier entero. Como ilustra la figura 11.2, π es el punto más cercano a $3 - 4i$ en el cual $\csc(z)$ no es diferenciable. La distancia entre π y $3 - 4i$ es

$$\sqrt{(\pi-3)^2+16},$$

y es el radio de convergencia del desarrollo en serie de $\csc(z)$ alrededor de $3 - 4i$. $\blacksquare$

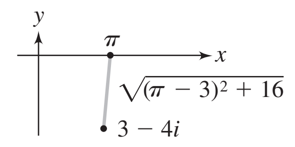


FIGURA 11.2

La existencia de un desarrollo en serie de potencias implica la existencia de una antiderivada.

TEOREMA 11.3

Sea f diferenciable en un disco abierto D alrededor de z_0. Entonces existe una función diferenciable F tal que $F'(z) = f(z)$ para todo z en D.

Prueba Sabe que f tiene un desarrollo en serie de potencias en D:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

Sea

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} c_n (z-z_0)^{n+1}$$

para z en D. Es rutinario verificar que esta serie de potencias tiene un radio de convergencia al menos tan grande como el radio de D y que

$$F'(z) = f(z)$$

para z en D. ■

11.1.1 Ceros aislados y el teorema de la identidad

Use la representación en serie de Taylor de una función diferenciable para obtener información importante acerca de sus ceros.

DEFINICIÓN 11.1

Un número ζ es un cero de f si $f(\zeta) = 0$.

Un cero ζ de f es aislado si existe un disco abierto alrededor de ζ que no contenga ningún otro cero de f.

Por ejemplo, los ceros de sen(z) son $n\pi$, con n cualquier entero. Estos ceros son todos aislados. En contraste, sea

$$f(z) = \begin{cases} \text{sen}(1/z) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}.$$

Los ceros de f son 0 y los números $1/n\pi$, con n cualquier entero distinto de cero. Sin embargo, 0 no es un cero aislado, ya que cualquier disco abierto alrededor de cero contiene otros ceros, $1/n\pi$, para n suficientemente grande.

Probará que el comportamiento de los ceros en este ejemplo descalifica a f para ser diferenciable en 0.

TEOREMA 11.4

Sea f diferenciable en un conjunto abierto G y sea ζ un cero de f en G. Entonces, o ζ es un cero aislado de f o existe un disco abierto alrededor de ζ en donde $f(z)$ es idénticamente cero.

Esto significa que una función diferenciable que no es idénticamente cero en algún disco solamente puede tener ceros aislados.

Prueba Escriba el desarrollo en serie de potencias de $f(z)$ alrededor de ζ,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - \zeta)^n,$$

en algún disco abierto D con centro en ζ. Ahora considere dos casos.

Caso 1 Si todas las $c_n = 0$, entonces $f(z) = 0$ en todo D.

Caso 2 Suponga que algún coeficiente en la serie de potencias no es cero. Sea m el entero más pequeño tal que $c_m \neq 0$. Entonces $c_0 = c_1 = \cdots = c_{m-1} = 0$ y $c_m \neq 0$. Para z en D,

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z - \zeta)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m} (z - \zeta)^{n+m} = (z - \zeta)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m} (z - \zeta)^n.$$

Ahora $\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m}(z-\zeta)^n$ es una serie de potencias, así que define una función diferenciable $g(z)$ para z en D. Más aún,

$$f(z) = (z-\zeta)^m g(z).$$

Pero $g(\zeta) = c_m \neq 0$, de manera que hay algún disco abierto K alrededor de ζ en donde $g(z) \neq 0$. Por tanto, para $z \neq \zeta$ en $K, f(z) \neq 0$, así que ζ es un cero aislado de f. ■

Esta prueba contiene información adicional acerca de los ceros y será útil más adelante. El número m en la prueba se llama el *orden* del cero ζ de $f(z)$. Es el menor entero m tal que el coeficiente c_m en el desarrollo de $f(z)$ alrededor de ζ es distinto de cero. Ahora recuerde que $c_n = f^{(n)}(\zeta)/n!$. Así $c_0 = c_1 = \cdots = c_{m-1} = 0$ implica que

$$f(\zeta) = f'(\zeta) = \cdots = f^{(m-1)}(\zeta) = 0,$$

mientras $c_m \neq 0$ implica que

$$f^{(m)}(\zeta) \neq 0.$$

En resumen, un cero aislado ζ de f tiene orden m si la función y sus primeras $m-1$ derivadas valen cero en ζ, pero la m-ésima derivada en ζ es distinta de cero. Dicho de otra manera, el orden del cero ζ es el menor orden de la derivada de f que no vale cero en ζ.

También obtuvo que si ζ es un cero aislado de orden m de f, entonces puede escribir

$$f(z) = (z-\zeta)^m g(z),$$

donde g también es diferenciable en algún disco alrededor de ζ, y $g(\zeta) \neq 0$.

EJEMPLO 11.6

Considere $f(z) = z^2 \cos(z)$. 0 es un cero aislado de esta función diferenciable. Calcule

$$f'(z) = 2z\cos(z) - z^2 \operatorname{sen}(z)$$

y

$$f''(z) = 2\cos(z) - 4z\operatorname{sen}(z) + z^2\cos(z).$$

Observe que $f(0) = f'(0) = 0$ mientras que $f''(0) \neq 0$. Así 0 es un cero de orden 2 de f. En este caso, ya tiene

$$f(z) = (z-0)^2 g(z)$$

con $g(0) \neq 0$, ya que puede elegir $g(z) = \cos(z)$. ■

EJEMPLO 11.7

Debe tener cuidado al identificar el orden de un cero. Considere $f(z) = z^2 \operatorname{sen}(z)$. 0 es un cero aislado de f. Calcule

$$\begin{aligned}
f'(z) &= 2z\operatorname{sen}(z) + z^2\cos(z),\\
f''(z) &= 2\operatorname{sen}(z) + 4z\cos(z) - z^2\operatorname{sen}(z),\\
f^{(3)}(z) &= 2\cos(z) + 4\cos(z) - 4z\operatorname{sen}(z) - 2z\operatorname{sen}(z) - z^2\cos(z)\\
&= 6\cos(z) - 6z\operatorname{sen}(z) - z^2\cos(z).
\end{aligned}$$

Entonces

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$$

mientras que

$$f^{(3)}(0) \neq 0.$$

Esto significa que 0 es un cero de orden 3. Puede escribir

$$f(z) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} = z^3 g(z),$$

donde

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}$$

es diferenciable (en este ejemplo, para todo z) y $g(0) = 1 \neq 0$. ■

El resultado del teorema 11.3, prueba que si una función compleja diferenciable vale cero en una sucesión de puntos convergente en un dominio (conjunto abierto conexo), entonces la función es *idénticamente cero en todo el dominio*. Este es un resultado muy fuerte, para el que no hay análogo para funciones reales. Por ejemplo, considere

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq 0 \\ x^2 & \text{para } x > 0 \end{cases},$$

cuya gráfica se muestra en la figura 11.3. Esta función es diferenciable para todo x real y es idénticamente cero en la semirecta, pero no es idénticamente cero sobre toda la recta. Otra diferencia entre la diferenciabilidad para funciones reales y complejas es evidente en este ejemplo. Aunque h es diferenciable, no tiene desarrollo en serie de potencias alrededor de 0. En contraste, una función compleja que es diferenciable en un conjunto abierto tiene un desarrollo en serie de potencias alrededor de cada punto del conjunto.

TEOREMA 11.5

Sea f diferenciable en un dominio G. Suponga que $\{z_n\}$ es una sucesión de ceros distintos de f en G, que converge a un punto de G. Entonces $f(z) = 0$ para todo z en G.

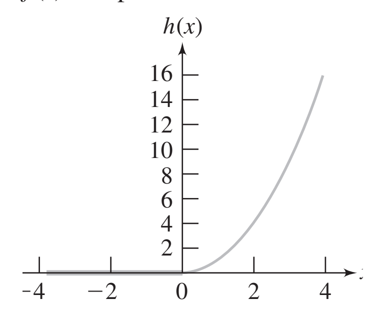


FIGURA 11.3

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } x > 0 < 1 \\ 0 & \text{para } x \leq 0 \end{cases}.$$

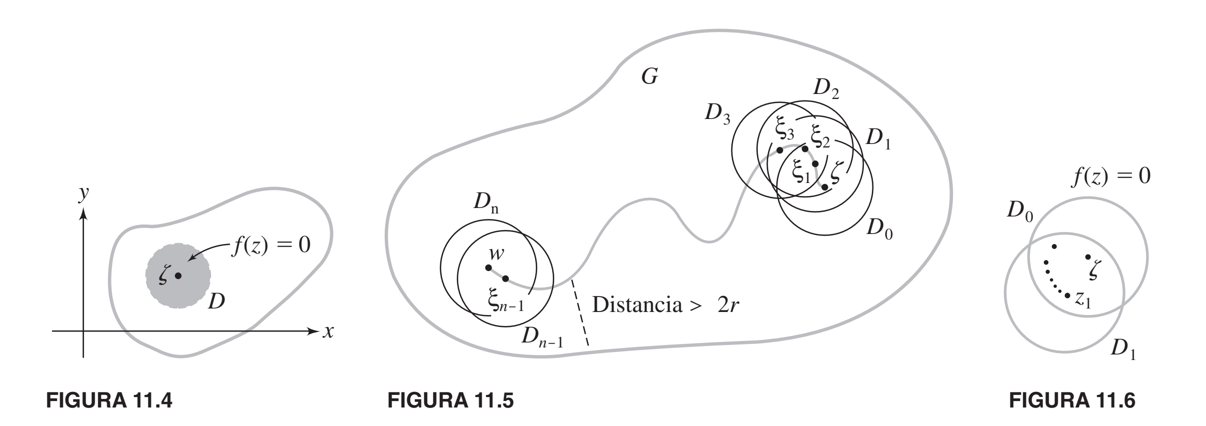


FIGURA 11.4 FIGURA 11.5 FIGURA 11.6

Prueba Suponga que $z_n \to \zeta$ en G. Como f es continua, $f(z_n) \to f(\zeta)$. Pero cada $f(z_n) = 0$, de manera que $f(\zeta) = 0$ y ζ también debe ser un cero de f en G. Esto significa que ζ no es un cero aislado, así por el teorema 11.3, debe haber un disco abierto D alrededor de ζ en donde $f(z)$ es idénticamente cero (figura 11.4).

Busque probar que esto fuerza a que $f(z) = 0$ para todo z en G. Para hacer esto, sea w cualquier punto de G. Pruebe que $f(w) = 0$.

Como G es conexo, hay una trayectoria Γ en G de ζ a w. Elija un número r tal que todo punto de Γ esté a una distancia de al menos $2r$ de la frontera de G, y también que r sea menor que el radio de D. Ahora camine a lo largo de Γ de ζ a w, en el camino seleccione puntos a una distancia menor que r uno del otro. Esto produce puntos $\zeta = \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n = w$ en Γ, como en la figura 11.5. Forme un disco abierto D_j de radio r alrededor de cada ξ_j . (Por la elección de r, ninguno de estos discos toca la frontera de G.) Cada ξ_{j-1} está en D_{j-1}, D_j y D_{j+1} para $j = 1, \ldots, n-1$. Más aún, $\xi_0 = \zeta$ está en D_0 y D_1 y w está en D_{n-1} y D_n.

Como ξ_1 está en D_0 y D_1, existe una sucesión de puntos en ambos D_0 y D_1 que converge a ξ_1 (figura 11.6). Pero $f(z)$ es idénticamente cero en D_0, de manera que $f(z)$ vale cero en esta sucesión. Como esta sucesión también está en D_1, $f(z) = 0$ para todo z en D_1.

Ahora ξ_2 está en D_1 y D_2. Elija una sucesión de puntos comunes a ambos de estos discos y convergentes a ξ_2. Como $f(z)$ es idénticamente cero en D_1, entonces $f(z) = 0$ en cada punto de esta sucesión. Pero como esta sucesión también está en D_2, entonces $f(z)$ es idénticamente cero en D_2.

Al continuar de esta manera, caminando a lo largo de Γ de ζ a w. Encuentre que $f(z)$ es idénticamente cero en cada uno de los discos a lo largo del camino. Finalmente, $f(z)$ es cero en D_n. Pero w está en D_n, de manera que $f(w) = 0$, y por tanto, $f(z) = 0$ para todo z en G. ■

Este teorema conduce inmediatamente a la conclusión que dos funciones diferenciables que coinciden en una sucesión convergente en un dominio deben ser la misma función. Esto se llama el *teorema de la identidad*.

COROLARIO 11.1 *Teorema de la identidad*

Sean f y g diferenciables en un dominio G. Suponga que $f(z)$ y $g(z)$ coinciden en una sucesión convergente de puntos distintos de G. Entonces $f(z) = g(z)$ para todo z en G. ■

Prueba Aplique el teorema 11.4 a la función diferenciable $f - g$. ■

Para tener una idea del poder de este resultado, considere el problema de definir la función seno compleja sen(z) de manera que coincida con la función seno real cuando z es real. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

Dicho de otra manera, ¿es posible inventar dos funciones complejas diferenciables distintas, f y g, definidas para todo z, tales que, cuando x es real,

$$f(x) = g(x) = \text{sen}(x)?$$

Si esto se puede hacer, entonces $f(z) = g(z)$ en una sucesión convergente de números complejos (elegidos a lo largo de la recta real) en un dominio (todo el plano), así necesariamente $f = g$. Sólo puede haber una extensión de una función diferenciable del dominio real al complejo.

Esta es la razón por la cual, cuando extiende una función a real (tal como la exponencial o las funciones trigonométricas) al plano complejo, puede estar seguro que esta extensión es única.

11.1.2 El teorema del módulo máximo

Suponga que $f : S \to \mathfrak{C}$, y S es un conjunto compacto. Sabe del teorema 9.3 que $|f(z)|$ alcanza un valor máximo en S. Esto significa que al menos para una ζ en S, $|f(z)| \leq |f(\zeta|$ para todo z en S. Pero esto no da ninguna información acerca de dónde está el punto ζ en S. Ahora pruebe que cualquiera de estas ζ debe estar en la frontera de S si f es una función diferenciable. Éste se llama el *teorema del módulo máximo*. El nombre del teorema se deduce del hecho de que la función de valor real $|f(z)|$ se llama el *módulo* de $f(z)$, y le interesa el máximo que tiene el módulo de $f(z)$ conforme z varía sobre el conjunto S.

Primero probará que una función diferenciable que no es constante en un disco abierto no puede tener su módulo máximo en el centro del disco.

LEMA 11.1

Sea f diferenciable y no constante en un disco abierto D con centro en z_0. Entonces, para algún z en este disco,

$$|f(z)| > |f(z_0)|.$$

Prueba Suponga lo contrario, que $|f(z)| \leq |f(z_0|$ para todo z en D. Obtendrá una contradicción.

Sea $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ para $0 \leq t \leq 2\pi$. Suponga que r es lo suficientemente pequeño para que este círculo esté contenido en D. Por el teorema de la integral de Cauchy,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt.$$

Entonces

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|\,dt.$$

Pero $z_0 + re^{it}$ está en D para $0 \leq t \leq 2\pi$, de manera que $|f(z_0 + re^{it})| \leq |f(z_0)|$. Entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|\,dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|\,dt = |f(z_0)|.$$

Las dos últimas desigualdades implican que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|\,dt = |f(z_0)|\,.$$

Pero entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(|f(z_0)| - \left|f(z_0 + re^{it})\right|\right) dt = 0.$$

Este integrando es continuo y no negativo para $0 \le t \le 2\pi$. Si fuera positivo para algún t, entonces habría un subintervalo de $[0, 2\pi]$ en el cual el integrando sería positivo y entonces esta integral debería ser positiva, una contradicción. Por tanto, el integrando debe ser idénticamente cero:

$$|f(z_0 + re^{it})| = |f(z_0)| \quad \text{para } 0 \le t \le 2\pi.$$

Esto dice que $|f(z)|$ tiene el valor constante $|f(z_0)|$ en todo círculo alrededor de z_0 y contenido en D. Pero todo punto en D está en algún círculo alrededor de z_0 y contenido en D. Por tanto, $|f(z)| = |f(z_0)| =$ constante para todo z en D. Entonces por el teorema 9.7, $f(z) =$ constante en D. Esta contradicción prueba el lema. ■

Ahora puede obtener el teorema del módulo máximo.

TEOREMA 11.6 *Teorema del módulo máximo*

Sea S un conjunto conexo y compacto de números complejos. Sea f continua en S y diferenciable en cada punto interior de S. Entonces $|f(z)|$ alcanza su valor máximo en un punto frontera de S. Más aún, si f no es una función constante, entonces $|f(z)|$ no alcanza su máximo en un punto interior de S.

Prueba Debido a que S es compacto y f es continua, sabe por el teorema 9.3 que $|f(z)|$ alcanza un valor máximo en algún punto (quizá muchos) de S. Sea ζ dicho punto. Si ζ es un punto interior, entonces existe un disco abierto D alrededor de ζ que contiene solamente puntos de S. Pero entonces $|f(z)|$ alcanza su máximo en este disco en su centro. Ahora hay dos casos.

Caso 1 $f(z)$ es constante en este disco. Por el teorema de la identidad, $f(z)$ es constante en S. En este caso $|f(z)|$ es constante en S.

Caso 2 $f(z)$ no es constante en este disco. Entonces $|f(z)| \le |f(\zeta)|$ para z en este disco, contradiciendo el lema 11.1. En este caso $|f(z)|$ no puede alcanzar un máximo en el interior de S y de esta manera debe alcanzar su máximo en un punto de la frontera. ■

EJEMPLO 11.8

Sea $f(z) = \text{sen}(z)$. Determine el valor máximo de $|f(z)|$ en el cuadrado $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$.

Primero, es conveniente trabajar con $|f(z)|^2$, ya que ésta tendrá su máximo en el mismo valor de z donde lo tiene $|f(z)|$. Ahora

$$f(z) = \text{sen}(z) = \text{sen}(x)\cosh(y) + i\cos(x)\text{senh}(y),$$

así

$$|f(z)|^2 = \text{sen}^2(x)\cosh^2(y) + \cos^2(x)\text{senh}^2(y).$$

Por el teorema del módulo máximo, $|f(z)|^2$ debe alcanzar su valor máximo (para este cuadrado) en uno de los lados del cuadrado. Vea, por turno, cada lado.

En el lado inferior, $y = 0$ y $0 \le x \le \pi$, de manera que $|f(z)|^2 = \text{sen}^2(x)$ alcanza un valor máximo de 1.

En el lado derecho, $x = \pi$ y $0 \le y \le \pi$, de manera que $|f(z)|^2 = \text{senh}^2(y)$ alcanza un valor máximo de $\text{senh}^2(\pi)$. Esto se debe a que $\cos^2(\pi) = 1$ y $\text{senh}(y)$ es una función estrictamente creciente en $[0, \pi]$.

En el lado superior del cuadrado, $y = \pi$ y $0 \leq x \leq \pi$. Ahora $|f(z)|^2 = \text{sen}^2(x)\cosh^2(\pi) + \cos^2(x)\,\text{senh}^2(\pi)$. Necesita saber dónde alcanza ésta su valor máximo para $0 \leq x \leq \pi$. Este es un problema de cálculo de una variable. Sea

$$g(x) = \text{sen}^2(x)\cosh^2(\pi) + \cos^2(x)\text{senh}^2(\pi).$$

Entonces

$$g'(x) = 2\,\text{sen}(x)\cos(x)\cosh^2(\pi) - 2\cos(x)\text{sen}(x)\text{senh}^2(\pi)$$

$$= \text{sen}(2x)[\cosh^2(\pi) - \text{senh}^2(\pi)] = \text{sen}(2x).$$

Esta derivada es cero en $(0, \pi)$ en $x = \pi/2$, de manera que este es el punto crítico de g. Más aún,

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cosh^2(\pi).$$

En los extremos del intervalo,

$$g(0) = g(\pi) = \text{senh}^2(\pi) < \cosh^2(\pi).$$

Por tanto, en el lado superior del cuadrado, $|f(z)|^2$ alcanza su valor máximo de $\cosh^2(\pi)$.

Finalmente, en el lado izquierdo del cuadrado, $x = 0$ y $0 \leq y \leq \pi$, de manera que $|f(z)|^2 = \text{senh}^2(y)$, con máximo $\text{senh}^2(\pi)$ en $0 \leq y \leq \pi$.

La conclusión es que en este cuadrado, $|f(z)|^2$ tiene su valor máximo igual a $\cosh^2(\pi)$, que es el valor máximo de $|f(z)|^2$ en la frontera del cuadrado. Por tanto, $|f(z)|$ tiene un valor máximo igual a $\cosh(\pi)$ en este cuadrado. ■

SECCIÓN 11.1 PROBLEMAS

En cada problema del 1 al 12, encuentre la serie de Taylor de la función alrededor del punto. También determine el radio de convergencia y el disco abierto de convergencia de la serie.

1. $\cos(2z)$; $z = 0$

2. e^{-z}; $z = -3i$

3. $\dfrac{1}{1-z}$; $4i$

4. $\text{sen}(z^2)$; 0

5. $\dfrac{1}{(1-z)^2}$; 0

6. $\dfrac{1}{2+z}$; $1 - 8i$

7. $z^2 - 3z + i$; $2 - i$

8. $1 + \dfrac{1}{2+z^2}$; i

9. $(z-9)^2$; $1 + i$

10. $e^z - i\,\text{sen}(z)$; 0

11. $\text{sen}(z + i)$; $-i$

12. $\dfrac{3}{z-4i}$; -5

13. Suponga que f es diferenciable en un disco abierto alrededor de cero y satisface $f''(z) = 2f(z) + 1$. Suponga que $f(0) = 1$ y $f'(0) = i$. Encuentre el desarrollo de Maclaurin de $f(z)$.

14. Encuentre los primeros tres términos del desarrollo de Maclaurin de $\text{sen}^2(z)$ de tres maneras, como sigue:

(a) Primero, calcule los coeficientes de Taylor en 0.

(b) Encuentre los primeros tres términos del producto de la serie de Maclaurin para $\text{sen}(z)$ con ella misma.

(c) Escriba $\text{sen}^2(z)$ en términos de la función exponencial y use el desarrollo de Maclaurin de esta función.

15. Pruebe que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} z^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2z\cos(\theta)}\, d\theta.$$

Sugerencia: Primero pruebe que

$$\left(\frac{z^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{z^n}{n! w^{n+1}} e^{zw}\, dw$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$ y Γ el círculo unitario alrededor del origen.

16. Encuentre el máximo valor de $|\cos(z)|$ en el cuadrado $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$.

17. Encuentre el máximo valor de $|e^z|$ en el rectángulo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \pi$.

18. Encuentre el máximo valor de $|\text{sen}(z)|$ en el rectángulo $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 1$.

11.2 Desarrollo de Laurent

Si f es diferenciable en algún disco alrededor de z_0, entonces $f(z)$ tiene una representación en serie de Taylor alrededor de z_0.

Si una función no es diferenciable en z_0, puede tener un tipo diferente de desarrollo en serie alrededor de z_0, un desarrollo de Laurent. Esto tendrá implicaciones profundas en el análisis de las propiedades de funciones y en aplicaciones tales como la suma de series y la evaluación de integrales reales y complejas.

Primero es necesaria alguna terminología. El conjunto abierto entre dos círculos concéntricos se llama un *anillo*. Un anillo se describe típicamente por las desigualdades

$$r < |z - z_0| < R,$$

en donde r es el radio del círculo interior y R el radio del círculo exterior (figura 11.7). Permita $r = 0$ en esta desigualdad, en cuyo caso el anillo $0 < |z - z_0| < R$ es un *disco agujerado* (disco abierto sin el centro).

También permita $R = \infty$. El anillo $r < |z - z_0| < \infty$ consiste en todos los puntos fuera del círculo interior de radio r. Un anillo $0 < |z - z_0| < \infty$ consiste en todos los complejos z excepto z_0.

Ahora puede enunciar el resultado principal en series de Laurent.

TEOREMA 11.7

Sea $0 \leq r < R \leq \infty$. Suponga que f es diferenciable en el anillo $r < |z - z_0| < R$. Entonces, para cada z en este anillo,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

donde, para cada entero n,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz,$$

y Γ es cualquier trayectoria cerrada alrededor de z_0 totalmente contenida en el anillo. ■

En la figura 11.8 se muestra una Γ típica. La serie en el teorema, que puede incluir tanto potencias de $z - z_0$ positivas como negativas es el *desarrollo de Laurent*, o *serie de Laurent*, para $f(z)$ alrededor de z_0 en el anillo dado. Este desarrollo tiene la apariencia

$$\cdots + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots .$$

La función no tiene que ser diferenciable, o incluso estar definida, en z_0 o en otros puntos dentro del círculo interior del anillo. Los números c_n son los *coeficientes de Laurent* de f alrededor de z_0.

Una serie de Laurent es una descomposición de $f(z)$ en una suma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = h(z) + g(z).$$

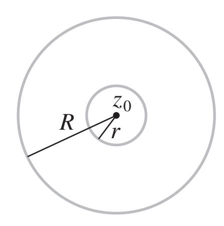


FIGURA 11.7
Círculos $|z - z_0| = r$ y $|z - z_0| = R$ *acotando el anillo abierto* $r < |z - z_0| < R$.

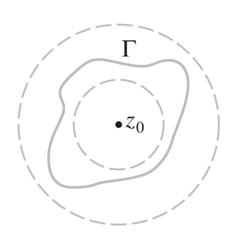


FIGURA 11.8
Trayectoria cerrada encerrando a z_0 *y contenida en el anillo* $r < |z - z_0| < R$.

La parte que contiene sólo potencias no negativas de $z - z_0$ define una función $g(z)$ que es diferenciable en $|z - z_0| < R$ (debido a que esta parte es un desarrollo de Taylor). La parte que contiene sólo potencias negativas de $z - z_0$ define una función $h(z)$ que no está definida en z_0. Esta parte determina el comportamiento de $f(z)$ alrededor del punto z_0 donde f no es diferenciable.

Como con la serie de Taylor, raramente se calculan los coeficientes del desarrollo de Laurent usando esta fórmula integral (más bien al contrario, se usa uno de estos coeficientes para evaluar las integrales). En cambio, utilice series y manipulaciones algebraicas o analíticas conocidas. Esto requiere que esté seguro de que el desarrollo de Laurent de una función en un anillo alrededor de un punto es única y no cambia con el método de derivación.

TEOREMA 11.8

Sea f diferenciable en un anillo $r < |z - z_0| < R$. Suponga que, para z en este anillo,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n.$$

Entonces los b_n son los coeficientes de Laurent c_n de f y esta serie es el desarrollo de Laurent de $f(z)$ en este anillo.

Prueba Elija γ como un círculo alrededor de z_0 en el anillo. Sea k cualquier entero. Usando el teorema 10.6, obtiene

$$\begin{aligned} 2\pi i c_k &= \oint_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\, dw = \oint_\gamma \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \right) \frac{1}{(w - z_0)^{k+1}}\, dw \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \oint_\gamma \frac{1}{(w - z_0)^{k-n+1}}\, dw. \end{aligned} \tag{11.2}$$

Ahora, en γ, $w = z_0 + re^{it}$ para $0 \leq t \leq 2\pi$, con r el radio de γ. Entonces

$$\begin{aligned} \oint_\gamma \frac{1}{(w - z_0)^{k-n+1}}\, dw &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^{k-n+1}(e^{it})^{k-n+1}} ire^{it}\, dt \\ &= \frac{i}{r^{k-n}} \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)t}\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 2\pi i & \text{si } k = n \end{cases}. \end{aligned}$$

Así en la ecuación (11.2), todos los términos en la última serie son cero excepto el término con $n = k$, y la ecuación se reduce a

$$2\pi i c_k = 2\pi i b_k.$$

Así que para cada entero k, $b_k = c_k$. ■

Los siguientes son ejemplos de desarrollos de Laurent.

EJEMPLO 11.9

$e^{1/z}$ es diferenciable en el anillo $0 < |z| < \infty$, el plano sin el origen. Como

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n,$$

entonces, en este anillo,

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{24}\frac{1}{z^4} + \cdots .$$

Este es el desarrollo de Laurent de $e^{1/z}$ alrededor de 0, y converge para todo z distinto de cero. Además contiene un término constante y un número infinito de potencias enteras negativas de z, pero no potencias positivas. ■

EJEMPLO 11.10

Encontrará el desarrollo de Laurent de $\cos(z)/z^5$ alrededor de cero. Para todo z,

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

Para $z \neq 0$,

$$\frac{\cos(z)}{z^5} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n-5} = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{2}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{24}\frac{1}{z} - \frac{1}{720} z + \frac{1}{40\,320} z^3 - \cdots .$$

Este es el desarrollo de Laurent de $\cos(z)/z^5$ alrededor de 0. Este desarrollo tiene exactamente tres términos que contienen potencias negativas de z, y el resto de los términos contienen sólo potencias positivas. Puede pensar en $\cos(z)/z^5 = h(z) + g(z)$, donde

$$g(z) = -\frac{1}{720} z + \frac{1}{40\,320} z^3 - \cdots$$

es una función diferenciable (es una serie de potencias alrededor del origen), y

$$h(z) = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{2}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{24}\frac{1}{z}.$$

Es $h(z)$ quien determina el comportamiento de $\cos(z)/z^5$ cerca del origen. ■

EJEMPLO 11.11

Encontrar el desarrollo de Laurent de

$$\frac{1}{(z+1)(z-3i)}$$

alrededor de -1.

Use fracciones parciales para escribir

$$\frac{1}{(z+1)(z-3i)} = \frac{-1+3i}{10}\frac{1}{z+1} + \frac{1-3i}{10}\frac{1}{z-3i}.$$

$1/(z+1)$ ya está desarrollada alrededor de -1, de manera que concéntrese en el último término:

$$\frac{1}{z-3i} = \frac{1}{-1-3i+(z+1)} = \frac{1}{-1-3i}\frac{1}{1-\frac{z+1}{1+3i}} = \frac{-1}{1+3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{1+3i}\right)^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+3i)^{n+1}}(z+1)^n.$$

Este desarrollo es válido para $|(z+1)/(1+3i)| < 1$, o $|z+1| < \sqrt{10}$. El desarrollo de Laurent de $1/(z+1)(z-3i)$ alrededor de -1 es

$$\frac{1}{(z+1)(z-3i)} = \frac{-1+3i}{10}\frac{1}{z+1} - \frac{1-3i}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+3i)^{n+1}}(z+1)^n,$$

y esta representación es válida en el anillo $0 < |z+1| < \sqrt{10}$.

Observe que $\sqrt{10}$ es la distancia de -1, el centro del desarrollo de Laurent, al otro punto, $3i$, en el que la función no es diferenciable. ■

En el siguiente capítulo utilizará el desarrollo de Laurent para obtener el poderoso teorema del residuo, el cual tiene muchas aplicaciones, incluyendo las evaluaciones de las integrales reales y complejas y la sumatoria de series.

SECCIÓN 11.2 PROBLEMAS

En cada problema del 1 al 10, escriba el desarrollo de Laurent de la función en un anillo $0 < |z - z_0| < R$ alrededor del punto.

1. $\dfrac{2z}{1+z^2}$; i
2. $\dfrac{\operatorname{sen}(z)}{z^2}$; 0
3. $\dfrac{1-\cos(2z)}{z^2}$; 0
4. $z^2\cos\left(\dfrac{i}{z}\right)$; 0
5. $\dfrac{z^2}{1-z}$; 1
6. $\dfrac{z^2+1}{2z-1}$; $\dfrac{1}{2}$
7. $\dfrac{e^{z^2}}{z^2}$; 0
8. $\dfrac{\operatorname{sen}(4z)}{z}$; 0
9. $\dfrac{z+i}{z-i}$; i
10. $\operatorname{senh}\left(\dfrac{1}{z^3}\right)$; 0

SINGULARIDADES EL TEOREMA DEL RESIDUO ALGUNAS APLICACIONES DEL TEOREMA DEL RESIDUO SINGULARIDADES EL TEOREMA DEL RESIDUO ALGUNAS APLICACIONES

CAPÍTULO 12

Singularidades y el teorema del residuo

Como preludio al teorema del residuo, usará el desarrollo de Laurent para clasificar puntos en donde una función no es diferenciable.

12.1 Singularidades

DEFINICIÓN 12.1 ***Singularidad aislada***

Una función compleja f tiene una singularidad aislada en z_0 si f es diferenciable en un anillo $0 < |z - z_0| < R$, pero no en el mismo z_0.

Por ejemplo, $1/z$ tiene una singularidad aislada en 0, y $\text{sen}(z)/(z - \pi)$ tiene una singularidad aislada en π.

Ahora identificará las singularidades de diferentes tipos, dependiendo de los términos que aparezcan en el desarrollo de Laurent de la función alrededor de la singularidad.

DEFINICIÓN 12.2 ***Clasificación de singularidades***

Sea f con una singularidad aislada en z_0. Sea el desarrollo de Laurent de $f(z)$ en un anillo $0 < |z - z_0| < R$.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n.$$

Entonces:

1. z_0 es una singularidad removible de f si $c_n = 0$ para $n = -1, -2, \ldots$.
2. z_0 es un polo de orden m (m un entero positivo) si $c_{-m} \neq 0$ y $c_{-m-1} = c_{-m-2} = \cdots = 0$.
3. z_0 es una singularidad esencial de f si $c_{-n} \neq 0$ para una infinidad de enteros positivos n.

Estos tres tipos cubren todas las posibilidades para una singularidad aislada.

En el caso de una singularidad removible, el desarrollo de Laurent no tiene potencias negativas de $z - z_0$ y, por tanto, es

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

una serie de potencias alrededor de z_0. En este caso puede asignar a $f(z_0)$ el valor c_0 para obtener una función que es diferenciable en el disco abierto $|z - z_0| < r$.

EJEMPLO 12.1

Sea

$$f(z) = \frac{1 - \cos(z)}{z}$$

para $0 < |z| < \infty$. Como

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$$

para todo z, entonces

$$f(z) = \frac{1 - \cos(z)}{z} = \frac{z}{2!} - \frac{z^3}{4!} + \frac{z^5}{6!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} z^{2n-1}$$

para $z \neq 0$. La serie de la derecha es una serie de potencias, que vale 0 en $z = 0$. Puede, por tanto, definir una función nueva

$$g(z) = \begin{cases} (1 - \cos(z))/z & \text{para } z \neq 0 \\ 0 & \text{para } z = 0 \end{cases},$$

que coincide con $f(z)$ para $z \neq 0$ pero está definida en 0 de tal manera que es diferenciable ahí, ya que $g(z)$ tiene un desarrollo en serie de potencias alrededor de 0. Debido a que es posible extender f a una función g que es diferenciable en 0, llame a 0 una *singularidad removible* de f. ■

Así, una singularidad removible es la que se puede "quitar" asignando a la función un valor apropiado en un punto.

EJEMPLO 12.2

$f(z) = \text{sen}(z)/(z - \pi)$ tiene una singularidad removible en π. Para ver esto, primero escriba el desarrollo de Laurent de $f(z)$ en $0 < |z - \pi| < \infty$. Una manera fácil de hacer esto es empezar con

$$\text{sen}(z - \pi) = \text{sen}(z)\cos(\pi) - \cos(z)\,\text{sen}(\pi) = -\text{sen}(z),$$

así

$$\text{sen}(z) = -\,\text{sen}(z - \pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z - \pi)^{2n+1}.$$

Entonces, para $z \neq \pi$,

$$\frac{\text{sen}(z)}{z - \pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z - \pi)^{2n} = -1 + \frac{1}{6}(z - \pi)^2 - \frac{1}{120}(z - \pi)^4 + \cdots .$$

Aunque $f(\pi)$ no está definida, la serie de la derecha está definida para $z = \pi$, y ahí es igual a -1. Por tanto, extienda f a una función diferenciable g definida en todo el plano asignando el valor -1 a la nueva función cuando $z = \pi$:

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{para } z \neq \pi \\ -1 & \text{para } z = \pi \end{cases}.$$

Esta extensión "quita" la singularidad de f en π, ya que $f(z) = g(z)$ para $z \neq \pi$ y $g(\pi) = -1$. ■

Para que f tenga un polo en z_0, el desarrollo de Laurent de f alrededor de z_0 debe tener términos con potencias negativas de $z - z_0$, pero sólo un número finito de tales términos. Si el polo tiene orden m, entonces este desarrollo de Laurent tiene la forma

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

con $c_{-m} \neq 0$. Este desarrollo es válido en algún anillo $0 < |z - z_0| < R$.

EJEMPLO 12.3

Sea $f(z) = 1/(z + i)$. Esta función es su propio desarrollo de Laurent alrededor de $-i$ y $c_{-1} = 1$, mientras que todos los otros coeficientes son cero. Así $-i$ es un polo de orden 1 de f.

Esta singularidad no es removible. No hay manera de asignarle un valor a $f(-i)$ para que la función extendida sea diferenciable en $-i$. ■

EJEMPLO 12.4

$g(z) = 1/(z + i)^3$, entonces g tiene un polo de orden 3 en $-i$. Aquí la función es su propio desarrollo de Laurent alrededor de $-i$, y el coeficiente de $1/(z + i)^3$ es distinto de cero, mientras que todos los otros coeficientes son cero. ■

DEFINICIÓN 12.3 Polo simple y doble

Un polo de orden 1 se llama polo simple. Un polo de orden 2 es un polo doble.

EJEMPLO 12.5

Sea

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^3}.$$

Para $z \neq 0$,

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n-2}$$
$$= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{120}z^2 - \frac{1}{5040}z^4 + \cdots .$$

Por tanto, f tiene un polo doble en 0. ■

EJEMPLO 12.6

$e^{1/z}$ está definida para todo z distinto de cero, y para $z \neq 0$,

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}.$$

Como este desarrollo de Laurent tiene una infinidad de potencias negativas de z, 0 es una singularidad esencial de $e^{1/z}$. ■

Se discutirán algunos resultados que son útiles en la identificación de los polos de una función.

TEOREMA 12.1 Condición para un polo de orden m

Sea f diferenciable en el anillo $0 < |z - z_0| < R$. Entonces f tiene un polo de orden m en z_0 si, y sólo si

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z)$$

existe, es finito y distinto de cero. ■

Prueba Desarrolle $f(z)$ en una serie de Laurent en este anillo:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \text{para } 0 < |z - z_0| < R.$$

Suponga que f tiene un polo de orden m en z_0. Entonces $c_{-m} \neq 0$ y $c_{-m-1} = c_{-m-2} = \cdots = 0$, de manera que la serie de Laurent es

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Entonces

$$(z - z_0)^m f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+m} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-m} (z - z_0)^n$$

$$= c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + c_{-m+2}(z - z_0)^2 + \cdots .$$

Entonces

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = c_{-m} \neq 0.$$

Recíprocamente, suponga que $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = L \neq 0$. Busque probar que f tiene un polo de orden m en z_0.

Sea $\epsilon > 0$. Debido al límite, existe un positivo $\delta < R$ tal que

$$\left|(z - z_0)^m f(z) - L\right| < \epsilon \quad \text{si } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Entonces, para tal z,

$$\left|(z - z_0)^m f(z)\right| < |L| + \epsilon.$$

En particular, si $|z - z_0| = \delta$, entonces

$$\left|(z - z_0)^{-n-1} f(z)\right| < (|L| + \epsilon) \, |z - z_0|^{-n-m-1} = (|L| + \epsilon) \, \delta^{-n-m-1}.$$

Los coeficientes en el desarrollo de Laurent de $f(z)$ alrededor de z_0 están dados por

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz,$$

en donde puede elegir a Γ como un círculo de radio δ alrededor de z_0. Entonces

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} (2\pi\delta) \max_{z \text{ en } \Gamma} \left| f(z)(z - z_0)^{-n-1} \right| < \delta \, (|L| + \epsilon) \, \delta^{-n-m-1} = (|L| + \epsilon) \, \delta^{-n-m}.$$

Ahora δ^{-n-m} puede hacerse tan pequeño como quiera eligiendo δ pequeña, si $n < -m$. Se concluye que $|c_n| = 0$, de donde $c_n = 0$, si $n < -m$. Así el desarrollo de Laurent de $f(z)$ alrededor de z_0 tiene la forma

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

y por tanto f tiene un polo de orden m en z_0, como quería demostrar. ■

EJEMPLO 12.7

Vea nuevamente el ejemplo 12.3. Como

$$\lim_{z \to -i} (z + i) f(z) = \lim_{z \to -i} (z + i) \frac{1}{z + i} = 1 \neq 0,$$

f tiene un polo simple en $-i$.

En el ejemplo 12.4,

$$\lim_{z \to -i} (z + i)^3 g(z) = \lim_{z \to -i} (z + i)^3 \frac{1}{(z + i)^3} = 1 \neq 0,$$

así g tiene un polo de orden 3 en $-i$.

En el ejemplo 12.5,

$$\lim_{z\to 0} z^2 \frac{\text{sen}(z)}{z^3} = \lim_{z\to 0} \frac{\text{sen}(z)}{z} = 1 \neq 0,$$

así $\text{sen}(z)/z^3$ tiene un polo doble en 0. Es un error común pensar que esta función tiene un polo de orden 3 en cero ya que el denominador tiene un cero de orden 3 ahí. Sin embargo,

$$\lim_{z\to 0} z^3 \frac{\text{sen}(z)}{z^3} = \lim_{z\to 0} \text{sen}(z) = 0,$$

entonces por el teorema 12.1, la función no puede tener un polo de tercer orden en 0. ■

Si $f(z)$ es un cociente de funciones, es natural buscar polos en los valores donde el denominador vale cero. El primer resultado a lo largo de estas líneas trata con un cociente en donde el denominador vale cero en z_0 pero el numerador no. Recuerde que $g(z)$ tiene un cero de orden k en z_0 si $g(z_0) = \cdots = g^{(k-1)}(z_0) = 0$, pero $g^{(k)}(z_0) \neq 0$. El orden del cero es el de la derivada de menor orden que no vale cero en el punto.

TEOREMA 12.2

Sea $f(z) = h(z)/g(z)$, donde h y g son diferenciables en algún disco abierto alrededor de z_0. Suponga que $h(z_0) \neq 0$, pero g tiene un cero de orden m en z_0. Entonces f tiene un polo de orden m en z_0. ■

Queda para el estudiante la prueba de este resultado.

EJEMPLO 12.8

$$f(z) = \frac{1 + 4z^3}{\text{sen}^6(z)}$$

tiene un polo de orden 6 en 0, ya que el numerador no vale cero en 0, y el denominador tiene un cero de orden 6 en 0. Por la misma razón, f tiene un polo de orden 6 en $n\pi$ para cualquier entero n. ■

El teorema 12.2 no se puede aplicar si el numerador también vale cero en z_0. El ejemplo $f(z) = \text{sen}(z)/z^3$ es instructivo. El numerador tiene un cero de orden 1 en 0 y el denominador un cero de orden 3 en 0, y por el ejemplo 12.5 el cociente tiene un polo de orden 2. Parecería que los órdenes de los ceros del numerador y del denominador se restan (o cancelan) para dar el orden de un polo en el punto. Éste es el caso.

TEOREMA 12.3 *Polos de cocientes*

Sea $f(z) = h(z)/g(z)$ y suponga que h y g son diferenciables en algún disco abierto alrededor de z_0. Sea h con un cero de orden k en z_0 y g con un cero de orden m en z_0, con $m > k$. Entonces f tiene un polo de orden $m - k$ en z_0. ■

Se deja al estudiante la prueba del teorema. Al permitir $k = 0$, este teorema incluye el caso que el numerador $h(z)$ no tenga ceros en z_0.

EJEMPLO 12.9

Considere

$$f(z) = \frac{(z - 3\pi/2)^4}{\cos^7(z)}.$$

El numerador tiene un cero de orden 4 en $3\pi/2$ y el denominador tiene ahí un cero de orden 7, entonces el cociente f tiene un polo de orden 3 en $3\pi/2$. ■

EJEMPLO 12.10

Sea $f(z) = \tan^3(z)/z^9$. El numerador tiene un cero de orden 3 en 0 y el denominador tiene un cero de orden 9 en 0. Por tanto, f tiene un polo de orden 6 en 0. ■

También hay algunos resultados enunciados en términos de productos en lugar de cocientes. Por tanto, el orden de un polo de un producto es la suma de los órdenes de los polos de los factores en un punto dado.

TEOREMA 12.4 *Polos de productos*

Sea f con un polo de orden m en z_0 y sea g con un polo de orden n en z_0. Entonces fg tiene un polo de orden $m + n$ en z_0. ■

EJEMPLO 12.11

Sea

$$f(z) = \frac{1}{\cos^4(z)(z - \pi/2)^2}.$$

Aquí $f(z)$ es un producto, que se escribe para enfatizar como

$$f(z) = \left[\frac{1}{\cos^4(z)}\right]\left[\frac{1}{(z - \pi/2)^2}\right].$$

Ahora $1/\cos^4(z)$ tiene un polo de orden 4 en $\pi/2$ y $1/(z - \pi/2)^2$ tiene ahí un polo de orden 2, así f tiene un polo de orden 6 en $\pi/2$. f también tiene un polo de orden 4 (no 6) en $z = (2n + 1)\pi/2$ para cualquier n distinto de cero. ■

Ahora está preparado para desarrollar el poderoso teorema del residuo.

SECCIÓN 12.1 PROBLEMAS

En cada problema del 1 al 12, determine todas las singularidades de la función y clasifique cada singularidad como removible, un polo de cierto orden, o una singularidad esencial.

1. $\dfrac{\cos(z)}{z^2}$

2. $\dfrac{4\,\text{sen}(z+2)}{(z+i)^2(z-i)}$

3. $e^{1/z}(z + 2i)$

4. $\dfrac{\text{sen}(z)}{z - \pi}$

5. $\dfrac{\cos(2z)}{(z-1)^2(1+z^2)}$

6. $\dfrac{z}{(z+1)^2}$

7. $\dfrac{z - i}{z^2 + 1}$

8. $\dfrac{\text{sen}(z)}{\text{senh}(z)}$

9. $\dfrac{z}{z^4 - 1}$

10. $\tan(z)$

11. $\dfrac{1}{\cos(z)}$

12. $e^{1/z(z+1)}$

13. Sea f diferenciable en z_0 y sea g con un polo de orden m en z_0. Suponga que $f(z_0) \neq 0$. Pruebe que fg tiene un polo de orden m en z_0.

14. Sean h y g diferenciables en z_0, $g(z_0) \neq 0$, y h tiene un cero de orden 2 en z_0. Demuestre que $g(z)/h(z)$ tiene un polo de orden 2 en z_0.

15. Suponga que h y g son diferenciables en z_0 y $g(z_0) \neq 0$, mientras que h tiene un cero de orden 3 en z_0. Demuestre que $g(z)/h(z)$ tiene un polo de orden 3 en z_0.

12.2 El teorema del residuo

Para ver una conexión entre la serie de Laurent y la integral de una función, suponga que f tiene un desarrollo de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

en algún anillo $0 < |z - z_0| < R$. Sea Γ una trayectoria cerrada en este anillo que encierra a z_0. De acuerdo con el teorema 11.6, los coeficientes de Laurent están dados por una fórmula integral. En particular, el coeficiente de $1/(z - z_0)$ es

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma f(z)\, dz.$$

Por tanto,

$$\oint_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i c_{-1}. \tag{12.1}$$

Si conoce este coeficiente en el desarrollo de Laurent puede obtener el valor de esta integral. Este hecho da una importancia especial a este coeficiente, de manera que tomará ese nombre.

DEFINICIÓN 12.4 Residuo

Sea f con una singularidad aislada en z_0 y desarrollo de Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ en algún anillo $0 < |z - z_0| < R$. Entonces el coeficiente c_{-1} se llama el residuo de f en z_0 y se denota $\text{Re}\, s(f, z_0)$.

Ahora extienda la idea detrás de la ecuación (12.1) para incluir el caso en que Γ pueda encerrar cualquier número finito de puntos en donde f no es diferenciable.

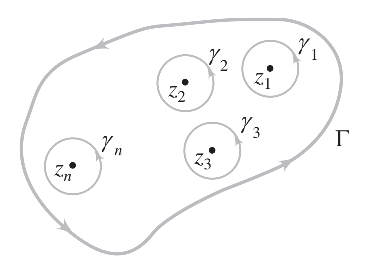


FIGURA 12.1

TEOREMA 12.5 *Teorema del residuo*

Sea Γ una trayectoria cerrada y sea f diferenciable en Γ y en todos los puntos encerrados por Γ, excepto para $z_1, \ldots, z_n$, que son todas singularidades aisladas de f encerradas por Γ. Entonces

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Re} s(f, z_j). \quad ■$$

En palabras, el valor de esta integral es $2\pi i$ veces la suma de los residuos de f en las singularidades de f encerradas por Γ.

Prueba Encierre cada singularidad z_j en una trayectoria cerrada γ_j (figura 12.1) de manera que cada γ_j esté en el interior de Γ, encierre exactamente una singularidad, y no interseque ninguna otra γ_k. Por el teorema de la deformación extendido,

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \oint_{\gamma_j} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Re} s(f, z_j). \quad ■$$

El teorema del residuo es efectivo en la medida de nuestra eficiencia para evaluar los residuos de una función en sus singularidades. Si realmente tuviera que escribir el desarrollo de Laurent de f alrededor de cada singularidad para mostrar el coeficiente del $1/(z - z_j)$ término, el teorema sería difícil de aplicar en muchos ejemplos. Lo que aumenta su importancia, es que, al menos para los polos, es una manera eficiente de calcular los residuos. Ahora desarrolle algunos de éstos.

TEOREMA 12.6 *Residuo en un polo simple*

Si f tiene un polo simple en z_0, Entonces

$$\operatorname{Re} s(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Prueba Si f tiene un polo simple en z_0, entonces su desarrollo de Laurent alrededor de z_0 es

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

en algún anillo $0 < |z - z_0| < R$. Entonces

$$(z - z_0) f(z) = c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+1},$$

así

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = c_{-1} = \operatorname{Re} s(f, z_0). \blacksquare$$

EJEMPLO 12.12

$f(z) = \operatorname{sen}(z)/z^2$ tiene un polo simple en 0, y

$$\operatorname{Re} s(f, 0) = \lim_{z \to 0} z \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^2} = \lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} = 1.$$

Si Γ es cualquier trayectoria cerrada en el plano que encierra al origen, entonces por el teorema del residuo,

$$\oint_\Gamma \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^2}\, dz = 2\pi i \operatorname{Re} s(f, 0) = 2\pi i. \blacksquare$$

EJEMPLO 12.13

Sea

$$f(z) = \frac{z - 6i}{(z-2)^2(z+4i)}.$$

Entonces f tiene un polo simple en $-4i$ y un polo doble en 2. El teorema 12.6 no ayudará con el residuo de f en 2, pero en el polo simple,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} s(f, -4i) &= \lim_{z \to -4i} (z + 4i) \frac{z - 6i}{(z-2)^2(z+4i)} = \lim_{z \to -4i} \frac{z - 6i}{(z-2)^2} = \frac{-4i - 6i}{(-4i - 2)^2} \\ &= -\frac{2}{5} + \frac{3}{10} i. \blacksquare\end{aligned}$$

Antes de estudiar residuos en polos de orden mayor que 1, vea la siguiente versión del teorema 12.6 que algunas veces es útil.

COROLARIO 12.1

Sea $f(z) = h(z)/g(z)$, donde h es continua en z_0 y $h(z_0) \neq 0$. Suponga que g es diferenciable en z_0 y tiene ahí un cero simple. Entonces f tiene un polo simple en z_0 y

$$\operatorname{Re} s(f, z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}. \blacksquare$$

Prueba Por el teorema 12.2, f tiene un polo simple en z_0. Por el teorema 12.6,

$$\operatorname{Re} s(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{h(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{h(z)}{((g(z) - g(z_0))/(z - z_0))} = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}. \blacksquare$$

EJEMPLO 12.14

Sea

$$f(z) = \frac{4iz - 1}{\operatorname{sen}(z)}.$$

Entonces f tiene un polo simple en π y por el corolario 12.1,

$$\operatorname{Re}s(f, \pi) = \frac{4i\pi - 1}{\cos(\pi)} = 1 - 4\pi i.$$

De hecho, f tiene un polo simple en $n\pi$ para cualquier entero n, y

$$\operatorname{Re}s(f, n\pi) = \frac{4in\pi - 1}{\cos(n\pi)} = (-1)^n(-1 + 4n\pi i). \blacksquare$$

EJEMPLO 12.15

Evaluar

$$\oint_\Gamma \frac{4iz - 1}{\operatorname{sen}(z)}\, dz$$

con Γ la trayectoria cerrada de la figura 12.2.

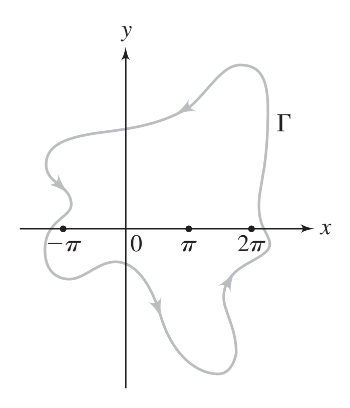


FIGURA 12.2 Γ *encierra solamente las singularidades* $-\pi$, 0, π y 2π de $\frac{4iz-1}{\operatorname{sen}(z)}$.

Γ encierra los polos 0, π, 2π y $-\pi$ pero no otras singularidades de f. Por el teorema del residuo y el ejemplo 12.14,

$$\oint_\Gamma \frac{4iz - 1}{\operatorname{sen}(z)}\, dz = 2\pi i[\operatorname{Re}s(f, 0) + \operatorname{Re}s(f, \pi) + \operatorname{Re}s(f, 2\pi) + \operatorname{Re}s(f, -\pi)]$$

$$= 2\pi i\,[-1 + (1 - 4\pi i) + (-1 + 8\pi i) + (1 + 4\pi i)] = -16\pi^2. \blacksquare$$

Aquí hay una fórmula para el residuo de una función en un polo de orden mayor que 1.

TEOREMA 12.7 *Residuo en un polo de orden m*

Sea f con un polo de orden m en z_0. Entonces

$$\operatorname{Re}s(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z - z_0)^m f(z)]. \blacksquare$$

Si $m = 1$ (polo simple), entonces $(m - 1)! = 0! = 1$ por definición, y la derivada de orden $(m - 1)$ está definida para ser exactamente la propia función. Con estas convenciones, la conclusión del teorema se reduce al resultado para los residuos en polos simples cuando $m = 1$.

Prueba En algún anillo alrededor de z_0,

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Quiere encontrar c_{-1}. Escriba

$$(z - z_0)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+m}.$$

El lado derecho de esta ecuación es una serie de potencias alrededor de z_0 y puede ser diferenciada cualquier número de veces dentro de su disco abierto de convergencia. Calcule

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z - z_0)^m f(z)]$$
$$= (m - 1)!c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n + m)(n + m - 1) \cdots (n + 1)(z - z_0)^{n+1}.$$

En el límite conforme $z \to z_0$, esta ecuación produce

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z - z_0)^m f(z)] = (m - 1)!c_{-1} = (m - 1)!\operatorname{Res}(f, z_0). \blacksquare$$

EJEMPLO 12.16

Sea

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{(z + i)^3}.$$

Entonces f tiene un polo de orden 3 en $-i$. Por el teorema 12.7,

$$\operatorname{Res}(f, -i) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to -i} \frac{d^2}{dz^2}\left((z + i)^3 \frac{\cos(z)}{(z + i)^3}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to -i} \frac{d^2}{dz^2} \cos(z) = -\frac{1}{2}\cos(-i) = -\frac{1}{2}\cos(i). \blacksquare$$

Aquí hay algunos ejemplos del uso del teorema del residuo para la evaluación de integrales complejas.

EJEMPLO 12.17

Sea

$$f(z) = \frac{2iz - \cos(z)}{z^3 + z}.$$

Busque evaluar $\oint_\Gamma f(z)dz$, con Γ una trayectoria cerrada que no pasa por ninguna singularidad de f.

Las singularidades de f son polos simples en 0, i y $-i$. Primero calcule el residuo de f en cada uno de estos puntos. Aquí es conveniente usar el corolario 12.1:

$$\text{Re}\,s(f, 0) = \frac{-\cos(0)}{1} = -1,$$

$$\text{Re}\,s(f, i) = \frac{2i^2 - \cos(i)}{3(i)^2 + 1} = \frac{-2 - \cos(i)}{-2} = 1 + \frac{1}{2}\cos(i),$$

y

$$\text{Re}\,s(f, -i) = \frac{2i(-i) - \cos(-i)}{3(-i)^2 + 1} = -1 + \frac{1}{2}\cos(i).$$

Ahora se consideran casos.

1. Si Γ no encierra ninguna de las singularidades, entonces $\oint_\Gamma f(z)dz = 0$ por el teorema de Cauchy.
2. Si Γ encierra a 0 pero no a i o $-i$, entonces
$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,\text{Re}\,s(f, 0) = -2\pi i.$$
3. Si Γencierra a i pero no a 0 o $-i$, entonces
$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(1 + \frac{1}{2}\cos(i)\right).$$
4. Si Γencierra a $-i$ pero no a 0 o i, entonces
$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(-1 + \frac{1}{2}\cos(i)\right)$$
5. Si Γ encierra a 0 y a i pero no a $-i$, entonces
$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(-1 + 1 + \frac{1}{2}\cos(i)\right) = \pi i\cos(i).$$
6. Si Γ encierra a 0 y a $-i$ pero no a i, entonces
$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(-1 - 1 + \frac{1}{2}\cos(i)\right) = 2\pi i\left(-2 + \frac{1}{2}\cos(i)\right).$$
7. Si Γ encierra a i y a $-i$ pero no a 0, entonces
$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(1 + \frac{1}{2}\cos(i) - 1 + \frac{1}{2}\cos(i)\right) = 2\pi i\cos(i).$$
8. Si Γ encierra a las tres singularidades, entonces
$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(-1 + 1 + \frac{1}{2}\cos(i) - 1 + \frac{1}{2}\cos(i)\right) = 2\pi i\left(-1 + \cos(i)\right). \ \blacksquare$$

EJEMPLO 12.18

Sea

$$f(z) = \frac{\text{sen}(z)}{z^2(z^2 + 4)}.$$

Busque evaluar $\oint_\Gamma f(z)dz$, donde Γ es una trayectoria cerrada que encierra a 0 y a $2i$ pero no a $-2i$.

Por el teorema 12.3, f tiene un polo simple en 0, no un polo doble, ya que sen(z) tiene un cero simple en 0. f también tiene polos simples en $2i$ y $-2i$. Sólo los polos en 0 y $2i$ son de interés en el uso del teorema del residuo, ya que Γ no encierra a $-2i$.

Calcule

$$\operatorname{Re}s(f, 0) = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} \frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{4},$$

y

$$\operatorname{Re}s(f, 2i) = \lim_{z\to 2i} (z-2i) f(z) = \lim_{z\to 2i} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^2(z+2i)} = \frac{\operatorname{sen}(2i)}{(-4)(4i)} = \frac{i}{16} \operatorname{sen}(2i).$$

Entonces

$$\oint_\Gamma \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^2(z^2+4)}\, dz = 2\pi i \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{16} \operatorname{sen}(2i) \right). \blacksquare$$

EJEMPLO 12.19

Evalúe

$$\oint_\Gamma e^{1/z}\, dz$$

para Γ cualquier trayectoria cerrada que no pase por el origen.

Hay dos casos. Si Γ no encierra al origen, entonces $\oint_\Gamma e^{1/z}\, dz = 0$ por el teorema de Cauchy.

Si Γ encierra al origen, entonces se usa el teorema del residuo. Necesita Re $s(e^{1/z}, 0)$. Como encontró en el ejemplo 12.6, 0 es una singularidad esencial de $e^{1/z}$. No hay una fórmula general simple para el residuo de una función en una singularidad esencial. Sin embargo,

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$$

es el desarrollo de Laurent de $e^{1/z}$ alrededor de 0, y el coeficiente de $1/z$ es 1. Así Re $s(e^{1/z}, 0) = 1$ y

$$\oint_\Gamma e^{1/z}\, dz = 2\pi i. \blacksquare$$

Ahora verá una variedad de aplicaciones del teorema del residuo.

SECCIÓN 12.2 PROBLEMAS

En cada problema del 1 al 16, use el teorema del residuo para evaluar la integral sobre la trayectoria dada.

1. $\oint_\Gamma \frac{1+z^2}{(z-1)^2(z+2i)}\, dz$; Γ es el círculo de radio 7 alrededor de $-i$.

2. $\oint_\Gamma \frac{2z}{(z-i)^2}\, dz$; Γ es el círculo de radio 3 alrededor de 1.

3. $\oint_\Gamma \left(\frac{e^z}{z}\right) dz$; Γ es el círculo de radio 2 alrededor de $-3i$.

4. $\oint_\Gamma \frac{\cos(z)}{4+z^2}\, dz$; Γ es el cuadrado de lado de longitud 3 y lados paralelos a los ejes, con centro en $-2i$.

5. $\oint_\Gamma \frac{z+i}{z^2+6}\, dz$; Γ es el cuadrado de lado de longitud 8 y lados paralelos a los ejes, con centro en el origen.

6. $\oint_\Gamma \frac{z-i}{2z+1}\,dz$; Γ es el círculo de radio 1 alrededor del origen.

7. $\oint_\Gamma \frac{z}{\operatorname{senh}^2(z)}\,dz$; Γ es el círculo de radio 1 alrededor de $\frac{1}{2}$.

8. $\oint_\Gamma \frac{\cos(z)}{ze^z}\,dz$; Γ es el círculo de radio $\frac{1}{2}$ alrededor de $\frac{i}{8}$.

9. $\oint_\Gamma \frac{iz}{(z^2+9)(z-i)}\,dz$; Γ es el círculo de radio 2 alrededor de $-3i$.

10. $\oint_\Gamma e^{2/z^2}\,dz$; Γ es el cuadrado con lados paralelos a los ejes y de longitud 3, con centro en $-i$.

11. $\oint_\Gamma \frac{8z-4i+1}{z+4i}\,dz$; Γ es el círculo de radio 2 alrededor de $-i$.

12. $\oint_\Gamma \frac{z^2}{z-1+2i}\,dz$; Γ es el cuadrado de lado de longitud 4 y lados paralelos a los ejes, con centro en $1-2i$.

13. $\oint_\Gamma \coth(z)dz$; Γ es el círculo de radio 2 alrededor de i.

14. $\oint_\Gamma \frac{(1-z)^2}{z^3-8}\,dz$; Γ es el círculo de radio 2 alrededor de 2.

15. $\oint_\Gamma \frac{e^{2z}}{z(z-4i)}\,dz$; Γ es cualquier trayectoria cerrada que encierra a 0 y a $4i$.

16. $\oint_\Gamma \left(\frac{z}{z-1}\right)^2 dz$; Γ es cualquier trayectoria cerrada que encierra a 1.

17. Con h y g como en el problema 14 de la sección 12.1, pruebe que

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g(z)}{h(z)}, z_0\right) = 2\frac{g'(z_0)}{h''(z_0)} - \frac{2}{3}\frac{g(z_0)h^{(3)}(z_0)}{[h''(z_0)]^2}.$$

18. Con h y g como en el problema 15 de la sección 12.1, pruebe que

$$\operatorname{Re}s\left(\frac{g(z)}{h(z)}, z_0\right) = 3\frac{g''(z_0)}{h'''(z_0)} - \frac{3}{10}\frac{g(z_0)h^{(5)}(z_0)}{(h'''(z_0))^2} + 9\left(\frac{g(z_0)h^{(4)}(z_0)}{24} - \frac{g'(z_0)h'''(z_0)}{6}\right)\frac{h^{(4)}(z_0)}{(h'''(z_0))^3}.$$

19. Sean g y h diferenciables en z_0. Suponga que $g(z_0) \neq 0$ y sea h con un cero de orden k en z_0. Pruebe que $g(z)/h(z)$ tiene un polo de orden k en z_0, y

$$\operatorname{Re}s\left(\frac{g(z)}{h(z)}, z_0\right) = \left(\frac{k!}{h^{(k)}(z_0)}\right)^k \times \begin{vmatrix} H_k & 0 & 0 & \cdots & 0 & G_0 \\ H_{k+1} & H_k & 0 & \cdots & 0 & G_1 \\ H_{k+2} & H_{k+1} & H_k & \cdots & 0 & G_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{2k-1} & H_{2k-2} & H_{2k-3} & \cdots & H_{k+1} & G_{k-1} \end{vmatrix},$$

donde

$$H_j = \frac{h^{(j)}(z_0)}{j!} \quad \text{y} \quad G_j = \frac{g^{(j)}(z_0)}{j!}.$$

12.3 Algunas aplicaciones del teorema del residuo

12.3.1 El principio del argumento

El principio del argumento es una fórmula integral para la diferencia entre el número de ceros y el número de polos de una función (contando multiplicidades) encerrada por una trayectoria cerrada Γ dada.

TEOREMA 12.8 *Principio del argumento*

Sea f diferenciable en una trayectoria cerrada Γ y en todos los puntos en el conjunto G de puntos encerrados por Γ, excepto posiblemente en un número finito de polos de f en G. Sea Z el número de ceros de f en G, y P el número de polos de f en G, contando cada polo y cero k veces si su multiplicidad es k. Entonces,

$$\oint_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i(Z-P).$$

Prueba Observe primero que los únicos puntos en G donde f'/f podría tener una singularidad son los ceros y los polos de f en G.

Ahora suponga que f tiene un cero de orden k en z_0 en G. Probará que f'/f debe tener un polo simple en z_0, y que Re $s(f'/f, z_0) = k$. Para ver esto, primero observe que, debido a que z_0 es un cero de orden k,

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$$

mientras $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Entonces, en algún disco abierto alrededor de z_0, el desarrollo de Taylor de $f(z)$ es

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} (z - z_0)^{n+k} \\ &= (z - z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} (z - z_0)^n = (z - z_0)^k g(z), \end{aligned}$$

donde g es diferenciable en z_0 (porque ahí tiene un desarrollo de Taylor) y $g(z_0) = c_k \neq 0$. Ahora, en algún anillo $0 < |z - z_0| < R$,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k(z - z_0)^{k-1} g(z) + (z - z_0)^k g'(z)}{(z - z_0)^k g(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z_0)}.$$

Como $g'(z)/g(z)$ es diferenciable en z_0, entonces $f'(z)/f(z)$ tiene un polo simple en z_0 y Re $s(f'/f, z_0) = k$.

Ahora, suponga que f tiene un polo de orden m en z_1. En algún anillo alrededor de z_0, $f(z)$ tiene desarrollo de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} d_n (z - z_1)^n,$$

con $d_{-m} \neq 0$. Entonces

$$(z - z_1)^m f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} d_n (z - z_1)^{n+m} = \sum_{n=0}^{\infty} d_{n-m} (z - z_1)^n = h(z),$$

con h diferenciable en z_1 y $h(z_1) = c_{-m} \neq 0$. Entonces $f(z) = (z - z_1)^{-m} h(z)$, así en algún anillo alrededor de z_1,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m(z - z_1)^{-m-1} h(z) + (z - z_1)^{-m} h'(z)}{(z - z_1)^{-m} h(z)} = \frac{-m}{z - z_1} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Por tanto, f'/f tiene un polo simple en z_1, con Re $s(f'/f, z_1) = -m$.

Por tanto, la suma de los residuos de $f'(z)/f(z)$ en las singularidades de esta función en G cuenta los ceros de f en G, de acuerdo con su multiplicidad, y el negativo del número de polos de f en G, nuevamente de acuerdo con su multiplicidad. ■

EJEMPLO 12.20

Evalúe $\oint_\Gamma \cot(z)\, dz$, con Γ la trayectoria cerrada de la figura 12.3.

Escriba

$$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\operatorname{sen}(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

donde $f(z) = \operatorname{sen}(z)$. Como f tiene cinco ceros simples y ningún polo encerrado por Γ, el principio del argumento da

$$\oint_\Gamma \cot(z)\, dz = 2\pi i(5 - 0) = 10\pi i. \ ■$$

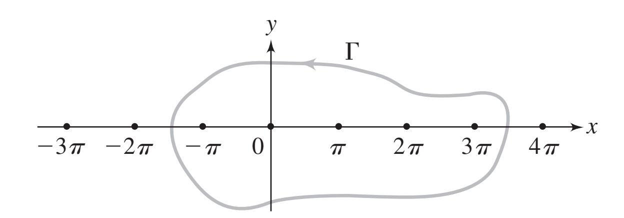


FIGURA 12.3

12.3.2 Una fórmula de inversión para la transformada de Laplace

Si f es una función compleja definida en al menos todo z en $[0, \infty)$, la transformada de Laplace de f es

$$\mathfrak{L}[f](z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t)\, dt,$$

para todo z tal que esta integral esté definida y sea finita. Si $\mathfrak{L}[f] = F$, entonces F es la transformada de Laplace de f, y f es una transformada inversa de Laplace de F. Algunas veces se escribe $f = \mathfrak{L}^{-1}[f]$, aunque esto requiere de condiciones adicionales para la unicidad ya que en general, hay muchas funciones cuya transformada de Laplace es F.

Se da una fórmula para $\mathfrak{L}^{-1}[f]$ en términos de la suma de los residuos de $e^{zt}F(z)$ en los polos de f.

TEOREMA 12.9 *Transformada Inversa de Laplace*

Sea F diferenciable para todo z excepto para un número finito de puntos $z_1, \ldots, z_n$, que son todos los polos de F. Suponga que para algún σ real, F es diferenciable para todo z con $\text{Re}(z) > \sigma$. Suponga también que existen números M y R tales que

$$|zF(z)| \leq M \quad \text{para } |z| > R.$$

Para $t \geq 0$, sea

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} \text{Re}\, s(e^{zt} F(z), z_j).$$

Entonces

$$\mathfrak{L}[f](z) = F(z) \quad \text{para } \text{Re}(z) > \sigma. \blacksquare$$

La condición F es diferenciable para $\text{Re}(z) > \sigma$ significa que $F'(z)$ existe para todo z a la derecha de la recta vertical $x = \sigma$. También se supone que $zF(z)$ es una función acotada para z fuera de un círculo, suficientemente grande, alrededor del origen. Por ejemplo, esta condición la satisface cualquier función racional (cociente de polinomios) en donde el grado del denominador sea mayor que el del numerador.

EJEMPLO 12.21

Sea $a > 0$. Se busca una transformada inversa de Laplace de $F(z) = 1/(a^2 + z^2)$.

Ésta se puede encontrar en tablas de las transformadas de Laplace. Para usar el teorema, F tiene polos simples en $\pm ai$. Calcule

$$\text{Re}\, s\left(\frac{e^{zt}}{a^2 + z^2}, ai\right) = \frac{e^{ati}}{2ai}$$

y

$$\text{Res}\left(\frac{e^{zt}}{a^2+z^2}, -ai\right) = \frac{e^{-ati}}{-2ai}.$$

Una transformada inversa de Laplace de F está dada por

$$f(t) = \frac{1}{2ai}\left(e^{ati} - e^{-ati}\right) = \frac{1}{a}\,\text{sen}(at)$$

para $t \geq 0$. ■

EJEMPLO 12.22

Busque una función cuya transformada de Laplace es

$$F(z) = \frac{1}{(z^2-4)(z-1)^2}.$$

F tiene polos simples en ± 2 y un polo doble en 1. Calcule

$$\text{Res}\left(\frac{e^{zt}}{(z^2-4)(z-1)^2}, 2\right) = \lim_{z\to 2} \frac{e^{zt}}{(z+2)(z-1)^2} = \frac{1}{4}e^{2t},$$

$$\text{Res}\left(\frac{e^{zt}}{(z^2-4)(z-1)^2}, -2\right) = \lim_{z\to -2} \frac{e^{zt}}{(z-2)(z-1)^2} = -\frac{1}{36}e^{-2t},$$

y

$$\text{Res}\left(\frac{e^{zt}}{(z^2-4)(z-1)^2}, 1\right) = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{zt}}{z^2-4}\right)$$

$$= \lim_{z\to 1} e^{zt}\frac{tz^2-4t-2z}{\left(z^2-4\right)^2} = -\frac{1}{3}te^t - \frac{2}{9}e^t.$$

Una transformada inversa de Laplace de F está dada por

$$f(t) = -\frac{1}{3}te^t - \frac{2}{9}e^t + \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{36}e^{-2t},$$

para $t > 2$ (ya que todos los polos de F están en la recta $\text{Re}(z) = 2$ o a su izquierda). ■

En estas secciones podrá ver el desarrollo de un tema. Una variedad de problemas (ceros de funciones, sumas de series, transformadas inversas de Laplace y otros pueden ser resueltos integrando una función compleja debidamente elegida sobre una trayectoria apropiada. La función y la trayectoria deben ser seleccionadas de manera que la integral dé la cantidad que quiere calcular, quizá después de un proceso de límite. Entonces puede usar el teorema del residuo para evaluar explícitamente la integral. Dependiendo del problema, la elección de la función correcta y la trayectoria correcta pueden ser una tarea no trivial, pero al menos este método provee un camino.

12.3.3 Evaluación de integrales reales

Se ilustrará el uso del teorema del residuo en la evaluación de varias clases generales de integrales reales.

Integrales de $\int_0^{2\pi} K(\cos(\theta), \text{sen}(\theta))\, d\theta$ Sea $K(x, y)$ un cociente de polinomios en x y y, por ejemplo,

$$\frac{x^3y - 2xy^2 + x - 2y}{x^4 + x^3}.$$

Si reemplaza x por $\cos(\theta)$ y y por $\text{sen}(\theta)$, obtiene un cociente que involucra sumas de productos de potencias enteras de $\cos(\theta)$ y $\text{sen}(\theta)$. Se busca evaluar integrales de la forma

$$\int_0^{2\pi} K(\cos(\theta), \text{sen}(\theta))\, d\theta.$$

La idea será probar que esta integral real es igual a una integral de cierta función compleja sobre el círculo unitario. Después usará el teorema del residuo para evaluar esta integral compleja, obteniendo el valor de la integral real.

Para llevar a cabo esta estrategia, sea γ el círculo unitario, orientado en sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj, como es usual. Parametrice γ por $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$. En esta curva, $z = e^{i\theta}$ y $\bar{z} = e^{-i\theta} = 1/z$, así

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

y

$$\text{sen}(\theta) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

Más aún, en γ,

$$dz = ie^{i\theta}\, d\theta = iz\, d\theta,$$

así

$$d\theta = \frac{1}{iz}\, dz.$$

Ahora tiene

$$\oint_\gamma K\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{iz}\, dz = \int_0^{2\pi} K(\cos(\theta), \text{sen}(\theta))\frac{1}{ie^{i\theta}}ie^{i\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} K(\cos(\theta), \text{sen}(\theta))\, d\theta.$$

Esto convierte la integral real a evaluar en la integral de la función compleja $f(z)$ sobre el círculo unitario, donde

$$f(z) = K\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{iz}.$$

Use el teorema del residuo para evaluar $\oint_\gamma f(z)dz$, obteniendo

$$\int_0^{2\pi} K(\cos(\theta), \text{sen}(\theta))\, d\theta = 2\pi i \sum_p \text{Re}\, s(f, p). \tag{12.2}$$

La suma de la derecha es sobre todos los polos p de $f(z)$ encerrados por el círculo unitario. Los polos que están fuera del círculo unitario no se incluyen en el cálculo. Finalmente, la ecuación (12.2) supone que $f(z)$ no tiene singularidades en el círculo unitario.

Así que el procedimiento para evaluar $\int_0^{2\pi} K(\cos(\theta), \text{sen}(\theta))\, d\theta$ consiste en calcular $f(z)$, determinar sus polos dentro del círculo unitario, evaluar ahí los residuos y aplicar la ecuación (12.2). Este es un mé-

todo muy poderoso que permite obtener evaluaciones en forma cerrada de integrales para las cuales las técnicas usuales de integración del cálculo real son inadecuadas.

EJEMPLO 12.23

Evalúe

$$\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{2+\cos(\theta)}\, d\theta.$$

La función K en la discusión anterior es

$$K(x, y) = \frac{y^2}{2+x}.$$

El primer paso es reemplazar $x = \cos(\theta)$ con $(z + (1/z))/2$ y $y = \operatorname{sen}(\theta)$ con $(z - (1/z)/2i$, y entonces multiplicar por $1/iz$, para producir la función compleja

$$f(z) = K\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{iz}$$

$$= \frac{[(1/2i)(z-1/z)]^2}{2+\frac{1}{2}(z+1/z)}\frac{1}{iz} = \frac{i}{2}\frac{z^4-2z^2+1}{z^2(z^2+4z+1)}.$$

f tiene un polo doble en 0 y polos simples en los ceros de $z^2 + 4z + 1$, que son $-2+\sqrt{3}$ y $-2-\sqrt{3}$. De estos dos polos simples de f, el primero está encerrado por γ y el segundo no, de manera que descarte $-2-\sqrt{3}$. Por la ecuación (12.2),

$$\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{2+\cos(\theta)}\, d\theta = 2\pi i\left[\operatorname{Re}s(f, 0) + \operatorname{Re}s(f, -2+\sqrt{3})\right].$$

Ahora

$$\operatorname{Re}s(f, 0) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2 f(z)\right] = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\frac{i}{2}\frac{z^4-2z^2+1}{z^2+4z+1}$$

$$= \frac{i}{2}\lim_{z\to 0}\left(2\frac{z^5+6z^4-4z^2-3z+2z^3-2}{\left(z^2+4z+1\right)^2}\right) = -2i$$

y

$$\operatorname{Re}s(f, -2+\sqrt{3}) = \frac{i}{2}\left[\frac{z^4-2z^2+1}{2z(z^2+4z+1)+z^2(2z+4)}\right]_{z=-2+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{i}{2}\frac{42-24\sqrt{3}}{-12+7\sqrt{3}}.$$

Entonces

$$\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{2+\cos(\theta)}\, d\theta = 2\pi i\left[-2i + \frac{i}{2}\frac{42-24\sqrt{3}}{-12+7\sqrt{3}}\right] = \frac{90-52\sqrt{3}}{12-7\sqrt{3}}\pi,$$

aproximadamente 1.68357. ■

Al aplicar este método, si se obtiene un número que no es real, hay que verificar los cálculos, ya que una integral real tiene un valor real.

EJEMPLO 12.24

Evalúe

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\alpha + \beta\cos(\theta)}\, d\theta,$$

donde $0 < \beta < \alpha$.

Como el método desarrollado tiene que ver con integrales sobre $[0, 2\pi]$, primero debe decidir cómo acomodar una integral sobre $[0, \pi]$. Escriba

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\alpha + \beta\cos(\theta)}\, d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1}{\alpha + \beta\cos(\theta)}\, d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{\alpha + \beta\cos(\theta)}\, d\theta.$$

Sea $w = 2\pi - \theta$ en la última integral para obtener

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{\alpha + \beta\cos(\theta)}\, d\theta = \int_{\pi}^{0} \frac{1}{\alpha + \beta\cos(2\pi - w)}(-1)\, dw = \int_0^{\pi} \frac{1}{\alpha + \beta\cos(w)}\, dw.$$

Por tanto,

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\alpha + \beta\cos(\theta)}\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\alpha + \beta\cos(\theta)}\, d\theta,$$

ahora puede concentrarse en la integral sobre $[0, 2\pi]$. Primero obtiene la función

$$f(z) = \frac{1}{\alpha + \frac{\beta}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)}\frac{1}{iz} = \frac{-2i}{\beta z^2 + 2\alpha z + \beta}.$$

f tiene polos simples en

$$z = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\beta}.$$

Como $\alpha > \beta$, estos números son reales. Sólo uno de ellos,

$$z_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\beta},$$

está encerrado por γ. El otro está fuera del disco unitario y es irrelevante para sus propósitos. Entonces

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\alpha + \beta\cos(\theta)}\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\alpha + \beta\cos(\theta)}\, d\theta = \frac{1}{2}2\pi i\, \mathrm{Res}(f, z_1)$$

$$= \pi i \frac{-2i}{2\beta z_1 + 2\alpha} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}. \blacksquare$$

Antes de continuar con otros tipos de integrales reales a evaluar usando el teorema del residuo, hará una breve excursión y verá otra, quizá sorprendente, prueba del teorema fundamental del álgebra. Este argumento se debe originalmente a N. C. Ankeny, y la versión presentada aparece en *Lion Hunting and Other Mathematical Pursuits*, por R. P. Boas (The Mathematical Association of America Dolciani Mathematical Expositions, Vol. 15).

Sea $p(z)$ un polinomio no constante con coeficientes complejos. Busque probar que para algunos números z, $p(z) = 0$.

Primero, suponga que $p(x)$ es real si x es real. Para ver por qué es cierto esto, sea

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,$$

donde $a_n \neq 0$. Denote

$$\overline{p}(z) = \overline{a_0} + \overline{a_1}z + \cdots + \overline{a_n}z^n.$$

Entonces $q(z) = p(z)\overline{p}(z)$ es un polinomio no constante. Más aún, si $z = x$ es real, entonces $\overline{x} = x$ y

$$\begin{aligned} q(x) &= p(x)\overline{p}(x) \\ &= (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)\,(\overline{a_0} + \overline{a_1}x + \cdots + \overline{a_n}x^n) \\ &= (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)\,\left(\overline{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}\right) \\ &= |a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n|^2 \end{aligned}$$

es real. Entonces podría usar $q(z)$ en el argumento en lugar de $p(z)$, ya que $q(z)$ es un polinomio sin ceros cuando $p(z)$ no tiene ceros. Así, suponga que $p(z) \neq 0$ para todo z, y $p(x)$ es real si x es real.

Debido a que $p(x)$ es continuo y nunca vale cero para x real, $p(x)$ debe ser estrictamente positivo o estrictamente negativo para todo x real. Pero entonces

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{p(2\cos(\theta))}\,d\theta \neq 0.$$

Pero, por el método recién discutido, con γ el círculo unitario, se concluye que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{p(2\cos(\theta))}\,d\theta = \oint_\gamma \frac{1}{p(z+1/z)}\frac{1}{iz}\,dz = \frac{1}{i}\oint_\gamma \frac{z^{n-1}}{r(z)}\,dz \neq 0,$$

donde

$$\begin{aligned} r(z) &= z^n p\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ &= z^n\left[a_0 + a_1\left(z+\frac{1}{z}\right) + a_2\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + \cdots + a_n\left(z+\frac{1}{z}\right)^n\right] \\ &= z^n\left[a_0 + a_1\frac{z^2+1}{z} + a_2\frac{(z^2+1)^2}{z^2} + \cdots + a_n\frac{(z^2+1)^n}{z^n}\right]. \end{aligned}$$

De aquí es claro que $r(z)$ es un polinomio. Si $r(\zeta) = 0$ para algún $\zeta \neq 0$, entonces $p(\zeta + 1/\zeta) = 0$, de manera que $\zeta + 1/\zeta$ sería un cero de p, una contradicción. Más aún, $r(0) = a_n \neq 0$ debido a que p tiene grado n. Por tanto, $r(z) \neq 0$ para todo z, de manera que $z^{n-1}/r(z)$ es una función diferenciable para todo z. Pero entonces, por el teorema de Cauchy,

$$\frac{1}{i}\oint_\gamma \frac{z^{n-1}}{r(z)}\,dz = 0,$$

una contradicción. Concluye que $p(z) = 0$ para algún número z, probando el teorema fundamental del álgebra.

Evaluación de $\int_{-\infty}^{\infty}[p(x)/q(x)]\,dx$ Ahora se consideran integrales reales de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx,$$

en donde p y q son polinomios con coeficientes reales y sin factores comunes, q no tiene ceros reales, y el grado de q excede el grado de p por al menos 2. Estas condiciones son suficientes para asegurar la convergencia de esta integral impropia.

Como con la clase anterior de integrales, la estrategia es obtener una integral compleja que sea igual a esta integral real, entonces evaluar la integral compleja usando el teorema del residuo. Para hacer esto,

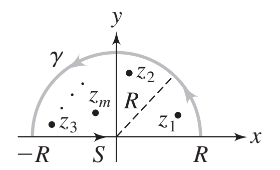


FIGURA 12.4

primero observe que $q(z)$ tiene coeficientes reales, de manera que sus ceros aparecen en pares complejos conjugados. Suponga que los ceros de q son $z_1, \overline{z_1}, z_2, \overline{z_2}, \ldots, z_m, \overline{z_m}$, con cada z_j en el semiplano superior $\operatorname{Im}(z) > 0$ y cada $\overline{z_j}$ en el semiplano inferior $\operatorname{Im}(z) < 0$. Sea Γ la curva mostrada en la figura 12.4, que consiste del semicírculo γ de radio R y el segmento S de $-R$ a R en el eje real, con R suficientemente grande para que Γ encierre todos los polos $z_1, \ldots, z_m$ de $p(z)/q(z)$ en el semiplano superior. Entonces

$$\oint_\Gamma \frac{p(z)}{q(z)}\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Re}s(p/q, z_j) = \int_S \frac{p(z)}{q(z)}\,dz + \int_\gamma \frac{p(z)}{q(z)}\,dz. \tag{12.3}$$

En S, $z = x$ para $-R \le x \le R$, así

$$\int_S \frac{p(z)}{q(z)}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx.$$

Ahora considere la integral sobre γ. Como el grado de $q(z)$ excede el de $p(z)$ por al menos 2,

$$\text{grado de } z^2p(z) \le \text{grado de } q(z).$$

Esto significa que para R suficientemente grande, $z^2p(z)/q(z)$ está acotada para $|z| \ge R$. Esto es, para algún número M,

$$\left|\frac{z^2p(z)}{q(z)}\right| \le M \quad \text{para } |z| \ge R.$$

Entonces

$$\left|\frac{p(z)}{q(z)}\right| \le \frac{M}{|z|^2} \le \frac{M}{R^2} \quad \text{para } |z| \ge R,$$

así

$$\left|\int_\gamma \frac{p(z)}{q(z)}\,dz\right| \le \frac{M}{R^2}\,(\text{longitud de } \gamma)$$

$$= \frac{M}{R^2}(\pi R) = \frac{\pi M}{R} \to 0 \quad \text{conforme } R \to \infty.$$

Así que, en el límite conforme $R \to \infty$ en la ecuación (12.3), la primera integral de la derecha tiene límite $\int_{-\infty}^{\infty}(p(x)/q(x))\,dx$ y la segunda integral tiene límite cero. En el límite conforme $R \to \infty$, la ecuación (12.3) produce

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Re}s\left(\frac{p(z)}{q(z)}, z_j\right). \tag{12.4}$$

La ecuación (12.4) provee un método general para evaluar integrales de funciones racionales sobre la recta real, bajo las suposiciones antes hechas. No es necesario repetir la obtención de esta ecuación cada vez que se usa, simplemente hay que determinar los ceros de $q(z)$ en el semiplano superior, evaluar el residuo de p/q en cada uno de tales ceros (que es un polo de p/q cuyo orden debe ser determinado), y aplicar la ecuación (12.4).

EJEMPLO 12.25

Evalúe

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+64}\,dx.$$

Aquí $p(z) = 1$ y $q(z) = z^6 + 64$. El grado de q excede al de p por 6, y q no tiene ceros reales. Los ceros de $z^6 + 64$ son las raíces sextas de -64. Para encontrarlas, escriba -64 en la forma polar:

$$-64 = 64e^{i(\pi+2n\pi)},$$

en donde n puede ser cualquier entero. Las raíces sextas de -64 son

$$2e^{i(\pi+2n\pi)/6} \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Las tres raíces en el semiplano superior son

$$z_1 = 2e^{\pi i/6}, z_2 = 2e^{\pi i/2} = 2i \quad \text{y} \quad z_3 = 2e^{5\pi i/6}.$$

Necesita el residuo de $1/(z^6 + 64)$ en cada uno de estos polos simples. Es conveniente usar aquí el corolario 12.1:

$$\operatorname{Re}s\left(\frac{1}{z^6+64}, 2e^{\pi i/6}\right) = \frac{1}{6(2e^{\pi i/6})^5} = \frac{1}{192}e^{-5\pi i/6},$$

$$\operatorname{Re}s\left(\frac{1}{z^6+64}, 2i\right) = \frac{1}{6(2i)^5} = -\frac{i}{192},$$

y

$$\operatorname{Re}s\left(\frac{1}{z^6+64}, 2e^{5\pi i/6}\right) = \frac{1}{6(2e^{5\pi i/6})^5} = \frac{1}{192}e^{-25\pi i/6} = \frac{1}{192}e^{-\pi i/6}.$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+64}\,dx = \frac{2\pi i}{192}\left[e^{-5\pi i/6} - i + e^{-\pi i/6}\right]$$
$$= \frac{\pi i}{96}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - i\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) - i + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right].$$

Ahora

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$$

y

$$\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$$

así

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+64}\,dx = \frac{\pi i}{96}(-2i) = \frac{\pi}{48}. \blacksquare$$

Integrales de $\int_{-\infty}^{\infty}[p(x)/q(x)]\cos(cx)\,dx$ **y** $\int_{-\infty}^{\infty}[p(x)/q(x)]\,\mathrm{sen}(cx)\,dx$ Suponga que p y q son polinomios con coeficientes reales y sin factores comunes, que el grado de q excede al grado de p por lo menos en 2, y que q no tiene ceros reales. Busque evaluar las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\cos(cx)\,dx \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{sen}(cx)\,dx,$$

en donde c es cualquier número positivo.

Nuevamente, proceda buscando la integral de una función compleja convenientemente elegida sobre una curva cerrada apropiadamente elegida. Considere

$$\oint_{\Gamma}\frac{p(z)}{q(z)}e^{icz}\,dz,$$

donde Γ es la trayectoria cerrada de la subsección anterior, que encierra todos los ceros $z_1, \ldots, z_m$ de q que están en el semiplano superior. He aquí por qué esta integral es prometedora. Con Γ consistente en el semicírculo γ y el segmento S en el eje real, como antes, se tiene

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma}\frac{p(z)}{q(z)}e^{icz}\,dz &= \int_{\gamma}\frac{p(z)}{q(z)}e^{icz}\,dz + \int_{-R}^{R}\frac{p(x)}{q(x)}e^{icx}\,dx\\ &= \oint_{\gamma}\frac{p(z)}{q(z)}e^{icz}\,dz + \int_{-R}^{R}\frac{p(x)}{q(x)}\cos(cx)\,dx + i\int_{-R}^{R}\frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{sen}(cx)\,dx\\ &= 2\pi i\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Re}\,s\left(\frac{p(z)}{q(z)}e^{icz}, z_j\right).\end{aligned}$$

Conforme $R \to \infty$, uno puede probar que $\int_{\gamma}[p(z)/q(z)]e^{icz}\,dz \to 0$, dejando

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\cos(cx)\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{sen}(cx)\,dx = 2\pi i\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Re}\,s\left(\frac{p(z)}{q(z)}e^{icz}, z_j\right). \tag{12.5}$$

La parte real del lado derecho de la ecuación (12.5) es $\int_{-\infty}^{\infty}[p(x)/q(x)]\cos(cx)\,dx$, y la parte imaginaria es $\int_{-\infty}^{\infty}[p(x)/q(x)]\,\mathrm{sen}(cx)\,dx$.

EJEMPLO 12.26

Evalúe

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(cx)}{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)}\,dx,$$

en donde c, α y β son números positivos y $\alpha \neq \beta$.

Los ceros del denominador en el semiplano superior son αi y βi, y éstos son polos simples de

$$f(z) = \frac{e^{icz}}{(z^2+\alpha^2)(z^2+\beta^2)}.$$

Calcule

$$\mathrm{Re}\,s(f, \alpha i) = \frac{e^{ic\alpha i}}{2\alpha i(\beta^2-\alpha^2)} = \frac{e^{-c\alpha}}{2\alpha i(\beta^2-\alpha^2)}$$

y

$$\mathrm{Re}\,s(f, \beta i) = \frac{e^{-c\beta}}{2\beta i(\alpha^2-\beta^2)}.$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(cx)}{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)}\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(cx)}{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)}\,dx$$

$$= 2\pi i\left[\frac{e^{-c\alpha}}{2\alpha i(\beta^2-\alpha^2)} + \frac{e^{-c\beta}}{2\beta i(\alpha^2-\beta^2)}\right] = \frac{\pi}{\beta^2-\alpha^2}\left(\frac{e^{-c\alpha}}{\alpha} - \frac{e^{-c\beta}}{\beta}\right).$$

Separando las partes real e imaginaria, tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(cx)}{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)}\,dx = \frac{\pi}{\beta^2-\alpha^2}\left(\frac{e^{-c\alpha}}{\alpha} - \frac{e^{-c\beta}}{\beta}\right)$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(cx)}{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)}\,dx = 0.$$

Lo último es obvio ya que el integrando es una función impar. ■

Integrales usando contornos dentados La ecuación (12.4) permite evaluar ciertas integrales impropias de cocientes de polinomios, suponiendo que el denominador no tiene ceros reales. Extienda este resultado al caso en que el denominador tenga ceros simples reales. Considere

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$$

en donde p y q son polinomios con coeficientes reales y sin factores comunes y el grado de q excede al de p por al menos 2. Suponga que q tiene ceros complejos $z_1, \ldots, z_m$ en el semiplano superior así como ceros simples reales $t_1, \ldots, t_k$.

Sea Γ la trayectoria de la figura 12.5, que incluye el semicírculo γ de radio R alrededor del origen, los semicírculos pequeños γ_j de radio ϵ con centro en cada cero real t_j, y los segmentos L_j a lo largo de la recta real que conectan estos semicírculos, como se muestra. A una trayectoria de este tipo se le llama trayectoria *dentada* debido a los semicírculos pequeños alrededor de los ceros reales de $q(x)$. Sea ϵ suficientemente pequeño para que los semidiscos determinados por γ_j y γ_k no se corten si $j \neq k$, y ningún z_j esté encerrado en ninguna γ_k. También suponga que R es suficientemente grande para que Γ encierre a todos los z_j. Observe que cada t_j está fuera de Γ.

Por el teorema del residuo,

$$\oint_{\Gamma} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz = 2\pi i \sum_{j=1} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}, z_j\right)$$

$$= \int_{\gamma} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz + \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz + \sum_{j=1}^{k+1} \int_{L_j} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx. \qquad (12.6)$$

Investigue qué pasa en la ecuación (12.6) cuando $R \to \infty$ y $\epsilon \to 0$.

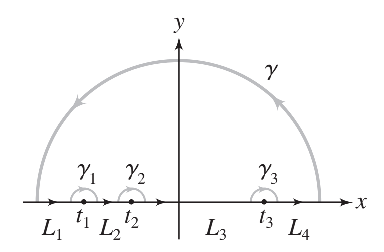


FIGURA 12.5

Cuando $R \to \infty$, se afirma que $\int_\gamma [p(z)/q(z)]\,dz \to 0$ por un argumento como el anterior. La suma de los residuos en los ceros de q no cambia en este límite.

Conforme $\epsilon \to 0$, los semicírculos γ_j se contraen en t_j, y los segmentos L_j se expanden para cubrir el intervalo $[-R, R]$ y después toda la recta real conforme $R \to \infty$. Esto significa que en la ecuación (12.6),

$$\sum_{j=1}^{k+1} \int_{L_j} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$$

Todavía no es claro qué pasa, en este proceso, con cada integral $\int_{\gamma_j} [p(z)/q(z)]\,dz$. Se probará que cada una de estas integrales se aproxima a πi veces el residuo de $p(z)/q(z)$ en el polo real simple t_j.

Para ver esto, escriba el desarrollo de Laurent de $p(z)/q(z)$ alrededor de t_j:

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{c_{-1}}{z - t_j} + \sum_{s=0}^{\infty} c_s (z - t_j)^s = \frac{c_{-1}}{z - t_j} + g(z),$$

donde g es diferenciable en t_j. En γ_j, $z = t_j + \epsilon e^{it}$, donde t varía de π a 0 (para la orientación en sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj en Γ). Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_j} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz &= c_{-1} \int_{\gamma_j} \frac{1}{z - t_j}\,dz + \int_{\gamma_j} g(z)\,dz \\
&= c_{-1} \int_{\pi}^{0} \frac{1}{\epsilon e^{it}} i\epsilon e^{it}\,dt + \int_{\pi}^{0} g(t_j + \epsilon e^{it}) i\epsilon e^{it}\,dt \\
&= -\pi i c_{-1} + i\epsilon \int_{\pi}^{0} g(t_j + \epsilon e^{it}) e^{it}\,dt \\
&= -\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}, t_j\right) + i\epsilon \int_{\pi}^{0} g(t_j + \epsilon e^{it}) e^{it}\,dt.
\end{aligned}$$

Ahora $i\epsilon \int_\pi^0 g(t_j + \epsilon e^{it})e^{it}\,dt \to 0$ conforme $\epsilon \to 0$. Por tanto,

$$\int_{\gamma_j} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz \to -\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}, t_j\right).$$

Por tanto, conforme $R \to \infty$ y $\epsilon \to 0$ en la ecuación (12.6), obtiene

$$2\pi i \sum_{j=1} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}, z_j\right) = -\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}, t_j\right) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx,$$

de donde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}, t_j\right) + 2\pi i \sum_{j=1} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}, z_j\right). \qquad (12.7)$$

En un sentido, los polos simples de $p(z)/q(z)$ en la recta real contribuyen como “medios residuos”, siendo encerrados por semicírculos en lugar de círculos, mientras que los polos en el semiplano superior contribuyen como “residuos completos” en esta suma.

EJEMPLO 12.27

Evaluar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x+2}{x(x-4)(x^2+9)}.$$

Aquí

$$f(z) = \frac{3z+2}{z(z-4)(z^2+9)}.$$

El denominador tiene ceros reales simples en 0 y 4 y ceros complejos simples $-3i$ y $3i$. Sólo $3i$ está en el semiplano superior. Calcule los residuos:

$$\mathrm{Re}\, s(f, 0) = \lim_{z\to 0} zf(z) = \frac{2}{-36} = -\frac{1}{18},$$

$$\mathrm{Re}\, s(f, 4) = \lim_{z\to 4} (z-4)f(z) = \frac{14}{100} = \frac{7}{50}$$

y

$$\mathrm{Re}\, s(f, 3i) = \lim_{z\to 3i} (z-3i)f(z) = \frac{9i+2}{3i(3i-4)(6i)} = \frac{2+9i}{72-54i}.$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x+2}{x(x-4)(x^2+9)} = \pi i\left(-\frac{1}{18}+\frac{7}{50}\right) + 2\pi i\left(\frac{2+9i}{72-54i}\right) = -\frac{14}{75}\pi.$$

Integrales $\int_0^\infty x^a[p(x)/q(x)]\,dx$ Sea $0 < a < 1$. Se consideran integrales de la forma

$$\int_0^\infty x^a \frac{p(x)}{q(x)}\,dx,$$

en donde p y q son polinomios con coeficientes reales y sin factores comunes, q no tiene ceros positivos, y el grado de q excede el grado de p por lo menos en 1. También se supone que $q(0) \neq 0$ o $q(z)$ tiene un cero simple en el origen.

Sean $z_1, \ldots, z_m$ los ceros distintos de cero de q. Estos son todos los ceros distintos de cero de q, no sólo aquellos que están en el semiplano superior. Como los coeficientes de q son reales, esta lista incluye los pares complejos conjugados.

Elija r suficientemente pequeño y R suficientemente grande, para que, la trayectoria cerrada Γ, que se muestra en la figura 12.6, encierre a $z_1, \ldots, z_m$. Γ consiste en γ_R ("la mayor parte" del círculo de radio R alrededor de 0), γ_r ("la mayor parte" del círculo de radio r alrededor de 0), y los segmentos de recta L_1 y L_2 que conectan γ_r y γ_R. Al final se hará $r \to 0$ y $R \to \infty$, pero antes se requiere de cierto trabajo.

Habrá que definirse el significado de z^a, ya que este símbolo generalmente denota un conjunto (posiblemente infinito) de números distintos. Escriba $z = \rho e^{i\theta}$ para algún θ en $[0, 2\pi)$ y defina

$$z^a = \rho^a e^{ia\theta}.$$

Conforme z se acerca a L_1,

$$f(z) = \frac{z^a p(z)}{q(z)} \to \frac{x^a p(x)}{q(x)},$$

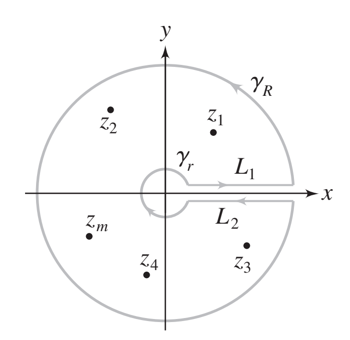


FIGURA 12.6

donde $r < x < R$. Pero conforme z se acerca a L_2, el lado inferior del eje real positivo,

$$f(z) \to \frac{x^a e^{2\pi ai} p(x)}{q(x)}.$$

La razón para esto es que el argumento crece en 2π conforme z se acerca desde abajo, al eje positivo real, y entonces

$$z^a = \rho^a e^{i(\theta+2\pi)a} = \rho^a e^{ia\theta} e^{2\pi ai}.$$

Por el teorema del residuo,

$$\oint_\Gamma \frac{z^a p(z)}{q(z)}\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Re} s(f, z_j)$$
$$= \int_{\gamma_R} \frac{z^a p(z)}{q(z)}\, dz + \int_{\gamma_r} \frac{z^a p(z)}{q(z)}\, dz + \int_{L_1} \frac{x^a p(x)}{q(x)}\, dx + \int_{L_2} \frac{x^a e^{2\pi ai} p(x)}{q(x)}\, dx.$$

En L_1, x varía de r a R, mientras en L_2, x varía de R a r para mantener la orientación, en sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj, en Γ. La última ecuación se convierte en

$$2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Re} s(f, z_j) = \int_{\gamma_R} \frac{z^a p(z)}{q(z)}\, dz + \int_{\gamma_r} \frac{z^a p(z)}{q(z)}\, dz$$
$$+ \int_r^R \frac{x^a p(x)}{q(x)}\, dx + \int_R^r \frac{x^a e^{2\pi ai} p(x)}{q(x)}\, dx.$$

Haciendo una estimación en los dos arcos circulares, puede probar que las primeras dos integrales en la última ecuación tienden a cero conforme $r \to 0$ y $R \to \infty$. En este límite, la última ecuación se vuelve

$$2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Re} s(f, z_j) = \int_0^\infty \frac{x^a p(x)}{q(x)}\, dx + \int_\infty^0 \frac{x^a e^{2\pi ai} p(x)}{q(x)}\, dx.$$

A partir de esto obtiene

$$\int_0^\infty \frac{x^a p(x)}{q(x)}\, dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi ai}} \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Re} s(f, z_j). \tag{12.8}$$

EJEMPLO 12.28

Use la ecuación (12.8) para evaluar

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{1/3}}{x(x^2+1)}\,dx.$$

Aquí $p(z) = 1$, $a = \frac{1}{3}$ y $q(z) = z(1 + z^2)$, con ceros simples en 0, i y $-i$. Calcule

$$\operatorname{Re}s\left(\frac{z^{1/3}}{q(z)}, i\right) = \frac{i^{1/3}}{2i^2} = \frac{(e^{\pi i/2})^{1/3}}{-2} = -\frac{1}{2}e^{\pi i/6}$$

y

$$\operatorname{Re}s\left(\frac{z^{1/3}}{q(z)}, -i\right) = \frac{(e^{3\pi i/2})^{1/3}}{-2} = -\frac{1}{2}e^{\pi i/2}.$$

Entonces

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{1/3}}{x(x^2+1)}\,dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i/3}}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(e^{\pi i/6}+e^{\pi i/2}\right)$$

$$= \frac{-\pi i}{1+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i+i\right) = \pi. \blacksquare$$

Muchas otras clases de integrales pueden ser evaluadas usando las técnicas de las integrales complejas. Algunas de éstas requieren de un ingenio considerable en la búsqueda de la función correcta para integrarlas sobre una trayectoria elegida para obtener el resultado que se quiere.

El valor principal de Cauchy Como ha estado tratando con integrales impropias, es conveniente mencionar el valor principal de Cauchy.

Una integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx$$

se define como

$$\lim_{r\to-\infty}\int_r^0 g(x)\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_0^R g(x)\,dx,$$

si ambas integrales convergen. Estos límites son independientes uno del otro.

El *valor principal de Cauchy* de I se define como

$$\text{VPC}\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx\right) = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} g(x)\,dx.$$

Este es un caso especial de los dos límites independientes que definen I.

En el caso en que $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$ converja, indudablemente el valor de I coincide con el valor principal de Cauchy de la integral. Sin embargo, es posible que una integral tenga VPC finito pero ser divergente en el sentido extenso de la definición de I. Esto ocurre con $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$, la cual ciertamente diverge. Sin embargo, esta integral tiene un valor principal de Cauchy de 0, ya que para cualquier positivo R,

$$\int_{-R}^{R} x\,dx = 0.$$

En algunos de los ejemplos discutidos, se han calculado los valores principales de Cauchy siempre que se tomó el límite de $\int_{-R}^{R} g(x)\,dx$ conforme $R \to \infty$. En estos ejemplos las condiciones impuestas aseguran que la integral impropia converge en el sentido más general.

SECCIÓN 12.3 PROBLEMAS

1. Evalúe $\oint_\Gamma \frac{z}{1+z^2}\,dz$, con Γ el círculo $|z| = 2$, primero usando el teorema del residuo y después por el principio del argumento.

2. Evalúe $\oint_\Gamma \tan(z)\,dz$, con Γ el círculo $|z| = \pi$, primero usando el teorema del residuo y después por el principio del argumento.

3. Evalúe $\oint_\Gamma \frac{z+1}{z^2+2z+4}\,dz$, con Γ el círculo $|z| = 1$, primero usando el teorema del residuo y después por el principio del argumento.

4. Sean $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$, con $z_1, \ldots, z_n$ números complejos distintos. Sea Γ una trayectoria cerrada orientada positivamente que encierra cada uno de los z_j. Pruebe que

$$\oint_\Gamma \frac{p'(z)}{p(z)}\,dz = 2\pi i n,$$

primero usando el teorema del residuo y después por el principio del argumento.

En cada problema del 5 al 9, encuentre una transformada inversa de Laplace de la función, usando residuos.

5. $\frac{z}{z^2+9}$

6. $\frac{1}{(z+3)^2}$

7. $\frac{1}{(z-2)^2(z+4)}$

8. $\frac{1}{(z^2+9)(z-2)^2}$

9. $(z+5)^{-3}$

En cada problema del 10 al 22, evalúe la integral.

10. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{6+\operatorname{sen}(\theta)}\,d\theta$

11. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2-\cos(\theta)}\,d\theta$

12. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx$

13. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1}\,dx$

14. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-2x+6}\,dx$

15. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\operatorname{sen}(2x)}{x^4+16}\,dx$

16. $\int_0^{2\pi} \frac{2\operatorname{sen}(\theta)}{2+\operatorname{sen}^2(\theta)}\,d\theta$

17. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x(x+4)(x^2+16)}\,dx$

18. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2-4x+5}\,dx$

19. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2(x)}{(x^2+4)^2}\,dx$

20. $\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}(\theta)+\cos(\theta)}{2-\cos(\theta)}\,d\theta$

21. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-4)(x^5+1)}\,dx$

22. $\int_0^{\infty} \frac{x^{3/4}}{x^4+1}\,dx$

23. Sea α un número positivo. Pruebe que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-\alpha}.$$

24. Sean α y β un número positivo. Pruebe que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2+\beta^2}\,dx = \frac{\pi}{2\beta^3}(1+\alpha\beta)e^{-\alpha\beta}.$$

25. Sean α y β números positivos distintos. Pruebe que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\alpha^2\cos^2(\theta)+\beta^2\operatorname{sen}^2(\theta)}\,d\theta = \frac{2\pi}{\alpha\beta}.$$

26. Sea α un número positivo. Pruebe que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\alpha+\operatorname{sen}^2(\theta)}\,d\theta = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha(1+\alpha)}}.$$

27. Sea β un número positivo. Pruebe que

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos(2\beta x)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\beta^2}.$$

Sugerencia: Integre e^{-z^2} alrededor de la trayectoria rectangular con vértices $\pm R$ y $\pm R + \beta i$. Use el teorema de Cauchy para evaluar esta integral, igualar esto a la suma

de las integrales en los lados del rectángulo, y tomar el límite conforme $R \to \infty$. Suponga el resultado estándar que

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

28. Obtenga las *integrales de Fresnel*:

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\, dx = \int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Sugerencia: Integre e^{iz^2} sobre la trayectoria cerrada acotando el sector $0 \le x \le R$, $0 \le \theta \le \pi/4$, que se muestra en la figura 12.7. Use el teorema de Cauchy para evaluar esta integral, después evaluarla como la suma de las integrales sobre los segmentos frontera del sector. Use el lema de Jordan para probar que la integral sobre el arco circular tiende a cero conforme $R \to \infty$, y use las integrales sobre los segmentos de recta par obtener las integrales de Fresnel.

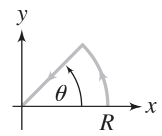


FIGURA 12.7

29. Sean α y β números positivos. Pruebe que

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen}(\alpha x)}{x^4 + \beta^4}\, dx = \frac{\pi}{2\beta^2} e^{-\alpha\beta/\sqrt{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha\beta}{\sqrt{2}}\right).$$

30. Sea $0 < \beta < \alpha$. Pruebe que

$$\int_0^\pi \frac{1}{(\alpha + \beta\cos(\theta))^2}\, d\theta = \frac{\alpha\pi}{(\alpha^2 - \beta^2)^{3/2}}.$$

CAPÍTULO 13

Mapeos conformes

En el cálculo de funciones reales de una sola variable real, es factible entender más del comportamieto de una función si hace un esbozo de su gráfica. Para funciones complejas no puede hacer el mismo tipo de gráficas, ya que una variable compleja $z = x + iy$ por sí misma tiene dos variables. Sin embargo, sí le es posible establecer $w = f(z)$ y hacer dos copias del plano complejo, una para z y la otra para los puntos imagen w. Conforme z traza una trayectoria o varía sobre un conjunto S en el plano z, trace los puntos imagen $w = f(z)$ en el plano w, obteniendo una figura de cómo actúa la función en esta trayectoria o en los puntos en S. El conjunto de todos los puntos imagen $f(z)$ para z en S es denotado por $f(S)$. A una función de esta manera, se le llama *mapeo* o *transformación*. En la figura 13.1 hay un diagrama con esta idea.

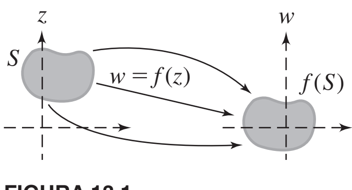


FIGURA 13.1

Pensar en una función como un mapeo puede ser una herramienta poderosa en la resolución de cierta clase de problemas, incluyendo el análisis del movimiento de fluidos y la solución de ecuaciones diferenciales parciales, en particular los problemas de Dirichlet. Ahora se desarrollarán algunas ideas sobre los mapeos, después las aplicaciones.

13.1 Funciones como mapeos

Primero necesita alguna terminología. Sea f una función compleja y D un conjunto de puntos en el plano donde está definida $f(z)$. Sea D^* también un conjunto de números complejos.

DEFINICIÓN 13.1

1. f mapea D en D^* si $f(z)$ está en D^* para todo z en D. En este caso, escriba $f : D \to D^*$.
2. f mapea D sobre D^* si $f(z)$ está en D^* para todo z en D y, recíprocamente, si w está en D^*, entonces existe algún z en D tal que $w = f(z)$. f es un mapeo *sobre*.

Así, $f : D \to D^*$ es sobre si todo punto de D^* es la imagen bajo f de algún punto en D.

EJEMPLO 13.1

Sea $f(z) = iz$ para $|z| \leq 1$. Entonces f actúa sobre los puntos del disco unitario cerrado $D : |z| \leq 1$. Si z está en D, entonces $|f(z)| = |iz| = |z| \leq 1$, de manera que la imagen de cualquier punto de este disco está en el mismo disco. Aquí f mapea D en D (así $D^* = D$ en la definición).

Este mapeo es sobre. Si w está en D, entonces $z = w/i$ también está en D, y

$$f(z) = f(w/i) = i(w/i) = w.$$

Todo punto en el disco unitario es la imagen de algún punto del disco bajo este mapeo.

Puede ver este mapeo geométricamente. Como $i = e^{i\pi/2}$, si $z = re^{i\theta}$, entonces

$$f(z) = iz = re^{i\pi/2}e^{i\theta} = re^{i(\theta+\pi/2)},$$

de manera que a cada z, f le suma $\pi/2$ a su argumento. Esto gira la recta que va del origen a z un ángulo de $\pi/2$ radianes en sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj. La acción de f en z puede verse en la figura 13.2. Como esta función es simplemente una rotación de $\pi/2$ radianes, en sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj, es claro por qué f mapea el disco unitario sobre él mismo. ■

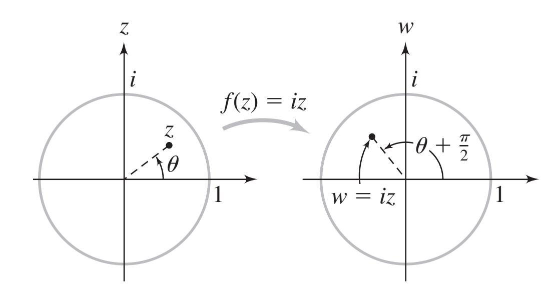


FIGURA 13.2 *El mapeo $f(z) = iz$ para $|z| \leq 1$.*

Frecuentemente se tiene la función f y el conjunto D de números complejos a los cuales se busca aplicar este mapeo. Entonces debe analizar $f(z)$ para determinar la imagen de D bajo el mapeo. En efecto, está encontrando D^* de manera que f sea un mapeo de D sobre D^*.

EJEMPLO 13.2

Sea $f(z) = z^2$ para z en la cuña D que se muestra en la figura 13.3. D consiste en todos los números complejos en o entre el eje real no negativo y la recta $y = x$.

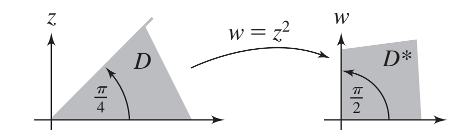


FIGURA 13.3 $w = z^2$ *mapea D uno a uno sobre D*.*

En la forma polar, $z = re^{i\theta}$ está en D si $0 \leq \theta \leq \pi/4$. Entonces $f(z) = z^2 = r^2e^{2i\theta}$, de manera que f tiene el efecto de elevar al cuadrado la magnitud de z y duplicar su argumento. Si z tiene un argumento entre 0 y $\pi/4$, entonces z^2 lo tiene entre 0 y $\pi/2$. Esto abre la cuña D para cubrir todo el primer cuadrante del plano, que consiste en los puntos en o entre el eje real no negativo y el imaginario. Si llama D^* a este cuarto de plano derecho, entonces f mapea D sobre D^*. ■

Algunas funciones mapean más de un punto a la misma imagen. Por ejemplo, $f(z) = \text{sen}(z)$ mapea todos los enteros múltiplos de π en cero. Si cada punto imagen proviene de exactamente un punto, entonces el mapeo se llama *uno a uno*.

DEFINICIÓN 13.2

Un mapeo $f : D \to D^*$ es uno a uno si puntos distintos de D se mapean en puntos distintos en D^*.

Así f es uno a uno (o $1 - 1$) si $z_1 \neq z_2$ implica que $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Las nociones de uno a uno y sobre son independientes una de la otra. Un mapeo puede tener una de estas propiedades, ambas, o ninguna. El mapeo $f(z) = z^2$ del ejemplo 13.2 mapea la cuña $0 \leq \arg(z) \leq \pi/4$ de una manera uno a uno sobre el primer cuadrante del plano. Sin embargo, $f(z) = z^2$ no mapea todo el plano complejo de manera uno a uno, ya que $f(-z) = f(z)$. Esta función mapea el plano sobre sí mismo, ya que, dado cualquier número complejo w, existe algún z tal que $f(z) = z^2 = w$.

EJEMPLO 13.3

Sea $h(z) = z^2$ para todo z. h mapea todo el plano sobre sí mismo pero no es uno a uno.

Si $z = x + iy$, entonces

$$h(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = u + iv,$$

donde $u = x^2 - y^2$ y $v = 2xy$. Use esta información para determinar la imagen bajo f de una recta vertical $x = a$. Cualquier punto en esta recta tiene la forma $z = a + iy$, y se mapea en

$$h(a + iy) = u + iv = a^2 - y^2 + 2iay.$$

Los puntos en la recta $x = a$ se mapean en puntos (u, v) con $u = a^2 - y^2$ y $v = 2ay$. Escriba $y = v/2a$ (suponiendo que $a \neq 0$) para obtener

$$u = a^2 - \frac{v^2}{4a^2}$$

o

$$v^2 = 4a^2(a^2 - u),$$

la ecuación de una parábola en el plano uv. h mapea rectas verticales $x = a \neq 0$ en parábolas.

Si $a = 0$, la recta vertical $x = a$ es el eje imaginario, que consiste en los puntos $z = iy$. Ahora $h(z) = -y^2$, de manera que h mapea el eje imaginario del plano xy en la parte no positiva del eje real en el plano uv.

La figura 13.4 muestra la imagen parabólica de una recta $x = a \neq 0$. Cuanto más grande sea a, más abre la parábola a la izquierda (cortando el eje v más lejos del origen). Conforme se elige a pequeña, cercana a 0, estas parábolas se vuelven "cerradas," aproximándose al eje real no positivo en el plano uv.

Una recta horizontal $y = b$ consistente en los puntos $z = x + ib$, se mapea en

$$h(z) = (x + ib)^2 = x^2 - b^2 + 2ixb = u + iv.$$

Ahora $u = x^2 - b^2$ y $v = 2xb$, de manera que, para $b \neq 0$,

$$v^2 = 4b^2(b^2 + u).$$

En la figura 13.5 se muestra una parábola típica, abriendo hacia la derecha. Estas parábolas también abren más conforme b es más grande. Si $b = 0$, la recta $y = b$ es el eje real en el plano z, y ésta se mapea en $h(x) = x^2$, dando el eje real no negativo en el plano uv conforme x toma todos los valores reales. ■

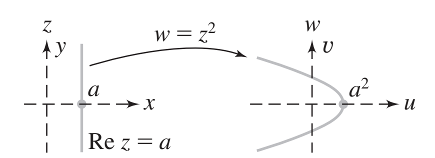


FIGURA 13.4 $w = z^2$ *mapea rectas verticales en parábolas que abren a la izquierda.*

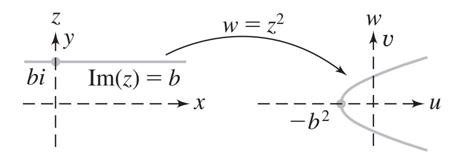


FIGURA 13.5 $w = z^2$ *mapea rectas horizontales en parábolas que abren a la derecha.*

EJEMPLO 13.4

Vea la función exponencial $w = E(z) = e^z$ como un mapeo. Escriba

$$w = u + iv = e^{x+iy} = e^x \cos(y) + ie^x \operatorname{sen}(y),$$

así

$$u = e^x \cos(y) \quad \text{y} \quad v = e^x \operatorname{sen}(y).$$

Como un mapeo de todo el plano en él mismo, E no es sobre (ningún número se mapea al cero), y E tampoco es uno a uno (todos los puntos $z + 2n\pi i$ tienen la misma imagen, para cualquier entero n).

Considere la recta vertical $x = a$ en el plano xy. La imagen de esta recta consiste en los puntos $u + iv$ con

$$u = e^a \cos(y), \quad v = e^a \operatorname{sen}(y).$$

Entonces

$$u^2 + v^2 = e^{2a},$$

de manera que la recta $x = a$ se mapea en el círculo de radio e^a alrededor del origen en el plano uv. De hecho, conforme el punto $z = a + iy$ se mueve a lo largo de esta recta vertical, el punto imagen $u + iv$ da una vuelta completa alrededor del círculo conforme y varía sobre un intervalo de longitud 2π, ya que $\cos(y + 2n\pi) = \cos(y)$ y $\operatorname{sen}(y + 2n\pi) = \operatorname{sen}(y)$. Por tanto, puede pensar en una recta vertical como un número infinito de intervalos de longitud 2π uno detrás de otro, y a la función exponencial envolviendo cada segmento una vez alrededor del círculo $u^2 + v^2 = e^{2a}$ (figura 13.6).

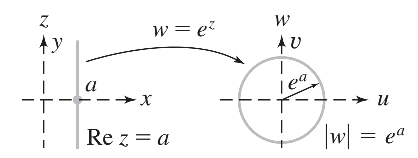


FIGURA 13.6 *$w = e^z$ envuelve una recta vertical alrededor de un círculo cubriendo el círculo una vez por cada intervalo de longitud 2π.*

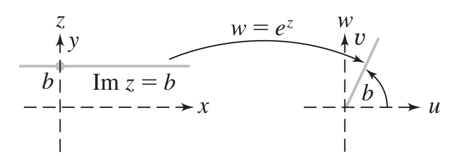


FIGURA 13.7 *$w = e^z$ mapea rectas horizontales en semirrayos desde el origen.*

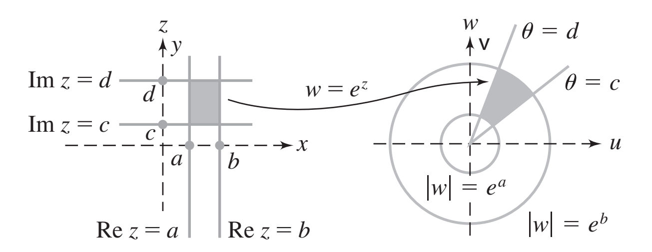


FIGURA 13.8 *$w = e^z$ mapea el rectángulo mostrado en una cuña acotada por dos semirrayos y dos círculos.*

La imagen de un punto $z = x + ib$ en la recta horizontal $y = b$ es un punto $u + iv$ con

$$u = e^x \operatorname{sen}(b), \quad y = e^x \cos(b).$$

Conforme x varía sobre la recta real, e^x varía de 0 a ∞ sobre el eje real positivo. El punto (e^x sen(b), e^x cos(b)) se mueve a lo largo de una semirecta desde el origen hacia infinito, formando un ángulo de b radianes con el eje real positivo (figura 13.7). En coordenadas polares, esta semirecta es $\theta = b$.

Usando estos resultados, se encuentra la imagen de cualquier rectángulo en el plano xy, con lados paralelos a los ejes. Considere al rectángulo con lados en las rectas $x = a$, $x = b$, $y = c$ y $y = d$ (en el plano xy en la figura 13.8). Estas rectas se mapean, respectivamente, en los círculos

$$u^2 + v^2 = e^{2a}, \quad u^2 + v^2 = e^{2b}$$

y las semirectas

$$\theta = c \quad \text{y} \quad \theta = d.$$

La cuña en el plano uv en la figura 13.8 es la imagen del rectángulo bajo este mapeo exponencial. ■

Dado un mapeo f y un dominio D, se muestra una estrategia que usualmente es útil para determinar $f(D)$. Suponga que D tiene una frontera formada por curvas $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Encontrar las imágenes de estas curvas, $f(\gamma_1), \ldots, f(\gamma_n)$. Éstas forman curvas en el plano w, acotando a dos conjuntos, etiquetados como I y II en la figura 13.9. $f(D)$ es uno de estos dos conjuntos. Para determinar cuál es, elija un punto cualquiera ζ en D y localice $f(\zeta)$. Este punto estará en $f(D)$.

EJEMPLO 13.5

Se determinará la imagen, bajo el mapeo $w = f(z) = \operatorname{sen}(z)$, de la franja S que consiste en todo z con $-\pi/2 < \operatorname{Re}(z) < \pi/2$ e $\operatorname{Im}(z) > 0$. En la figura 13.10 se muestra S.

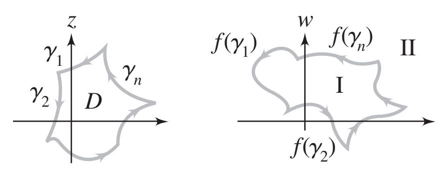


FIGURA 13.9

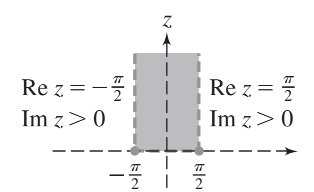


FIGURA 13.10 *Banda acotada por las rectas verticales $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$ y el eje x.*

La frontera de S consiste en el segmento $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ en el eje real, junto con las semirectas $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$ para $y \geq 0$. Llevará a cabo la estrategia de ver las imágenes de las rectas que acotan a S. Primero,

$$w = u + iv = \text{sen}(x)\cosh(y) + i\cos(x)\,\text{senh}(y).$$

Si $x = -\pi/2$, entonces

$$w = u + iv = -\cosh(y).$$

Como $0 \leq y < \infty$ en esta parte de la frontera de S, entonces $\cosh(y)$ varía de 1 a ∞. La imagen de la frontera vertical izquierda de S es, por tanto, el intervalo $(-\infty, -1]$ en el eje real en el plano uv.

Si $x = \pi/2$, un análisis similar muestra que la imagen de la frontera vertical derecha de S es $[1, \infty)$ en el eje real en el plano uv.

Finalmente, si $y = 0$, entonces

$$w = \text{sen}(x).$$

Conforme x varía de $-\pi/2$ a $\pi/2$, $\text{sen}(x)$ varía de -1 a 1. Así $[-\pi/2, \pi/2]$ mapea $[-1, 1]$ en el plano uv.

La figura 13.11 muestra estos resultados. La frontera de S se mapea sobre todo el eje real en el plano uv. Este eje es la frontera de los dos conjuntos en el plano w, el semiplano superior y el semiplano inferior. Elija cualquier z adecuada en S, $z = i$. Su imagen es

$$w = \text{sen}(i) = i\,\text{senh}(1),$$

que está en el semiplano superior. Por tanto, la imagen de S es el semiplano superior.

La orientación juega un papel importante en estos mapeos. Imagine que camina a lo largo de la frontera de S en sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj. Esto significa que empieza en algún lugar de la frontera izquierda $x = -\pi/2$, recorra esta recta hacia el eje real, después gire a la izquierda y camine a lo largo de este eje hacia $x = \pi/2$, después a la izquierda nuevamente y prosiga hacia arriba por la frontera derecha recta. Siga el movimiento del punto imagen $f(z)$ conforme z toma esta ruta. Conforme z se mueve hacia abajo por la recta $x = -\pi/2$, $f(z) = \text{sen}(z)$ empieza en algún lado a la izquierda

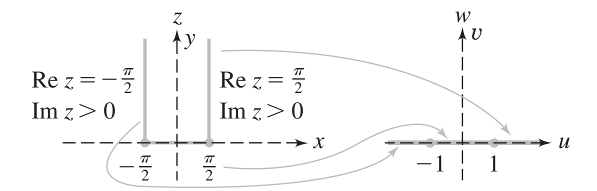


FIGURA 13.11 $w = \text{sen}(z)$ *mapea* $x = -\pi/2$, $y \geq 0$, *en* $u \leq -1$; $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ *en* $-1 \leq u \leq 1$; *y* $x = \pi/2$, $y \geq 0$, *en* $u \geq 1$.

de -1 en el eje real en el plano w, y se mueve hacia $w = -1$. Conforme w gira la primera esquina y se mueve a lo largo del eje real en el plano z de $-\pi/2$ a $\pi/2$, $f(z)$ continúa a partir de -1 y sigue adelante a lo largo del eje real hasta $w = +1$. Finalmente, z gira hacia arriba y se mueve a lo largo de la recta $x = \pi/2$, y $f(z)$ se mueve desde $w = 1$ hacia afuera del eje real en el plano w. Conforme z recorre la frontera de la banda en sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj (interior de S a la izquierda), $f(z)$ recorre la frontera del semiplano superior de izquierda a derecha en sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj (interior del semiplano a la izquierda). ■

En este ejemplo, conforme z se mueve sobre la frontera de D en sentido positivo (en sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj), $f(z)$ se mueve sobre la frontera de $f(D)$ en sentido positivo. En la siguiente sección se analizan mapeos que conservan ángulos y sentido de rotación.

SECCIÓN 13.1 PROBLEMAS

1. En cada inciso de (a) a (e), encuentre la imagen del rectángulo dado bajo el mapeo $w = e^z$. Dibuje el rectángulo en el plano z y su imagen en el plano w.

(a) $0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi$

(b) $-1 \le x \le 1,\ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

(c) $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{4}$

(d) $1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \pi$

(e) $-1 \le x \le 2,\ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

2. En cada inciso de (a) a (e), encuentre la imagen del rectángulo dado bajo el mapeo $w = \cos(z)$. Dibuje, en cada caso, el rectángulo y su imagen.

(a) $0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2$

(b) $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi,\ 1 \le y \le 3$

(c) $0 \le x \le \pi,\ \frac{\pi}{2} \le y \le \pi$

(d) $\pi \le x \le 2\pi,\ 1 \le y \le 2$

(e) $0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le 1$

3. En cada inciso de (a) a (e), encuentre la imagen del rectángulo dado bajo el mapeo $w = 4\,\mathrm{sen}(z)$. Dibuje, en cada caso, el rectángulo y su imagen.

(a) $0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$

(b) $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{4}$

(c) $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{6}$

(d) $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$

(e) $1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2$

4. Determine la imagen del sector $\pi/4 \le \theta \le 5\pi/4$ bajo el mapeo $w = z^2$. Dibuje el sector y su imagen.

5. Determine la imagen del sector $\pi/6 \le \theta \le \pi/3$ bajo el mapeo $w = z^3$. Dibuje el sector y su imagen.

6. Pruebe que el mapeo

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

mapea el círculo $|z| = r$ sobre una elipse con focos 1 y -1 en el plano w. Dibuje un círculo típico y su imagen.

7. Pruebe que el mapeo del problema 6 mapea la semirecta $\theta =$ constante sobre una hipérbola con foco ± 1 en el plano w. Dibuje una semirecta típica y su imagen.

8. Pruebe que el mapeo $w = 1/z$ mapea toda recta en un círculo o una recta, y todo círculo en un círculo o una recta. Dé un ejemplo de un círculo que se mapee en una recta, y una recta que se mapee en un círculo.

9. Encuentre la imagen de la banda infinita definida por $0 \le \mathrm{Im}(z) \le 2\pi$ bajo el mapeo $w = e^z$.

10. Sea D el rectángulo que cuyos vértices son $\pm\alpha i$ y $\pi \pm \alpha i$, con α un número positivo.

(a) Determine la imagen de D bajo el mapeo $w = \cos(z)$. Dibuje D y su imagen.

(b) Determine la imagen de D bajo el mapeo $w = \mathrm{sen}(z)$. Dibuje esta imagen.

(c) Determine la imagen de D bajo el mapeo $w = 2z^2$. Dibuje esta imagen.

13.2 Mapeos conformes

Sea $f : D \to D^*$ un mapeo.

DEFINICIÓN 13.3 ***Mapeo que conserva ángulos***

f conserva ángulos si para cualesquiera z_0 en D, dos curvas suaves en D que se cortan en z_0, y el ángulo entre estas curvas en z_0 es θ, las imágenes de estas curvas se cortan en el mismo ángulo θ en $f(z_0)$.

En la figura 13.12 se ilustra esta idea. Las imágenes de γ_1 y γ_2 son las curvas $f(\gamma_1)$ y $f(\gamma_2)$ en D^*. Suponga que γ_1 y γ_2 se cortan en z_0 y que sus tangentes tienen ahí un ángulo θ entre ellas. Busque que las tangentes a $f(\gamma_1)$ y $f(\gamma_2)$ se corten en $f(z_0)$ en el mismo ángulo. Si esta condición se cumple para todas las curvas suaves que pasan por cada punto de D, entonces f conserva ángulos en D.

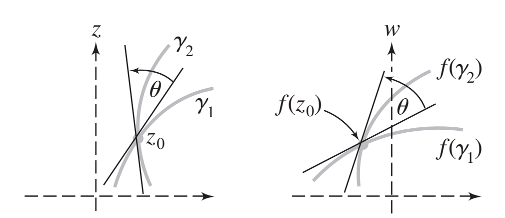


FIGURA 13.12 *Mapeo que conserva ángulos.*

DEFINICIÓN 13.4 ***Mapeo que conserva orientación***

f conserva la orientación si una rotación en sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj en D es mapeada por f en una rotación en sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj en D^*.

Esta idea se ilustra en la figura 13.13. Si L_1 y L_2 son rectas que pasan por cualquier punto z_0 en D y el sentido de la rotación de L_1 a L_2 es contrario al movimiento de las manecillas del reloj, entonces el sentido de la rotación de $f(L_1)$ a $f(L_2)$ a través de $f(z_0)$ en D^* también debe ser en sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj. Por supuesto, $f(L_1)$ y $f(L_2)$ no necesitan ser rectas, pero uno puede seguir considerando el sentido de la rotación de la tangente de $f(L_1)$ a la tangente de $f(L_2)$ en $f(z_0)$. En contraste, la figura 13.14 ilustra un mapeo que no conserva la orientación.

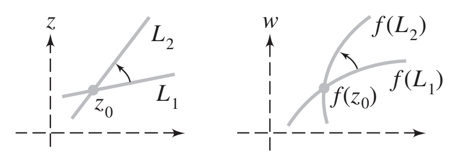
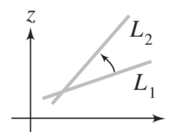


FIGURA 13.13 *Mapeo que conserva la orientación.*



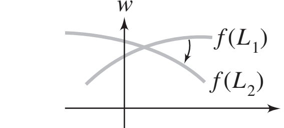


FIGURA 13.14 *Mapeo que no conserva la orientación.*

La conservación de los ángulos y la orientación son conceptos independientes. Un mapeo puede conservar uno pero no el otro. Si $f: D \to D^*$ conserva ambas, decimos que f es *conforme*.

DEFINICIÓN 13.5 Mapeo conforme

$f: D \to D*$ es un mapeo conforme si f conserva tanto ángulos como orientación.

El siguiente teorema genera muchos ejemplos de mapeos conformes.

TEOREMA 13.1

Sea $f: D \to D^*$ una función diferenciable definida en un dominio D. Suponga que $f'(z) \neq 0$ para todo z en D. Entonces f es conforme. ■

Así, una función diferenciable con derivada distinta de cero en un dominio (conjunto abierto conexo) mapea este conjunto de tal manera que conserva tanto ángulos como orientación. Se esbozará un argumento mostrando por qué esto es cierto. Sea z_0 en D y sea γ una curva suave en D que pasa por z_0. Entonces $f(\gamma)$ es una curva suave que pasa por $f(z_0)$ en D^* (figura 13.15). Si $w = f(z)$ y $w_0 = f(z_0)$, entonces

$$w - w_0 = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0).$$

Ahora recordemos que el argumento se comporta como un logaritmo, en el sentido que cualquier argumento de un producto es una suma de los argumentos de los factores individuales salvo múltiplos de 2π. Entonces

$$\arg(w - w_0) = \arg\left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right) + \arg(z - z_0), \tag{13.1}$$

En la figura 13.16, θ es el ángulo entre el eje real positivo y la recta que pasa por z y z_0 y es un argumento de $z - z_0$. El ángulo φ entre el eje real positivo y la recta que pasa por w y w_0 en el plano w es un argumento de $w - w_0$. En el límite, conforme $z \to z_0$, la ecuación (13.1) da

$$\varphi = \arg[f'(z_0)] + \theta.$$

Es aquí donde se usa la suposición que $f'(z_0) \neq 0$, debido a que 0 no tiene argumento.

Si γ^* es otra curva suave que pasa por z_0, entonces por el mismo razonamiento,

$$\varphi^* = \arg[f'(z_0)] + \theta^*.$$

Entonces

$$\varphi - \varphi^* = \theta - \theta^*,$$

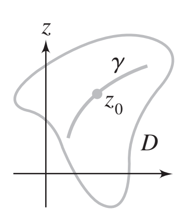
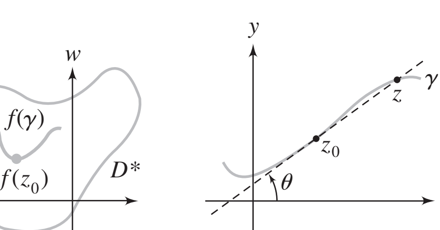




FIGURA 13.15



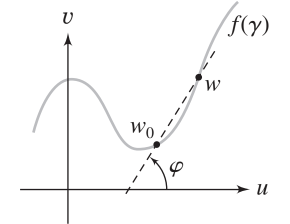


FIGURA 13.16

(salvo múltiplos de 2π). Pero $\theta - \theta^*$ es el ángulo entre las tangentes a γ y γ^* en z_0, y $\varphi - \varphi^*$ es el ángulo entre las tangentes a $f(\gamma)$ y $f(\gamma^*)$ en $f(z_0)$. Por tanto, f conserva ángulos.

La última "ecuación" también implica que f conserva orientación, ya que el sentido de la rotación de γ a γ^* es el mismo que el sentido de la rotación de $f(\gamma)$ a $f(\gamma^*)$. Habría obtenido una inversión en el sentido de rotación si hubiera encontrado que $\varphi - \varphi^* = \theta^* - \theta$. Por ejemplo, $w = \operatorname{sen}(z)$ es diferenciable, con una derivada distinta de cero en la banda $-\pi/2 < \operatorname{Re}(z) < \pi/2$, y así es un mapeo conforme de la banda sobre un conjunto en el plano w.

Una composición de mapeos conformes es conforme. Suponga que f mapea D conformemente sobre D^*, y g mapea D^* conformemente sobre D^{**}. Entonces $g \circ f$ mapea D conformemente sobre D^{**} (figura 13.17), ya que ángulos y orientación son conservados en cada paso del mapeo.

Ahora considere la siguiente clase, importante, de mapeos conformes.

13.2.1 Transformaciones lineales racionales

Con frecuencia hay dominios D y D^* (por ejemplo, representando áreas de un flujo de fluido), y busca producir un mapeo conforme de D sobre D^*. Esto puede ser una tarea formidable. Las transformaciones lineales racionales son mapeos conformes relativamente sencillos que servirán algunas veces a este propósito.

DEFINICIÓN 13.6 Transformación lineal racional

Una transformación lineal racional es una función

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

en donde a, b, c y d son números complejos dados y $ad - bc \neq 0$.

Otros nombres para esta clase de función son *transformación de Möbius* y *transformación bilineal*. La función está definida excepto en $z = -d/c$, que es un polo simple de T. Más aún,

$$T'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2},$$

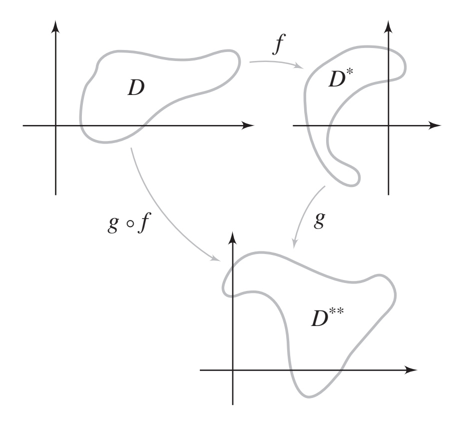


FIGURA 13.17 *Una composición de mapeos conformes es conforme.*

y es distinto de cero si $z \neq -d/c$. T es por tanto, un mapeo conforme del plano sin el punto $z = -d/c$.

La condición $ad - bc \neq 0$ garantiza que T es uno a uno, por tanto, invertible. Si $w = (az + b)/(cz + d)$, entonces el mapeo inverso es

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a},$$

que también es una transformación lineal racional.

Ahora algunas clases especiales de transformaciones lineales racionales.

EJEMPLO 13.6

Sea $w = T(z) = z + b$, con b constante. Ésta se llama una traslación debido a que T desplaza a z horizontalmente $\text{Re}(b)$ unidades y verticalmente $\text{Im}(z)$ unidades.

Por ejemplo, si $T(z) = z + 2 - i$, entonces T toma a z y lo mueve dos unidades a la derecha y una unidad hacia abajo (figura 13.18). Puede ver esto con los siguientes puntos y sus imágenes:

$$0 \to 2 - i, \quad 1 \to 3 - i, \quad i \to 2, \quad 4 + 3i \to 6 + 2i. \blacksquare$$

EJEMPLO 13.7

Sea $w = T(z) = az$, con a una constante distinta de cero. Ésta se llama una *rotación/dilatación*. Para ver por qué, primero observe que

$$|w| = |a|\,|z|\,.$$

Si $|a| > 1$, esta transformación alarga un número complejo, en el sentido que la línea está más lejos del origen que z. Si $|a| < 1$, acorta esta distancia. De ahí el término *dilatación*.

Ahora escriba las formas polares $z = re^{i\theta}$ y $a = Ae^{i\alpha}$. Entonces

$$T(z) = are^{i(\theta+\alpha)},$$

de manera que la transformación suma α al argumento de cualquier número complejo distinto de cero. Esto gira al número en sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj un ángulo α. Esta es la razón para el término *rotación*.

El efecto total de la transformación es, por tanto, un escalamiento y una rotación. Como un ejemplo específico, considere

$$w = (2 + 2i)z.$$

Esto mapeará

$$i \to -2 + 2i,\ 1 \to 2 + 2i \quad \text{y} \quad 1 + i \to 4i,$$

como se muestra en la figura 13.19. Como sugiere la figura 13.20, en general la imagen de z se obtiene multiplicando la magnitud de z por $|2 + 2i| = \sqrt{8}$ y rotando la recta del origen a z en sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj $\pi/4$ radianes. $\blacksquare$

Si $|a| = 1$, $T(z) = az$ se llama una *rotación pura*, ya que en este caso no hay efecto de dilatación, sólo una rotación del argumento de a.

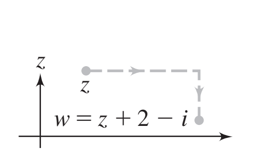


FIGURA 13.18

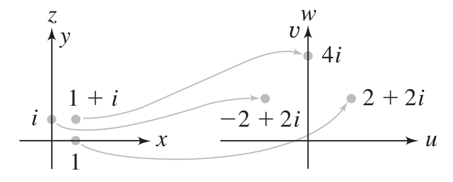


FIGURA 13.19

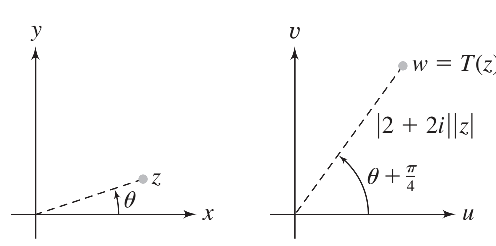



FIGURA 13.20 *El mapeo* $T(z) = (2 + 2i)z$.

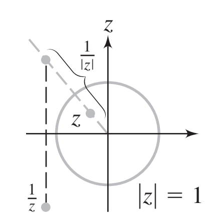


FIGURA 13.21 *Imagen de z bajo una inversión.*

EJEMPLO 13.8

Sea $w = T(z) = 1/z$. Este mapeo se llama una *inversión*. Para $z \neq 0$,

$$|w| = \frac{1}{|z|}$$

y

$$\arg(w) = \arg(1) - \arg(z) = -\arg(z)$$

(salvo múltiplos enteros de 2π). Esto significa que llega a $T(z)$ al moverse $1/|z|$ unidades desde el origen a lo largo de la recta de 0 a z y después reflejando este punto a través del eje real (figura 13.21). Esto mapea puntos dentro del disco unitario, en el exterior de él y puntos del exterior al interior, mientras que los puntos en el círculo unitario permanecen en el círculo unitario (pero se mueven alrededor del círculo, excepto para 1 y -1). Por ejemplo, si $z = (1 + i)/\sqrt{2}$, entonces $1/z = (1 - i)/\sqrt{2}$ (figura 13.22). ■

Ahora probará que las traslaciones, las rotaciones/dilataciones y las inversiones son las transformaciones lineales racionales fundamentales, en el sentido que cualquiera de estos mapeos puede obtenerse como una secuencia de transformaciones de estos tres tipos. Para ver cómo hacerlo, empiece con

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Si $c = 0$, entonces

$$T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

es una rotación/dilatación seguida por una traslación:

$$z \underset{\text{rot/dil}}{\longrightarrow} \frac{a}{d}z \underset{\text{tras}}{\longrightarrow} \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

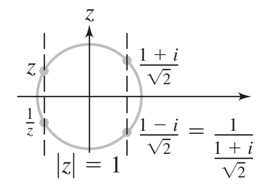


FIGURA 13.22
Imagen de un punto en el círculo unitario bajo una inversión.

Si $c \neq 0$, entonces T es el resultado de la siguiente secuencia:

$$z \underset{\text{rot/dil}}{\rightarrow} cz \underset{\text{tras}}{\rightarrow} cz + d \underset{\text{inv}}{\rightarrow} \frac{1}{cz+d}$$

$$\underset{\text{rot/dil}}{\rightarrow} \frac{bc - ad}{c}\frac{1}{cz+d} \underset{\text{tras}}{\rightarrow} \frac{bc-ad}{c}\frac{1}{cz+d} + \frac{a}{c} = \frac{az+b}{cz+d} = T(z).$$

Esta manera de descomponer una transformación lineal racional en componentes más simples tiene dos propósitos. Primero, es posible analizar propiedades generales de estas transformaciones analizando las componentes más sencillas de las transformaciones. Quizá más importante, algunas veces se usa esta secuencia para construir mapeos conformes entre dominios dados.

La siguiente es una propiedad fundamental de las transformaciones lineales racionales. Se aplica el término *recta* para línea recta.

TEOREMA 13.2

Una transformación lineal racional mapea cualquier círculo en un círculo o recta y cualquier recta en un círculo o recta. ■

Prueba Debido a la discusión anterior, necesita verificar esto solamente para traslaciones, rotaciones/dilataciones e inversiones.

Es obvio geométricamente que una traslación mapea un círculo en un círculo y una recta en una recta. Similarmente, una rotación/dilatación mapea un círculo en un círculo y una recta en una recta.

Ahora necesita determinar el efecto de una inversión en un círculo o una recta. Comience con el hecho que cualquier círculo o recta en el plano es la gráfica de una ecuación

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + R = 0,$$

en donde A, B, C y R son números reales. Esta gráfica es un círculo si $A \neq 0$ y una recta si $A = 0$ y B y C no son ambas cero. Con $z = x + iy$, esta ecuación se vuelve

$$A\,|z|^2 + \frac{B}{2}(z + \overline{z}) + \frac{C}{2i}(z - \overline{z}) + R = 0.$$

Ahora sea $w = 1/z$. La imagen en el plano w de este lugar geométrico es la gráfica de

$$A\frac{1}{|w|^2} + \frac{B}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{\overline{w}}\right) + \frac{C}{2i}\left(\frac{1}{w} - \frac{1}{\overline{w}}\right) + R = 0.$$

Multiplique esta ecuación por $w\overline{w}$ (que es $|w|^2$) para obtener

$$R\,|w|^2 + \frac{B}{2}(w + \overline{w}) - \frac{C}{2i}(w - \overline{w}) + A = 0.$$

En el plano w, esta es la ecuación de un círculo si $R \neq 0$, y una recta si $A = 0$ y B y C no son ambas cero. ■

Como muestra la prueba, las traslaciones y las rotaciones/dilataciones mapean círculos en círculos y rectas en rectas, mientras una inversión mapea un círculo en un círculo o una recta y una recta en un círculo o recta.

EJEMPLO 13.9

Sea $w = T(z) = i(z - 2) + 3$. Esta es la secuencia

$$z \to z - 2 \to i(z - 2) \to i(z - 2) + 3 = w, \tag{13.2}$$

una traslación de 2 a la izquierda, seguida de una rotación, en sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj, de $\pi/2$ radianes (un argumento de i es $\pi/2$), y después una traslación de 3 a la derecha. Debido a que este mapeo no involucra una inversión, mapea círculos en círculos y rectas en rectas.

Como un ejemplo específico, considere el círculo K dado por

$$(x - 2)^2 + y^2 = 9,$$

con radio 3 y centro $(2, 0)$. Escriba esta ecuación como

$$x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$$

o

$$|z|^2 - 2(z + \overline{z}) - 5 = 0.$$

Resuelva $w = i(z - 2) + 3$ para obtener $z = -i(w - 3) + 2$ y sustituya en la última ecuación para obtener

$$|i(w - 3) + 2|^2 - 2\left(-i(w - 3) + 2 + \overline{-i(w - 3) + 2}\right) - 5 = 0.$$

Después de una manipulación rutinaria, obtiene

$$|w|^2 - 3(w + \overline{w}) = 0.$$

Con $w = u + iv$, esto es

$$(u - 3)^2 + v^2 = 9,$$

un círculo de radio 3 y centro $(3, 0)$ en el plano $uv-$. Este resultado pudo haber sido pronosticado geométricamente a partir de la secuencia de mapeos elementales 13.2, mostrados en pasos en la figura 13.23. La secuencia, primero mueve el círculo 2 unidades a la izquierda, después (multiplicación por i) lo rota $\pi/2$ radianes (que deja el mismo centro y radio), y finalmente lo traslada 3 unidades a la derecha. El resultado es un círculo de radio 3 alrededor de $(3, 0)$. ■

EJEMPLO 13.10

Examinará los efectos de una inversión $w = 1/z$ en la recta vertical $\text{Re}(z) = a \neq 0$. En esta recta, $z = a + iy$ y su imagen consiste en los puntos

$$w = \frac{1}{a + iy} = \frac{a}{a^2 + y^2} - \frac{y}{a^2 + y^2}i = u + iv.$$

Es de rutina verificar que

$$\left(u - \frac{1}{2a}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4a^2},$$

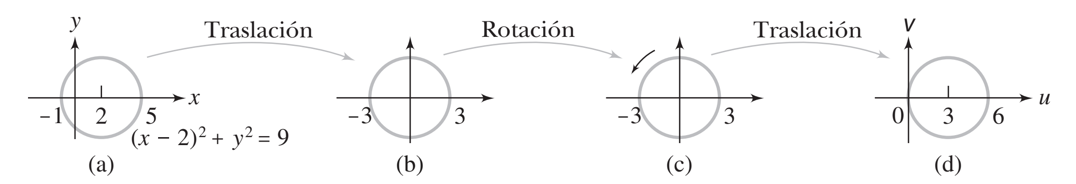


FIGURA 13.23

de manera que la imagen de esta recta vertical es un círculo en el plano uv con centro $(1/2a, 0)$ y radio $1/2a$. ■

Como preparación para la construcción de mapeos entre dominios dados, probará que siempre se encontrará una transformación lineal racional que mapee tres puntos dados en tres puntos dados.

TEOREMA 13.3 Teorema de los tres puntos

Sean z_1, z_2 y z_3 tres puntos distintos en el plano z y w_1, w_2 y w_3 tres puntos distintos en el plano w. Entonces existe una transformación lineal racional T del plano z al plano w tal que

$$T(z_1) = w_1, T(z_2) = w_2 \quad \text{y} \quad T(z_3) = w_3. \ ■$$

Prueba Sea $w = T(z)$ la solución para w en términos de z y de los seis puntos dados en la ecuación

$$(w_1 - w)(w_3 - w_2)(z_1 - z_2)(z_3 - z) = (z_1 - z)(z_3 - z_2)(w_1 - w_2)(w_3 - w). \tag{13.3}$$

Sustituyendo $z = z_j$ en esta ecuación obtiene a $w = w_j$ para $j = 1, 2, 3$. ■

EJEMPLO 13.11

Busca una transformación lineal racional que mapea

$$3 \to i, 1 - i \to 4 \quad \text{y} \quad 2 - i \to 6 + 2i.$$

Haga

$$z_1 = 3, \quad z_2 = 1 - i, \quad z_3 = 2 - i$$

y

$$w_1 = i, \quad w_2 = 4, \quad w_3 = 6 + 2i$$

en la ecuación (13.3) para obtener

$$(i - w)(2 + 2i)(2 + i)(2 - i - z) = (3 - z)(1)(i - 4)(6 + 2i - w).$$

Resuelva para w y obtenga

$$w = T(z) = \frac{(20 + 4i)z - (68 + 16i)}{(6 + 5i)z - (22 + 7i)}.$$

Entonces cada $T(z_j) = w_j$. ■

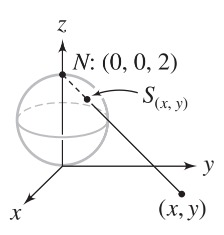


FIGURA 13.24 *Proyección estereográfica identificando la esfera compleja con el plano complejo extendido.*

Se puede probar que la especificación de tres puntos y sus imágenes determina unívocamente una transformación lineal racional. Entonces, en el último ejemplo, T es la única transformación lineal racional que mapea los tres puntos dados en sus imágenes dadas.

Cuando trate con mapeos, a veces es conveniente reemplazar el plano complejo con la esfera compleja. Para visualizar cómo se hace esto, considere el sistema coordenado de tres dimensiones en la figura 13.24. Una esfera de radio 1 es colocada con su polo sur en el origen y su polo norte en $(0, 0, 2)$. El plano xy es el plano complejo. Para cualquier (x, y) en este plano, la recta de $(0, 0, 2)$ a (x, y) corta a la esfera exactamente en un punto $S(x, y)$. Esto asocia con cada punto en la esfera excepto el $(0, 0, 2)$, un único punto en el plano complejo, y recíprocamente. Este mapeo se llama la *proyección estereográfica* de la esfera (excepto su polo norte) sobre el plano. Esta esfera agujerada se llama *esfera compleja*. El punto $(0, 0, 2)$ juega el papel de un punto al infinito. Esto está motivado porque conforme (x, y) esté más lejos del origen en el plano xy, $S(x, y)$ se mueve más cerca a $(0, 0, 2)$ en la esfera. El punto $(0, 0, 2)$ no está asociado con ningún número complejo, pero da una manera de visualizar al infinito como un punto, algo que no se puede hacer en el plano. El *plano complejo extendido* (que consiste en todos los números complejos, junto con el infinito) está en una correspondencia uno a uno con esta esfera, incluyendo su polo norte.

Para darle algún sentido al punto al infinito, considere la recta $y = x$ en el plano xy. Ésta consiste en los números complejos $x + xi$. Si hace que $x \to \infty$, el punto $(1 + i)x$ se mueve sobre esta recta alejándose del origen. La imagen de esta recta en la esfera compleja es parte de un círculo máximo, y el punto imagen $S(x, y)$ en la esfera se aproxima a $(0, 0, 2)$ conforme $x \to \infty$. Esto permite pensar que $(1 + i)x$ acerca a una ubicación específica que puede señalar en este proceso de límite, en lugar de sólo decir que se aleja del origen.

Al definir una transformación lineal racional, algunas veces es conveniente mapear uno de los tres puntos dados a los que se refiere el último teorema en el punto infinito. Esto se puede hacer anulando los factores que involucran a w_3 en la ecuación (13.3).

TEOREMA 13.4

Sean z_1, z_2, z_3 tres números complejos distintos y w_1, w_2 números complejos distintos. Entonces existe una transformación lineal racional $w = T(z)$ que mapea

$$T(z_1) = w_1,\ T(z_2) = w_2 \quad \text{y} \quad T(z_3) = \infty. \ \blacksquare$$

Prueba Tal transformación se obtiene resolviendo para w en la ecuación

$$(w_1 - w)(z_1 - z_2)(z_3 - z) = (z_1 - z)(w_1 - w_2)(z_3 - z_2). \ \blacksquare \tag{13.4}$$

EJEMPLO 13.12

Encontrará una transformación lineal racional que mapea

$$i \to 4i, \quad 1 \to 3 - i, \quad 2 + i \to \infty.$$

Resuelva para w la ecuación

$$(4i - w)(i - 1)(2 + i - z) = (i - z)(-3 + 5i)(1 + i)$$

para obtener

$$w = T(z) = \frac{(5 - i)z - 1 + 3i}{-z + 2 + i}. \blacksquare$$

Algunas otras propiedades de las transformaciones lineales racionales son propuestas en los ejercicios. Ahora, el problema de construir mapeos conformes entre dos dominios dados.

SECCIÓN 13.2 PROBLEMAS

En cada problema del 1 al 5, encuentre una transformación lineal racional que mande los puntos dados en las imágenes indicadas.

1. $1 \to 1, 2 \to -i, 3 \to 1 + i$

2. $i \to i, 1 \to -i, 2 \to 0$

3. $1 \to 1 + i, 2i \to 3 - i, 4 \to \infty$

4. $-5 + 2i \to 1, 3i \to 0, -1 \to \infty$

5. $6 + i \to 2 - i, i \to 3i, 4 \to -i$

En cada problema del 6 al 12, encuentre la imagen del círculo o recta dado bajo la transformación lineal racional.

6. $w = \dfrac{2i}{z}$; $\text{Re}(z) = -4$

7. $w = 2iz - 4$; $\text{Re}(z) = 5$

8. $w = \dfrac{z - i}{iz}$; $\dfrac{1}{2}(z + \overline{z}) + \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z}) = 4$

9. $w = \dfrac{z - 1 + i}{2z + 1}$; $|z| = 4$

10. $w = 3z - i$; $|z - 4| = 3$

11. $w = \dfrac{2z - 5}{z + i}$; $z + \overline{z} - \dfrac{3}{2i}(z - \overline{z}) - 5 = 0$

12. $w = \dfrac{(1 + 3i)z - 2}{z}$; $|z - i| = 1$

13. Pruebe que el mapeo $w = \overline{z}$ no es conforme.

14. Pruebe que la composición de dos transformaciones lineales racionales es una transformación lineal racional.

15. Pruebe que toda transformación lineal racional tiene una inversa y que esta inversa también es una transformación lineal racional. (T^* es una inversa de T si $T \circ T^*$ y $T^* \circ T$ siendo ambas el mapeo identidad, que manda cada punto en sí mismo).

16. Pruebe que no existe una transformación lineal racional que mapea el disco abierto $|z| < 1$ sobre el conjunto de puntos acotados por la elipse $u^2/4 + v^2 = 1/16$.

En los problemas 17 y 18, el escenario es el plano complejo extendido, el cual incluye el punto al infinito.

17. Un punto z_0 es un *punto fijo* del mapeo f si $f(z_0) = z_0$. Suponga que f es una transformación lineal racional que no es ni una traslación ni el mapeo identidad $f(z) = z$. Pruebe que f debe tener uno o dos puntos fijos pero no puede tener tres. ¿Por qué esta conclusión falla para traslaciones? ¿Cuántos puntos fijos puede tener una traslación?

18. Sea f una transformación lineal racional con tres puntos fijos. Pruebe que f es el mapeo identidad.

En cada problema del 19 al 22 escriba la transformación lineal racional como el resultado final de una secuencia de mapeos, cada uno de los cuales es una traslación, rotación/dilatación o inversión.

19. $w = \dfrac{iz - 4}{z}$

20. $w = \dfrac{z - 4}{2z + i}$

21. $w = i(z + 6) - 2 + i$

22. $w = \dfrac{z - 1}{z + 3 + i}$

13.3 Construcción de mapeos conformes entre dominios

Una estrategia para resolver cierto tipo de problemas (por ejemplo, los problemas de Dirichlet) es encontrar la solución para un dominio "simple" (por ejemplo, el disco unitario), luego mapear este dominio conformemente al dominio de interés. Este mapeo puede llevar la solución para el disco a la solución para el último dominio. Por supuesto, esta estrategia depende de dos pasos: encontrar un dominio para el cual es posible resolver el problema, y poder mapear este dominio en el dominio donde desee la solución. Ahora se discute el último problema.

Aunque en la práctica puede ser una tarea imponente encontrar un mapeo conforme entre los dominios dados, el siguiente resultado asegura que dicho mapeo existe, con una excepción.

TEOREMA 13.5 *Teorema del mapeo de Riemann*

Sea D^* un dominio en el plano w y suponga que D^* no es todo el plano w. Entonces existe un mapeo conforme uno a uno del disco unitario $|z| < 1$ sobre D^*. ■

Este resultado implica la existencia de un mapeo conforme entre los dominios dados. Suponga que busca mapear D sobre D^* (ninguno de los cuales es todo el plano). Inserte un tercer plano, el plano ζ, entre el plano z y el plano w, como en la figura 13.25. Por el teorema de Riemann, existe un mapeo conforme uno a uno g del disco unitario $|\zeta| < 1$ sobre D^*. Similarmente, existe un mapeo conforme uno a uno f de $|\zeta| < 1$ sobre D. Entonces $g \circ f^{-1}$ es un mapeo conforme uno a uno de D sobre D^*.

En teoría, entonces, dos dominios, ninguno de los cuales es todo el plano, pueden ser mapeados conformemente de una manera uno a uno, uno sobre el otro. Esto no hace, sin embargo, que sea fácil de encontrar el mapeo. En un intento por encontrar tal mapeo, la siguiente observación es útil.

Un mapeo conforme de un dominio D sobre un dominio D^* mapeará la frontera de D en la frontera de D^*. Esto se usa de la siguiente manera. Suponga que D está acotado por una trayectoria C (no necesariamente cerrada) que separa el plano z en dos dominios, D y $\mathfrak{D}$. Estos se llaman *dominios complementarios*. Análogamente, suponga que D^* está acotado por una trayectoria C^* que separa el plano w en dos dominios complementarios D^* y $\mathfrak{D}^*$ (figura 13.26). Intente encontrar un mapeo conforme f que mande puntos de C en puntos de C^*. Esto puede ser más fácil que tratar de encontrar un mapeo de todo el dominio. Entonces, este mapeo mandará D en D^* o en $\mathfrak{D}^*$. Para saber a cuál, elija un punto z_0 en D y vea si $f(z_0)$ está en D^* o en $\mathfrak{D}^*$. Si $f(z_0)$ está en $D*$ (figura 13.27(a)), entonces $f: D \to D^*$ y el mapeo es conforme. Si $f(z_0)$ está en $\mathfrak{D}^*$ como en la figura 13.27(b), entonces $f: D \to \mathfrak{D}^*$. No es el mapeo que busca, pero algunas veces es necesario hacer otro paso y usar f para fabricar un mapeo conforme de D a D^*.

Ahora construirá algunos mapeos conformes, empezando con unos fáciles y después unos más difíciles.

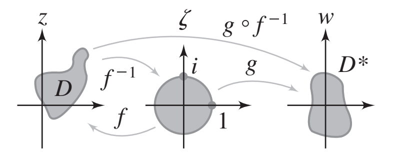


FIGURA 13.25 *Mapeo D sobre D* por medio del disco unitario.*

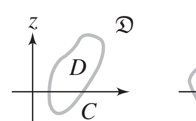


FIGURA 13.26

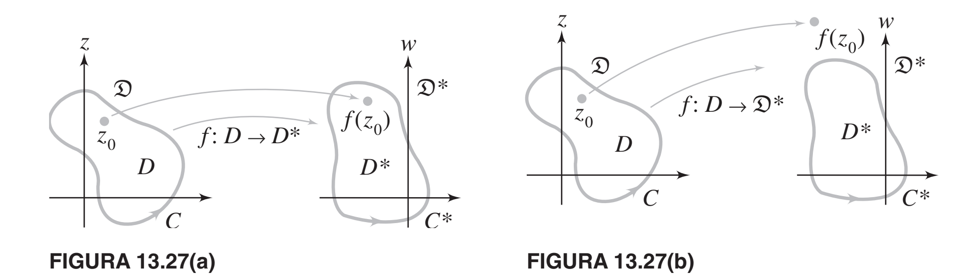


FIGURA 13.27(a) **FIGURA 13.27(b)**

EJEMPLO 13.13

Suponga que busca mapear el disco unitario $D : |z| < 1$ de manera conforme sobre el disco $D^* : |w| < 3$.

Claramente la dilatación $w = f(z) = 3z$ hará esto, ya que todo lo que debe hacer es expandir el disco unitario a un disco de radio 3 (figura 13.28). Observe que este mapeo manda la frontera de D sobre la frontera de D^*. ■

EJEMPLO 13.14

Mapeo conforme del disco unitario $D : |z| < 1$ sobre el dominio $|w| > 3$.

Aquí está mapeando D en el dominio complementario del ejemplo anterior. Ya sabe que $f(z) = 3z$ mapea conformemente a D sobre $|w| < 3$. Combinando este mapeo con una inversión, haciendo

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{3}{z}.$$

Éste mapea $|z| < 1$ en $|w| > 3$ (figura 13.29). Nuevamente, la frontera del disco unitario se mapea en la frontera de $|w| > 3$, que es el círculo de radio 3 alrededor del origen en el plano w. ■

EJEMPLO 13.15

Mapeará el disco unitario $D : |z| < 1$ sobre el disco D^*: $|w - i| < 3$, de radio 3 y centro en i en el plano w.

La figura 13.30 sugiere una manera de construir este mapeo. Desea expandir el radio del disco unitario por un factor de 3. Después traslada el disco resultante una unidad hacia arriba. Así, el mapeo en pasos es:

$$z \to 3z \to 3z + i,$$

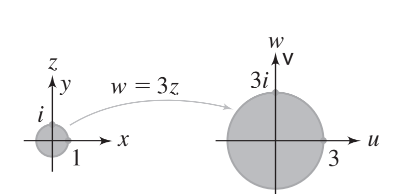


FIGURA 13.28 *Mapeo de* $|z| < 1$ *sobre* $|w| < 3$.

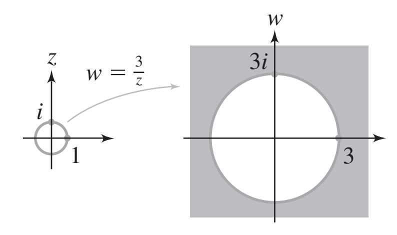


FIGURA 13.29 *Mapeo de* $|z| < 1$ *sobre* $|w| > 3$.

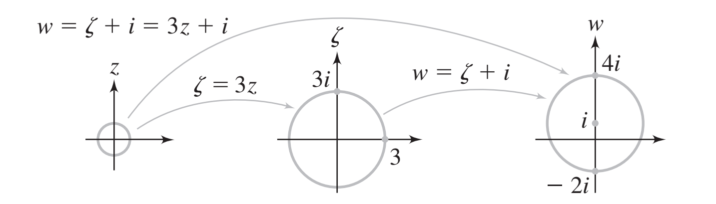


FIGURA 13.30 *Mapeo de* $|z| < 1$ *sobre* $|w - i| < 3$.

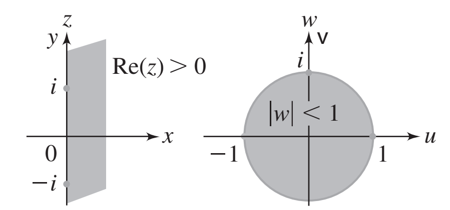


FIGURA 13.31

una dilatación seguida de una traslación. El mapeo es

$$w = f(z) = 3z + i.$$

Éste mapea el círculo unitario $|z| = 1$ en el círculo $|w - i| = 3$ ya que

$$|w - i| = |3z| = 3\,|z| = 3.$$

Más aún, el origen en el plano z (centro de D) se mapea en i en el plano $w-$, e i es el centro de D^*, así $f: D \to D^*$. ■

EJEMPLO 13.16

Suponga que desea mapear el semiplano derecho $D: \text{Re}(z) > 0$ sobre el disco unitario $D^*: |w| < 1$.

En la figura 13.31 se muestran los dominios. La frontera de D es el eje imaginario $\text{Re}(z) = 0$. Mapeará ésta en la frontera del disco unitario $|w| = 1$. Para hacer esto, elija tres puntos en $\text{Re}(z) = 0$ y tres en $|w| = 1$ y úselos para definir una transformación lineal racional. Hay, sin embargo, una sutileza para mantener la orientación positiva (en sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj en curvas cerradas), elija tres puntos en sucesión hacia abajo en el eje imaginario, de manera que una persona caminando a lo largo de estos puntos vea el semiplano derecho a la izquierda. Mapee estos puntos en orden en sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj alrededor de $|w| = 1$.

Por ejemplo, elija

$$z_1 = i,\ z_2 = 0 \quad \text{y} \quad z_3 = -i$$

en el eje imaginario en el plano z y mapear éstos en orden

$$w_1 = 1, \quad w_2 = i, \quad w_3 = -1.$$

A partir de la ecuación (13.3), tiene

$$(1 - w)(-1 - i)(i)(-i - z) = (i - z)(-i)(1 - i)(-1 - w).$$

Resuelva para w:

$$w = T(z) = -i\left(\frac{z - 1}{z + 1}\right).$$

Este mapeo conforme debe mandar el semiplano derecho al interior o exterior del disco unitario en el plano w. Para ver cuál es, elija un punto en $\text{Re}(z) > 0$, $z = 1$. Como $T(1) = 0$ está en D^*, T mapea el semiplano derecho en disco unitario $|w| < 1$, como buscaba. ■

EJEMPLO 13.17

Suponga que desea mapear el semiplano derecho en el exterior del disco unitario, el dominio es $|w| > 1$. Del ejemplo anterior tenemos $T: \text{Re}(z) > 0 \to |w| < 1$. Al seguir este mapeo (mandando $\text{Re}(z) > 0$ sobre

el disco unitario) con una inversión (mandando el disco unitario al exterior del disco unitario), tendrá el mapeo buscado. Así, con $T(z)$ como en el último ejemplo, sea

$$f(z) = \frac{1}{T(z)} = i\left(\frac{z+1}{z-1}\right).$$

Como una verificación, $1 + i$ está en el semiplano derecho, y

$$f(1+i) = i\left(\frac{2+i}{i}\right) = 2 + i$$

es exterior al disco unitario en el plano w. ■

EJEMPLO 13.18

Mapeará el semiplano derecho $\text{Re}(z) > 0$ conformemente sobre el disco $|w - i| < 3$.

Puede hacer esto como una composición de mapeos. Ponga un plano intermedio ζ entre los planos z y w (figura 13.32). Por el ejemplo 13.16, mapeamos $\text{Re}(z) > 0$ sobre el disco unitario $|\zeta| < 1$ mediante

$$\zeta = f(z) = -i\left(\frac{z-1}{z+1}\right).$$

Ahora use el mapeo del ejemplo 13.15 y mande el disco unitario $|\zeta| < 1$ sobre el disco $|w - i| < 3$:

$$w = g(\zeta) = 3\zeta + i.$$

La composición $g \circ f$ es un mapeo conforme $\text{Re}(z) > 0$ sobre $|w - i| < 3$:

$$w = (g \circ f)(z) = g(f(z)) = 3f(z) + i = 3\left[-i\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\right] + i = \frac{2i(-z+2)}{z+1}.$$ ■

EJEMPLO 13.19

Mapeará la banda infinita $S : -\pi/2 < \text{Im}(z) < \pi/2$ sobre el disco unitario $|w| < 1$.

Recuerde del ejemplo 13.4 que la función exponencial mapea rectas horizontales a semirectas desde el origen. La frontera de S consiste en dos rectas horizontales, $\text{Im}(z) = -\pi/2$ y $\text{Im}(z) = \pi/2$. En la recta de la frontera inferior, $z = x - i\pi/2$, de manera que

$$e^z = e^x e^{-i\pi}/2 = -ie^x,$$

varía sobre el eje imaginario negativo conforme x toma todos los valores reales. En la frontera superior de S, $z = x + i\pi/2$, y

$$e^z = ie^x$$

varía sobre la parte positiva del eje imaginario conforme x se mueve sobre la recta real.

El eje imaginario forma la frontera del semiplano derecho $\text{Re}(w) > 0$, así como la del semiplano izquierdo $\text{Re}(w) < 0$ en el plano w. El mapeo $w = e^z$ debe mapear S en uno de estos dominios complementarios. Sin embargo, el mapeo manda el 0 al 1, en el semiplano derecho, de manera que el mapeo $w = f(z) = e^z$ mapea S en el semiplano derecho.

Quiere mapear S sobre el disco unitario. Pero ahora conoce un mapeo de S sobre el semiplano derecho, y también un mapeo del semiplano derecho sobre el disco unitario. Todo lo que debe hacer es ponerlos juntos.

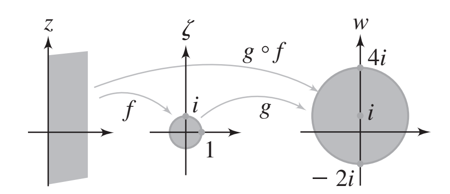


FIGURA 13.32 *Mapeo de* Re$(z) > 0$ *sobre* $|w - i| < 3$.

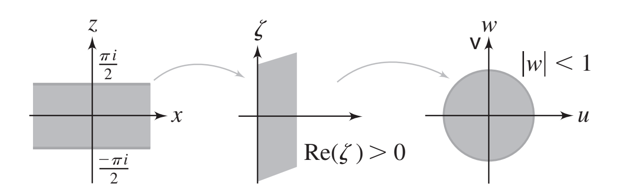


FIGURA 13.33 $|\text{Im}(z)| < \frac{\pi}{2} \to \text{Re}(\zeta) > 0 \to |w| < 1$ *produce un mapeo de* $|\text{Im}(z)| < \frac{\pi}{2}$ *sobre* $|w| < 1$.

En la figura 13.33, se pone un plano ζ entre los planos z y w. El mapeo

$$\zeta = f(z) = e^z$$

manda S sobre el semiplano derecho Re$(\zeta) > 0$. Ahora el mapeo

$$w = g(\zeta) = -i\left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}\right),$$

manda el semiplano derecho Re$(\zeta) > 0$ sobre el disco unitario $|w| < 1$. Por tanto, la función

$$w = (g \circ f)(z) = g(f(z))$$

$$= g(e^z) = -i\left(\frac{e^z - 1}{e^z + 1}\right)$$

es un mapeo conforme de S sobre $|w| < 1$. En términos de funciones hiperbólicas, este mapeo puede escribirse como

$$w = -i \tanh\left(\frac{z}{2}\right). \quad ■$$

El mapeo conforme del último ejemplo no es una transformación lineal racional. Es conveniente usar éstas siempre que sea posible. Sin embargo, aun cuando sabe por el teorema de mapeo de Riemann que existe un mapeo conforme entre dos dominios, no hay garantía de que siempre pueda encontrar tal mapeo en la forma de una transformación lineal racional.

EJEMPLO 13.20

Mapeará el disco $|z| < 2$ sobre el dominio $D^* : u + v > 0$ en el plano uv. En la figura 13.34 se muestran estos dominios.

Se consideran mapeos ya vistos que se relacionan con este problema. Primero, puede mapear $|z| < 2$ en $|\zeta| < 1$ mediante una simple dilatación (multiplicando por $\frac{1}{2}$). Pero también conoce un mapeo del disco unitario al semiplano derecho. Finalmente, puede obtener D^* a partir del semiplano derecho mediante una rotación, en sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj, de $\pi/4$ radianes,

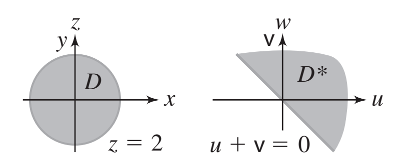


FIGURA 13.34

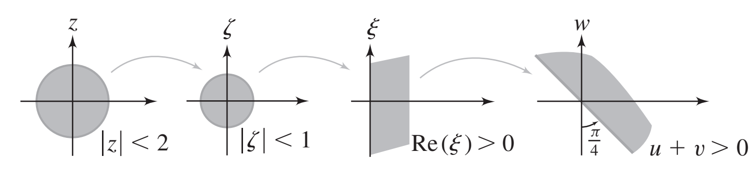


FIGURA 13.35

y conseguir el efecto multiplicando por $e^{i\pi/4}$. Esto sugiere la estrategia de construir el mapeo que desea en los pasos que se muestran en la figura 13.35:

$$|z| < 2 \to |\zeta| < 1 \to \text{Re}(\xi) > 0 \to u + v > 0.$$

El primer paso se consigue mediante

$$\zeta = \frac{1}{2}z.$$

Ahora, use el inverso del mapeo del ejemplo 13.16 y nombre las variables ζ y ξ para obtener

$$\xi = \frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta}.$$

Esto mapea

$$|\zeta| < 1 \to \text{Re}(\xi) > 0.$$

Finalmente, realice la rotación:

$$w = e^{i\pi/4}\xi.$$

En resumen,

$$w = e^{i\pi/4}\xi = e^{i\pi/4}\left(\frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta}\right) = e^{i\pi/4}\left(\frac{1 + i(z/2)}{1 - i(z/2)}\right) = \frac{2 + iz}{2 - iz}e^{i\pi/4}.$$

Esto mapea el disco $|z| < 2$ conformemente sobre el semiplano $u + v > 0$. Por ejemplo, 0 está en el disco, y

$$w(0) = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$$

está en $u + v > 0$. ■

Ahora se discutirá brevemente la transformación de Schwarz-Christoffel, que puede ser usada cuando la frontera del dominio es un polígono.

13.3.1 Transformación de Schwarz-Christoffel

Suponga que quiere un mapeo conforme del semiplano superior $\mathfrak{H}$ al interior $\mathfrak{P}$ de un polígono P, que podría ser un triángulo, rectángulo, pentágono u otro polígono. Una transformación lineal racional no hará esto. Sin embargo, la transformación de Schwarz-Christoffel fue construida justo para este propósito.

Sea P con vértices $w_1, \ldots, w_n$ en el plano w (figura 13.26). Sean $\pi\alpha_1, \ldots, \pi\alpha_n$ los ángulos exteriores de P. Existen constantes z_0, a y b, con $\text{Im}(z_0) > 0$, y números reales $x_1, \ldots, x_n$ tales que la función

$$f(z) = a\int_{z_0}^{z}(\xi - x_1)^{-\alpha_1}(\xi - x_2)^{-\alpha_2}\cdots(\xi - x_n)^{-\alpha_n}\,d\xi + b \tag{13.5}$$

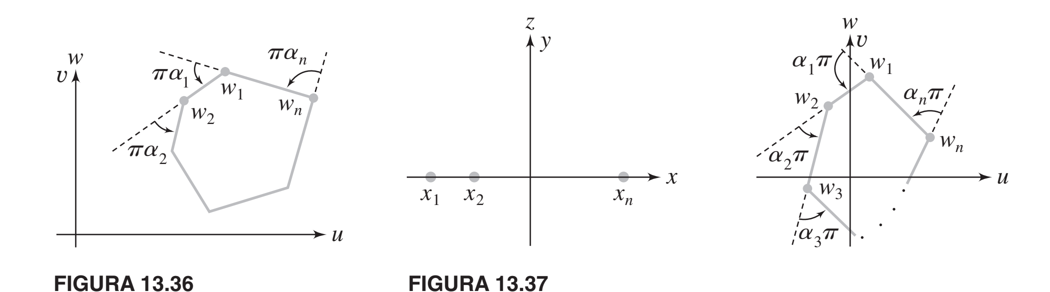


FIGURA 13.36

FIGURA 13.37

es un mapeo conforme de $\mathfrak{H}$ sobre $\mathfrak{P}$. Esta integral se toma sobre cualquier trayectoria en $\mathfrak{H}$ de z_0 a z en $\mathfrak{H}$. Los factores $(\xi - x_j)^{-\alpha_j}$ están definidos usando el logaritmo complejo obtenido al tomar el argumento en $[0, 2\pi)$.

Cualquier función de la forma de la ecuación (13.5) se llama una *transformación de Schwarz-Christoffel*. Para ver la idea que está detrás de esta función, suponga que cada $x_j < x_{j+1}$. Si z está en $\mathfrak{H}$, sea

$$g(z) = a(z - x_1)^{-\alpha_1}(z - x_2)^{-\alpha_2} \cdots (z - x_n)^{-\alpha_n}.$$

Entonces $f'(z) = g(z)$ y

$$\arg[f'(z)] = \arg(z) - \alpha_1 \arg(z - x_1) - \cdots - \alpha_n \arg(z - x_n).$$

Como vio en la discusión del teorema 13.1, $\arg[f'(z)]$ es el número de radianes que rota el mapeo f a las rectas tangentes, si $f'(z) \neq 0$.

Ahora imagine que z se mueve de izquierda a derecha a lo largo del eje real (figura 13.37), que es la frontera de $\mathfrak{H}$. En $(-\infty, x_1)$, $f(z)$ se mueve a lo largo de la recta (no hay cambios en el ángulo). Cuando z pasa sobre x_1, sin embargo, $\arg[f'(z)]$ cambia por $\alpha_1\pi$. Este ángulo permanece fijo conforme z se mueve de x_1 hacia x_2. Cuando z pasa sobre x_2, $\arg[f'(z)]$ cambia por $\alpha_2\pi$, después permanece con este valor hasta que z encuentra a x_3, donde $\arg[f'(z)]$ cambia por $\alpha_3\pi$, y así sucesivamente. De donde $\arg[f'(z)]$ permanece constante en intervalos (x_{j-1}, x_j) y crece en $\alpha_j\pi$ conforme z pasa sobre x_j. El resultado neto es que el eje real es mapeado al polígono P^* con ángulos exteriores $\alpha_1\pi, \ldots, \alpha_n\pi$. Estos números están ya determinados por $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, ya que

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \pi = 2\pi.$$

P^* tiene los mismos ángulos exteriores que P pero no tiene que ser el mismo que P debido a su localización y tamaño. Debe rotar, trasladar y/o dilatar P^* para obtener P. Estos efectos se consiguen eligiendo $x_1, \ldots, x_n$ para hacer P^* similar a P, y después eligiendo a (rotación/dilatación) y b (traslación) para obtener P.

Si elige $z_n = \infty$, entonces $z_1, \ldots, z_{n-1}, \infty$ son mapeados en los vértices de P. En este caso la transformación de Schwarz-Christoffel es

$$f(z) = a \int_{z_0}^{z} (\xi - x_1)^{-\alpha_1}(\xi - x_2)^{-\alpha_2} \cdots (\xi - x_n)^{-\alpha_{n-1}}\, d\xi + b. \tag{13.6}$$

Se puede probar que cualquier mapeo conforme de $\mathfrak{H}$ sobre un polígono debe tener la forma de una transformación de Schwarz-Christoffel.

En la práctica una transformación de Schwarz-Christoffel puede ser difícil o imposible de determinar en forma cerrada debido a la integración.

EJEMPLO 13.21

Mapeará el semiplano superior $\mathfrak{H}$ sobre un rectángulo.

Elija $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y x_3 como cualquier número real mayor que 1. La transformación de Schwarz-Christoffel de la ecuación (13.6) tiene la forma

$$f(z) = a \int_{z_0}^{z} \frac{1}{\sqrt{\xi(\xi - 1)(\xi - x_3)}}\, d\xi + b,$$

con a y b elegidos para ajustar las dimensiones del rectángulo y su orientación respecto a los ejes. El radical aparece ya que los ángulos externos del rectángulo son todos iguales a $\pi/2$, de manera que $\sum_{j=1}^{4} \alpha_j = 4\alpha_k = 2$. Esta integral es elíptica y no se puede evaluar en forma cerrada. ■

EJEMPLO 13.22

Mapeará $\mathfrak{H}$ sobre la banda $S : \text{Im}(w) > 0,\ -c < \text{Re}(w) < c$ en el plano w. Aquí c es una constante positiva.

En la figura 13.38 se muestran $\mathfrak{H}$ y la banda S. Para usar la transformación de Schwarz-Christoffel, debe pensar en S como un polígono con vértices $-c$, c e ∞. Elija $x_1 = -1$ para mapearlo en $-c$ y $x_2 = 1$ para mapearlo en c. Mapee ∞ en ∞. Los ángulos exteriores de la banda son $\pi/2$ y $\pi/2$, así $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$. La transformación tiene la forma

$$w = f(z) = a \int_{z_0}^{z} (\xi + 1)^{-1/2}(\xi - 1)^{-1/2}\, d\xi + b.$$

Elija $z_0 = 0$ y $b = 0$. Escriba

$$(\xi - 1)^{-1/2} = [-(1 - \xi)]^{-1/2} = -i(1 - \xi)^{-1/2}.$$

Con $-ai = A$, tiene

$$w = f(z) = A \int_{0}^{z} \frac{1}{(1 - \xi^2)^{1/2}}\, d\xi.$$

Esta integral recuerda a la representación de la integral real de la función inversa del seno. De hecho, puede escribir

$$w = A \operatorname{sen}^{-1}(z),$$

con lo que quiere decir que

$$z = \operatorname{sen}\left(\frac{w}{A}\right).$$

Elija A de manera que -1 se mapea en $-c$ y 1 en c, necesita

$$\operatorname{sen}\left(\frac{c}{A}\right) = 1.$$

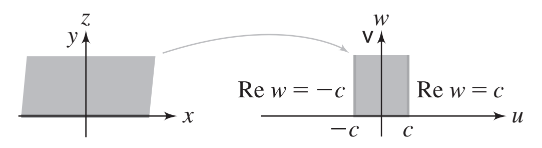


FIGURA 13.38

Así $c/A = \pi/2$, o

$$A = \frac{2c}{\pi}.$$

El mapeo es

$$w = \frac{2c}{\pi}\,\text{sen}^{-1}(z).$$

Si elige $c = \pi/2$, este mapeo es simplemente $w = \text{sen}^{-1}(z)$, mapeando $\mathfrak{H}$ sobre la banda $\text{Im}(w) > 0$, $-\pi/2 < \text{Re}(w) < \pi/2$. Esto es consistente con el resultado del ejemplo 13.5. ■

SECCIÓN 13.3 PROBLEMAS

En cada problema del 1 al 6, encuentre una transformación lineal racional que mapee el primer dominio sobre el segundo.

1. $|z| < 3$ sobre $|w - 1 + i| < 6$
2. $|z| < 3$ sobre $|w - 1 + i| > 6$
3. $|z + 2i| < 1$ sobre $|w - 3| > 2$
4. $\text{Re}(z) > 1$ sobre $\text{Im}(w) > -1$
5. $\text{Re}(z) < 0$ sobre $|w| < 4$
6. $\text{Im}(z) > -4$ sobre $|w - i| > 2$
7. Encuentre un mapeo conforme del semiplano superior $\text{Im}(z) > 0$ sobre el lado $0 < \arg(w) < \pi/3$.
8. Sea $w = Log(z)$, en donde el logaritmo toma un valor único para cada z distinto de cero, pidiendo que el argumento de z esté en $[0, 2\pi)$. Pruebe que el mapeo manda $\text{Im}(z) > 0$ sobre la banda $0 < \text{Im}(w) < \pi$.
9. Pruebe que la transformación de Schwarz-Christoffel

$$f(z) = 2i\int_0^z (\xi + 1)^{-1/2}(\xi - 1)^{-1/2}\xi^{-1/2}\,d\xi$$

mapea el semiplano superior sobre el rectángulo con vértices 0, c, $c + ic$ e ic, donde $c = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)/\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$. Donde Γ es la función gamma.

10. Defina la razón cruzada de z_1, z_2, z_3 y z_4 como la imagen de z_1 bajo la transformación lineal racional que mapea $z_2 \to 1$, $z_3 \to 0$, $z_4 \to \infty$. Denote esta razón cruzada como $[z_1, z_2, z_3, z_4]$. Suponga que T es cualquier transformación lineal racional. Pruebe que T conserva la razón cruzada. Esto es,

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4].$$

11. Pruebe que $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ es la imagen de z_1 bajo la transformación lineal racional definida por

$$w = 1 - \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}\,\frac{z - z_2}{z - z_4}.$$

12. Pruebe que $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ es real si, y sólo si las z_j están en el mismo círculo o recta.

13.4 Funciones armónicas y el problema de Dirichlet

Dado un conjunto D de puntos en el plano, sea ∂D la frontera de D. Un problema de Dirichlet para D consiste en encontrar una solución de la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

para (x, y) en D, que satisfaga las condiciones en la frontera

$$u(x, y) = f(x, y) \quad \text{para } (x, y) \text{ en } \partial D.$$

Aquí f es una función dada, usualmente se supone que es continua en la frontera de D.

Una función que satisface la ecuación de Laplace en un conjunto se dice que es *armónica* en ese conjunto. Así el problema de Dirichlet para un conjunto consiste en encontrar una función que es armónica en ese conjunto y satisface los datos dados en la frontera del conjunto.

El capítulo 7 está dedicado a las soluciones de problemas de Dirichlet usando métodos del análisis real. El propósito aquí es aplicar los métodos de funciones complejas a los problemas de Dirichlet. La conexión entre un problema de Dirichlet y la teoría de funciones complejas está dada por el siguiente teorema.

TEOREMA 13.6

Sea D un conjunto abierto en el plano, y sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ diferenciable en D. Entonces u y v son armónicas en D. ■

Esto es, las partes real e imaginaria de una función compleja diferenciable son armónicas.

Prueba Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

Por tanto, u es armónica en D. La prueba de que v es armónica es similar. ■

Recíprocamente, dada una función armónica u, existe una función armónica v tal que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es diferenciable. Tal v se llama una *conjugada armónica* para u.

TEOREMA 13.7

Sea u armónica en un dominio D. Entonces, para algún v, $u(x, y) + iv(x, y)$ define una función compleja diferenciable para $z = x + iy$ en D. ■

Prueba Sea

$$g(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

para (x, y) en D. Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann y el teorema 9.6, g es diferenciable en D. Entonces, para alguna función G, $G'(z) = g(z)$ para z en D. Escriba

$$G(z) = U(x, y) + iV(x, y).$$

Ahora

$$G'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial y} = g(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Por tanto,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

en D. Entonces, para alguna constante K,

$$U(x, y) = u(x, y) + K.$$

Sea $f(z) = G(z) - K$. Entonces f es diferenciable en todos los puntos de D. Más aún,

$$f(z) = G(z) - K = U(x, y) + iV(x, y) - K = u(x, y) + iv(x, y).$$

Por tanto, puede elegir $v(x, y) = V(x, y)$, probando el teorema. ■

Dada una función armónica u, no estará interesado realmente en obtener una conjugada armónica v. Sin embargo, explotará el hecho de que existe tal función para obtener una función compleja diferenciable $f = u + iv$, dada u armónica. Esto permite aplicar los métodos de funciones complejas a los problemas de Dirichlet. Como preliminar, se obtendrán dos propiedades importantes de las funciones armónicas.

TEOREMA 13.8 *Propiedad del valor medio*

Sea u armónica en un dominio D. Sea (x_0, y_0) cualquier punto de D y sea C un círculo de radio r con centro en (x_0, y_0), contenido en D y que encierra solamente puntos de D. Entonces

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos(\theta), y_0 + r\,\mathrm{sen}(\theta))\,d\theta. \quad ■$$

Conforme θ varía de 0 a 2π $(x_0 + r\cos(\theta), y_0 + r\,\mathrm{sen}(\theta))$ se mueve una vez alrededor del círculo de radio r con centro en (x_0, y_0). La conclusión del teorema se llama la *propiedad del valor medio* debido a que establece que el valor de una función armónica en el centro de cualquier círculo en el dominio es el promedio de sus valores en el círculo.

Prueba Para alguna $v, f = u + iv$ es diferenciable en D. Sea $z_0 = x_0 + iy_0$. Por la fórmula de la integral de Cauchy,

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) = f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta}\,d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos(\theta), y_0 + r\,\mathrm{sen}(\theta))\,d\theta \\ &\quad + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(x_0 + r\cos(\theta), y_0 + r\,\mathrm{sen}(\theta))\,d\theta. \end{aligned}$$

Tomando la parte real e imaginaria de ambos lados de esta ecuación, obtiene la conclusión del teorema. ■

Si D es un dominio acotado, entonces el conjunto $\overline{D}$ que consiste en D junto con todos los puntos frontera de D se llama la *cerradura* de D. El conjunto $\overline{D}$ es cerrado y acotado por tanto, es un conjunto compacto. Si $u(x, y)$ es continua en $\overline{D}$, entonces $u(x, y)$ debe alcanzar un valor máximo en D. Si u también es armónica en D, ese máximo debe alcanzarse en un punto frontera de D. Esto recuerda el teorema del módulo máximo, del cual se sigue.

TEOREMA 13.9

Sea D un dominio acotado. Suponga que u es continua en $\overline{D}$ y armónica en D. Entonces $u(x, y)$ alcanza su valor máximo en D en un punto frontera de D. ■

Prueba Primero construya v de manera que $f = u + iv$ sea diferenciable en D. Defina

$$g(z) = e^{f(z)}$$

para todo z en $\overline{D}$. Entonces g es diferenciable en D. Por el teorema del módulo máximo, $|g(z)|$ alcanza su máximo en un punto frontera de D. Pero

$$|g(z)| = \left|e^{u(x,y)+iv(x,y)}\right| = e^{u(x,y)}.$$

Como $e^{u(x,y)}$ es una función real estrictamente creciente, $e^{u(x,y)}$ y $u(x, y)$ deben alcanzar sus valores máximos en el mismo punto. Por tanto, $u(x, y)$ debe alcanzar su máximo en un punto frontera de D. ■

Por ejemplo, $u(x, y) = x^2 - y^2$ es armónica en el disco unitario abierto $x^2 + y^2 < 1$, y continua en su cerradura $x^2 + y^2 \leq 1$. Esta función debe, por tanto, alcanzar su valor máximo para $x^2 + y^2 \leq 1$ en un punto frontera del disco, a saber en un punto para el cual $x^2 + y^2 = 1$. Este valor máximo es 1, alcanzado en $(1, 0)$ y en $(-1, 0)$.

13.4.1 Solución a problemas de Dirichlet mediante mapeos conformes

Busque usar los mapeos conformes para resolver los problemas de Dirichlet. La estrategia consiste en resolver primero el problema de Dirichlet para un disco. Una vez hecho esto, intentará resolver el problema de Dirichlet para otro dominio D construyendo un mapeo conforme entre el disco unitario y D, y aplicando este mapeo a la solución para el disco.

En la sección 7.3 se obtuvo la fórmula de la integral de Poisson para la solución del problema de Dirichlet para un disco, mediante los métodos de Fourier. Usaremos los métodos de funciones complejas para obtener una forma de esta solución que es particularmente apropiada para usar con los mapeos conformes.

Busque una función u que sea armónica en el disco $\widetilde{D} : |z| < 1$ y que tome valores dados $u(x, y) = g(x, y)$ en la frontera del círculo. Suponga que u es armónica en el disco, ligeramente más grande $|z| < 1 + \epsilon$. Si v es una conjugada armónica de u, entonces $f = u + iv$ es diferenciable en este disco. Si es necesario sume una constante, elija v tal que $v(0, 0) = 0$.

Desarrolle f en una serie de Maclaurin

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{13.7}$$

Entonces

$$\begin{aligned} u(x, y) = \text{Re}(f(x+iy)) &= \frac{1}{2}\left(f(z) + \overline{f(z)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n z^n + \overline{a_n}\overline{z}^n\right) = a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n z^n + \overline{a_n}\overline{z}^n\right). \end{aligned}$$

Ahora sea ζ en el círculo unitario γ. Entonces $|\zeta|^2 = \zeta\overline{\zeta} = 1$, así $\overline{\zeta} = 1/\zeta$ y la serie es

$$u(\zeta) = a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \zeta^n + \overline{a_n}\zeta^{-n}\right).$$

Multiplique esta ecuación por $\zeta^m/2\pi i$ e integre sobre γ. Dentro del disco abierto de convergencia, se pueden intercambiar la serie y la integral. Obtiene

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} u(\zeta)\zeta^m\, d\zeta = \frac{a_0}{2\pi i}\oint_{\gamma}\zeta^m\, d\zeta + \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\oint_{\gamma}\zeta^{n+m}\, d\zeta + \overline{a_n}\oint_{\gamma}\zeta^{-n+m}\, d\zeta\right). \tag{13.8}$$

Recuerde que

$$\oint_{\gamma}\zeta^k\, d\zeta = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq -1 \\ 2\pi i & \text{si } k = -1 \end{cases}.$$

Por tanto, si $m = -1$ en la ecuación (13.8), tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma u(\zeta)\frac{1}{\zeta}\,d\zeta = a_0.$$

Si $m = -n-1$ con $n = 1, 2, 3, \ldots$, obtiene

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma u(\zeta)\zeta^{-n-1} = \frac{1}{2}a_n.$$

Sustituya estos coeficientes dentro de la ecuación (13.7) para obtener

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma u(\zeta)\frac{1}{\zeta}\,d\zeta + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi i}\oint_\gamma u(\zeta)\zeta^{-n-1}\right)d\zeta\, z^n$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n\right]\frac{u(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta.$$

Como $|z| < 1$ y $|\zeta| = 1$, entonces $|z/\zeta| < 1$ y la serie geométrica en esta ecuación converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n = \frac{z/\zeta}{1 - z/\zeta} = \frac{z}{\zeta - z}.$$

Entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma u(\zeta)\left[1 + \frac{2z}{\zeta - z}\right]\frac{1}{\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma u(\zeta)\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right)\frac{1}{\zeta}\,d\zeta.$$

Si $u(\zeta) = g(\zeta)$, son los valores dados para u en la frontera del disco unitario, entonces, para $|z| < 1$,

$$u(x, y) = \mathrm{Re}[f(z)] = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma g(\zeta)\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right)\frac{1}{\zeta}\,d\zeta\right). \qquad (13.9)$$

Esta es una fórmula integral para la solución del problema de Dirichlet para el disco unitario. Queda como ejercicio para el alumno recuperar la fórmula de la integral de Poisson a partir de esta expresión haciendo $z = re^{i\theta}$ y $\zeta = e^{i\varphi}$.

La ecuación (13.9) es apropiada para resolver ciertos problemas de Dirichlet mediante mapeos conformes. Suponga que conoce un mapeo conforme, uno a uno y diferenciable $T : D \to \widetilde{D}$, donde $\widetilde{D}$ es el disco unitario $|w| < 1$ en el plano w. Suponga que T mapea C, la frontera de D, sobre el círculo unitario $\widetilde{C}$ que acota a $\widetilde{D}$ y que T^{-1} también es un mapeo conforme diferenciable.

Para continuar esta discusión, use ζ para denotar un punto arbitrario de $\widetilde{C}$, ξ para un punto en C, y $(\tilde{x}, \tilde{y})$ para un punto en el plano w (figura 13.39).

Ahora considere un problema de Dirichlet para D:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para } (x, y) \text{ en } D,$$
$$u(x, y) = g(x, y) \quad \text{para } (x, y) \text{ en } C.$$

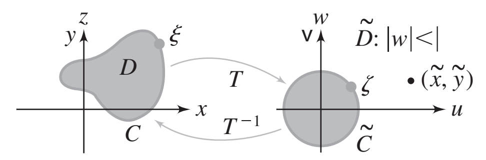


FIGURA 13.39

Si $w = T(z)$, entonces $z = T^{-1}(w)$ y defina

$$\widetilde{g}(w) = g(T^{-1}(w)) = g(z).$$

en el plano w, ahora tiene un problema de Dirichlet para el disco unitario:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para } (\widetilde{x}, \widetilde{y}) \text{ en } \widetilde{D},$$
$$\widetilde{u}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \widetilde{g}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \quad \text{para } (\widetilde{x}, \widetilde{y}) \text{ en } \widetilde{C}.$$

Por la ecuación (13.9) la solución de este problema para el disco unitario es la parte real de

$$\widetilde{f}(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\widetilde{C}} \widetilde{g}(\zeta) \left(\frac{\zeta + w}{\zeta - w} \right) \frac{1}{\zeta} \, d\zeta.$$

Finalmente, recuerde que T mapea C sobre $\widetilde{C}$, sea $\zeta = T(\xi)$ para ξ en C para obtener

$$u(x, y) = \text{Re}[f(z)] = \text{Re}\left[\frac{1}{2\pi i} \int_C \widetilde{g}(T(\xi)) \left(\frac{T(\xi) + T(z)}{T(\xi) - T(z)} \right) \frac{1}{T(\xi)} T'(\xi) \, d\xi \right].$$

Como $\widetilde{g}(T(\xi)) = g(T^{-1}(T(\xi)) = g(\xi)$, tiene la solución

$$u(x, y) = \text{Re}[f(z)] = \text{Re}\left[\frac{1}{2\pi i} \int_C g(\xi) \left(\frac{T(\xi) + T(z)}{T(\xi) - T(z)} \right) \frac{T'(\xi)}{T(\xi)} \, d\xi \right]. \tag{13.10}$$

Esto resuelve el problema de Dirichlet para el dominio original D.

Para ilustrar esta técnica, resuelva el problema de Dirichlet para el semiplano derecho:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para } x > 0, -\infty < x < \infty,$$
$$u(0, y) = g(y) \quad \text{para } -\infty < y < \infty.$$

Necesita un mapeo conforme del semiplano derecho al disco unitario. Hay muchos de tales mapeos. Por el ejemplo 13.16, use

$$w = T(z) = -i\left(\frac{z - 1}{z + 1} \right).$$

Calcule

$$T'(z) = \frac{-2i}{(z + 1)^2}.$$

De la ecuación (13.10), la solución es la parte real de

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C u(\xi) \left(\frac{-i(\xi - 1)/(\xi + 1) - i(z - 1)/(z + 1)}{-i(\xi - 1)/(\xi + 1) + i(z - 1)/(z + 1)} \right) \frac{1}{-i(\xi - 1)/(\xi + 1)} \frac{-2i}{(\xi + 1)^2} \, d\xi$$
$$= \frac{1}{\pi i} \int_C u(\xi) \left(\frac{\xi z - 1}{\xi - z} \right) \frac{1}{\xi^2 - 1} \, d\xi.$$

La frontera C del semiplano derecho es el eje imaginario y no es una curva cerrada. Parametrice C como $\xi = (0, t) = it$, con t variando de ∞ a $-\infty$ para obtener la orientación positiva en C (conforme camina sobre el eje, D está sobre su hombro izquierdo). Obtiene

$$f(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{\infty}^{-\infty} u(0,t)\left(\frac{itz-1}{it-z}\right)\left(\frac{-1}{1+t^2}\right) idt$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(0,t)\left(\frac{itz-1}{it-z}\right)\left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt.$$

La solución es la parte real de esta integral. Ahora t, $u(0, \xi)$ y $1/(1+t^2)$ son reales, de manera que concéntrese en el término que contiene a i y $z = x + iy$:

$$\frac{itz-1}{it-z} = \frac{itx-ty-1}{it-x-iy} = \frac{itx-ty-1}{it-x-iy}\frac{-it-x+iy}{-it-x+iy}$$
$$= \frac{tx(t-y) - itx^2 + ity(t-y) + txy + i(t-y) + x}{x^2 + (t-y)^2}.$$

La parte real de esta expresión es

$$\frac{x(1+t^2)}{x^2+(t-y)^2}.$$

Por tanto,

$$u(x, y) = \text{Re}[f(z)] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(0,t)\frac{x(1+t^2)}{x^2+(t-y)^2}\frac{1}{1+t^2}\, dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\frac{x}{x^2+(t-y)^2}\, dt.$$

Esta es una fórmula integral para la solución del problema de Dirichlet para el semiplano derecho.

SECCIÓN 13.4 PROBLEMAS

1. Usando los métodos de las funciones complejas, escriba una solución integral para el problema de Dirichlet para el semiplano superior $\text{Im}(z) > 0$.

2. Usando los métodos de las funciones complejas, escriba una solución integral para el problema de Dirichlet para el primer cuadrante $\text{Re}(z) > 0$, $\text{Im}(z) > 0$, si las condiciones en la frontera son $u(x, 0) = f(x)$ y $u(0, y) = 0$.

3. Escriba una solución integral para el problema de Dirichlet para el disco $|z - z_0| < R$.

4. Escriba una fórmula para la solución del problema de Dirichlet para el semiplano derecho si la condición en la frontera está dada por

$$u(0, y) = \begin{cases} 1 & \text{para } -1 \le y \le 1 \\ 0 & \text{para } |y| > 1. \end{cases}$$

5. Escriba una fórmula para la solución del problema de Dirichlet para el disco unitario si la condición en la frontera está dada por $u(x, y) = x - y$ para (x, y) en el círculo unitario.

6. Escriba una fórmula para la solución del problema de Dirichlet para el disco unitario si la condición en la frontera está dada por

$$u(e^{i\theta}) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \le \theta \le \pi/4 \\ 0 & \text{para } \pi/4 < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

7. Escriba una fórmula para la solución del problema de Dirichlet para la banda $-1 < \text{Im}(z) < 1$, $\text{Re}(z) > 0$ si la condición en la frontera está dada por

$$u(x, 1) = u(x, -1) = 0 \quad \text{para } 0 < x < \infty$$
$$u(0, y) = 1 - |y| \quad \text{para } -1 \le y \le 1.$$

8. Escriba una fórmula integral para la solución del problema de Dirichlet para la banda $-1 < \text{Re}(z) < 1$, $\text{Im}(z) > 0$ si la condición en la frontera está dada por

$$u(x, 0) = 1 \quad \text{para } -1 < x < 1$$
$$u(-1, y) = u(1, y) = e^{-y} \quad \text{para } 0 < y < \infty.$$

13.5 Modelos de funciones complejas de flujo de fluido plano

Aqui se trata cómo las funciones complejas y la integración son usadas en la modelación y el análisis del flujo de los fluidos.

Considere un fluido incompresible, tal como el agua bajo condiciones normales. Suponga que tiene un campo de velocidad $\mathbf{V}(x, y)$ en el plano y que el flujo depende solamente de dos variables, supone que el flujo es el mismo en todos los planos paralelos al plano complejo. Un flujo así se llama *plano paralelo*. Este vector velocidad también se supone independiente del tiempo, esta circunstancia se describe diciendo que el flujo es *estacionario*.

Escriba

$$\mathbf{V}(x, y) = u(x, y)\mathbf{i} + v(x, y)\mathbf{j}.$$

Debido a que puede identificar vectores y números complejos, escriba, por un abuso moderado de notación, el vector velocidad como una función compleja

$$V(z) = V(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Dado $V(z)$, parece que el plano complejo está dividido en dos conjuntos. El primero es el dominio D en donde está definido V. El complemento de D consiste en todos los números complejos que no están en D. Piense en el complemento como canales contenedores confinando el fluido a D o como barreras por las cuales el fluido no puede correr. Esto permite modelar el flujo de un fluido por medio de una variedad de configuraciones y alrededor de barreras de distintas formas.

Suponga que γ es una trayectoria cerrada en D. Del análisis vectorial, si parametriza γ por $x = x(s)$, $y = y(s)$, con s la longitud de arco a lo largo de la trayectoria, entonces el vector $x'(s)\mathbf{i} + y'(s)\mathbf{j}$ es un vector tangente unitario de γ, y

$$(u\mathbf{i} + v\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j}\right) ds = udx + vdy.$$

Este es el producto punto de la velocidad con la tangente a la trayectoria, por lo cual interpreta

$$\oint_\gamma udx + vdy.$$

como una medida de la velocidad del fluido a lo largo de γ. El valor de esta integral se llama la *circulación* del fluido a lo largo de γ.

El vector $-y'(s)\mathbf{i} + x'(s)\mathbf{j}$ es un vector unitario normal a γ, siendo perpendicular al vector tangente (figura 13.40). Por tanto

$$-\oint_\gamma (u\mathbf{i} + v\mathbf{j}) \cdot \left(-\frac{dy}{dx}\mathbf{i} + \frac{dx}{ds}\mathbf{j}\right) ds = \oint_\gamma -vdx + vdy.$$

es el negativo de la integral de la componente normal de la velocidad a lo largo de la trayectoria. Cuando esta integral no es cero, se llama el *flujo* del fluido a través de la trayectoria. Esto da una medida del

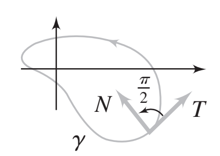


FIGURA 13.40

flujo del fluido a través de γ fuera de la región acotada por γ. Cuando este flujo es cero para toda trayectoria cerrada en el dominio del fluido, éste se llama *solenoidal*.

Un punto $z_0 = (x_0, y_0)$ es un remolino del fluido si la circulación tiene un valor constante distinto de cero en toda trayectoria cerrada alrededor de z_0 en el interior de algún disco agujereado $0 < |z - z_0| < r$. El valor constante de la circulación es la *energía del remolino*.

Si $\oint_\gamma - vdx + udy$ tiene el mismo valor positivo k para toda trayectoria cerrada alrededor de z_0 en algún disco agujereado alrededor de z_0, entonces llamamos a z_0 una *fuente* de energía k; si k es negativo, z_0 es un *sumidero* de energía $|k|$.

La conexión entre el campo de velocidad de un fluido y las funciones complejas es proporcionado por el siguiente.

TEOREMA 13.10

Sean u y v continuas con primera y segunda derivadas parciales continuas en un dominio simplemente conexo D. Suponga que $u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ es irrotacional y solenoidal en D. Entonces u y $-v$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en D, y $f(z) = u(x, y) - iv(x, y)$ es una función compleja diferenciable en D.

Recíprocamente, si u y $-v$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en D, entonces $u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ define un flujo irrotacional, solenoidal en D.

Prueba Sea γ cualquier trayectoria cerrada en D. Si M es el interior de γ, entonces todo punto en M también está en D por la hipótesis que D es simplemente conexo. Por el teorema de Green,

$$\oint_\gamma udx + vdy = \iint_M \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dA = 0$$

ya que el flujo es irrotacional. Pero el flujo también es solenoidal, de manera que, nuevamente por el teorema de Green,

$$\oint_\gamma -vdx + udy = \iint_M \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dA = 0.$$

Debido a que M puede ser cualquier conjunto de puntos en D acotado por una trayectoria cerrada, los integrandos en ambas de estas integrales dobles deben ser cero en todo D, de donde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(-v) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}(-v).$$

Por el teorema 9.6, $f(z) = u(x, y) - iv(x, y)$ es diferenciable en D.

El recíproco se sigue por un argumento similar. ■

El teorema 13.9 nos enseña algo sobre los flujos irrotacionales y solenoidales. Si el flujo es irrotacional, entonces

$$rot(u\mathbf{i} + v\mathbf{j}) = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \mathbf{0},$$

como se muestra en la prueba del teorema. Este rot es el vector normal al plano del flujo. El rot de $u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ es dos veces la velocidad angular de la partícula del fluido en (x, y). El hecho que este rot es cero para un flujo irrotacional significa que las partículas del fluido pueden experimentar traslaciones y distorsiones en su movimiento, pero no rotaciones. No hay efecto de remolino en el fluido.

Si el flujo es solenoidal, entonces

$$div(u\mathbf{i} + v\mathbf{j}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Otra conexión entre los flujos y las funciones complejas es proporcionada por el siguiente.

TEOREMA 13.11

Sea f una función diferenciable definida en un dominio D. Entonces $\overline{f'(z)}$ es un flujo irrotacional, solenoidal en D.

Recíprocamente, si $\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ es un campo vectorial irrotacional, solenoidal en un dominio simplemente conexo D, entonces existe una función compleja diferenciable f definida en D tal que $\overline{f'(z)} = V$. Más aún, si $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, entonces

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = u, \frac{\partial\varphi}{\partial y} = v, \frac{\partial\psi}{\partial x} = -v \quad \text{y} \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = u. \blacksquare$$

Queda la prueba de este resultado al alumno. En vista de que $\overline{f'(z)}$ es la velocidad del flujo, f es un *potencial complejo* del flujo.

El teorema 13.11 implica que cualquier función diferenciable $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ definida en un dominio simplemente conexo determina un flujo irrotacional y solenoidal.

$$\overline{f'(z)} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \overline{u(x, y) - iv(x, y)} = u(x, y) + iv(x, y).$$

Llame φ al *potencial de velocidad* del flujo, y las curvas $\varphi(x, y) = k$ se llaman las *curvas equipotenciales*. La función ψ se llama *función de corriente* del flujo, y las curvas $\psi(x, y) = c$ se llaman las *líneas de corriente*.

Puede pensar en $w = f(z)$ como un mapeo conforme siempre que $f'(z) \neq 0$. Un punto en donde $f'(z) = 0$ se llama un *punto estacionario* del flujo. Piense en f como un mapeo en el plano w, tiene

$$w = f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = \alpha + i\beta.$$

Las curvas equipotenciales $\varphi(x, y) = k$ se mapean bajo f en rectas verticales $\alpha = k$, y las líneas de corriente $\psi(x, y) = c$ se mapean en rectas horizontales $\beta = c$. Como estos conjuntos de rectas verticales y horizontales son mutuamente ortogonales en el plano w, las líneas de corriente y las curvas equipotenciales en el plano z también forman familias ortogonales. Cada línea de corriente es ortogonal a cada curva equipotencial en cualquier punto donde se corten. Esta conclusión falla en un punto estacionario, donde el mapeo puede no ser conforme.

A lo largo de una curva equipotencial $\varphi(x, y) = k$,

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = udx + vdy = 0.$$

Ahora $u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ es la velocidad del flujo en (x, y) y $x'(s)\mathbf{i} + y'(s)\mathbf{j}$ es una tangente unitaria a la curva equipotencial en (x, y). Como el producto de estos dos vectores es cero del hecho que $d\varphi = 0$ a lo largo de la curva equipotencial, concluya que la velocidad es ortogonal a la curva equipotencial en (x, y), siempre que (x, y) no sea un punto estacionario.

Análogamente, a lo largo de una línea de corriente $\psi(x, y) = c$,

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = -vdx + udy = 0.$$

de manera que la normal al vector velocidad es ortogonal a la línea de corriente. Esto significa que la velocidad es tangente a la línea de corriente y justifica la interpretación de que la partícula del fluido en (x, y) se está moviendo en la dirección de la línea de corriente en ese punto. Por tanto, interprete las líneas de corriente como las trayectorias de las partículas en el fluido. Si se colocara en una partícula podría cabalgar a lo largo de una línea de corriente. Por esta razón, las gráficas de las líneas de corriente forman una figura de los movimientos de las partículas del fluido.

El resto de esta sección está dedicado a algunas ilustraciones de estas ideas.

EJEMPLO 13.23

Sea $f(z) = -Ke^{i\theta}z$, en donde K es una constante positiva y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Escriba

$$\begin{aligned} f(z) &= -K[\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta)][x + iy] \\ &= -K[x\cos(\theta) - y\,\text{sen}(\theta)] - iK[y\cos(\theta) + x\,\text{sen}(\theta)]. \end{aligned}$$

Si $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, entonces

$$\varphi(x, y) = -K[x\cos(\theta) - y\,\text{sen}(\theta)]$$

y

$$\psi(x, y) = -K[y\cos(\theta) + x\,\text{sen}(\theta)].$$

Las curvas equipotenciales son gráficas de

$$\varphi(x, y) = -K[x\cos(\theta) - y\,\text{sen}(\theta)] = \text{constante}.$$

Como K es constante, las curvas equipotenciales son gráficas de

$$x\cos(\theta) - y\,\text{sen}(\theta) = k,$$

o

$$y = \cot(\theta)x + b,$$

en donde $b = k\csc(\theta)$ es constante. Estas son rectas con pendiente $\cot(\theta)$.

Las líneas de corriente son gráficas de

$$y = -\tan(\theta)x + d,$$

rectas con pendiente $-\tan(\theta)$. Estas rectas forman un ángulo $\pi - \theta$ con el eje real positivo, como en la figura 13.41. Estas son las trayectorias del flujo, que pueden pensarse como moviéndose a lo largo de estas rectas. Las líneas de corriente y las curvas equipotenciales son ortogonales, siendo sus pendientes recíprocas negativas.

Ahora calcule

$$\overline{f'(z)} = \overline{-Ke^{i\theta}} = -Ke^{-i\theta}.$$

Esto implica que la velocidad es de magnitud constante K.

En resumen, f modela un flujo uniforme con velocidad de magnitud constante K y forma un ángulo $\pi - \theta$ con el eje real positivo, como en la figura 13.41. ■

EJEMPLO 13.24

Considere el flujo representado por el potencial complejo $f(z) = z^2$. Esta función es diferenciable para todo z, pero $f'(0) = 0$, así el origen es un punto estacionario. Vea qué efecto tiene esto en el flujo y determine las trayectorias.

Con $z = x + iy$, $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$, así

$$\varphi(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{y} \quad \psi(x, y) = 2xy.$$

Las curvas equipotenciales son las hipérbolas

$$x^2 - y^2 = k$$

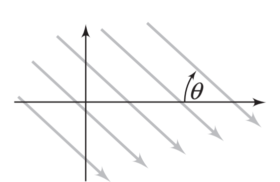


FIGURA 13.41
Líneas de corriente del flujo con potencial complejo $f(z) = -Ke^{i\theta}z$.

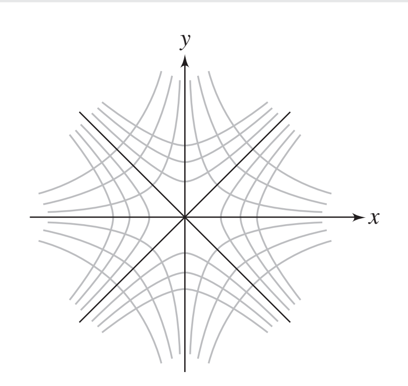


FIGURA 13.42
Curvas equipotenciales y líneas de corriente del flujo con potencial complejo $f(z) = z^2$.

si $k \neq 0$. Las líneas de corriente son las hipérbolas

$$xy = c$$

si $c \neq 0$. En la figura 13.42 se muestran algunas curvas de estas familias.

Si $k = 0$ las curvas equipotenciales son la gráfica de $x^2 - y^2 = 0$, formada por dos rectas $y = x$ y $y = -x$ por el origen. Si $c = 0$ las líneas de corriente son los ejes $x = 0$ y $y = 0$.

La velocidad del flujo es $\overline{f'(z)} = 2\overline{z}$. f modela un flujo no uniforme con velocidad de magnitud $2|z|$ en z. Puede interpretar este flujo como un fluido moviéndose a lo largo de las líneas de corriente. En cualquier cuadrante, las partículas se mueven a lo largo de las hipérbolas $xy = c$, con los ejes actuando como las barreras del flujo (piense en los lados de un recipiente que contiene el fluido). ■

EJEMPLO 13.25

Analizará el potencial complejo

$$f(z) = \frac{iK}{2\pi} Log(z).$$

Aquí K es un número positivo y $Log(z)$ denota esa rama del logaritmo definida por $Log(z) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i\theta$, donde θ es el argumento de z en $0 \leq \theta < 2\pi$ para $z \neq 0$. Si $z = x + iy$, entonces

$$f(z) = \frac{iK}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i\theta\right) = -\frac{K\theta}{2\pi} + \frac{iK}{4\pi}\ln(x^2 + y^2).$$

Ahora

$$\varphi(x, y) = -\frac{K}{2\pi}\theta \quad \text{y} \quad \psi(x, y) = \frac{K}{4\pi}\ln(x^2 + y^2).$$

Las curvas equipotenciales son gráficas de $\theta =$ constante, y éstas son las semirectas desde el origen y que forman un ángulo θ con el eje real positivo. Las líneas de corriente son gráficas de $\psi(x, y) =$ constante, y éstas son círculos alrededor del origen. Como las líneas de corriente son trayectorias del fluido, las partículas se mueven en círculos alrededor del origen. En la figura 13.43 se muestran algunas líneas de corriente y curvas equipotenciales.

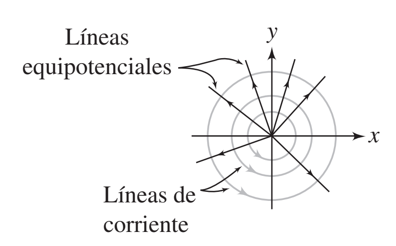


FIGURA 13.43 *Líneas de corriente y líneas equipotenciales del flujo con potencial complejo $f(z) = (iK/2\pi)Log(z)$.*

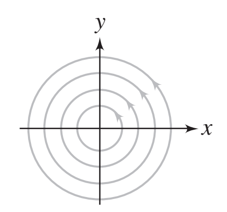


FIGURA 13.44 *Líneas de corriente del flujo con potencial complejo $f(z) = (iK/2\pi)Log(z)$.*

Es fácil verificar que $f'(z) = (iK/2\pi)(1/z)$ si $z \neq 0$. En un círculo $|z| = r$, la magnitud de la velocidad del fluido es

$$\left|\overline{f'(z)}\right| = \frac{K}{2\pi}\frac{1}{|z|} = \frac{K}{2\pi r}.$$

La velocidad crece conforme $r \to 0$, de manera que tiene partículas del fluido arremolinándose en el origen, con velocidad creciente hacia el centro (origen) (figura 13.44). El origen es un remolino del flujo.

Para calcular la circulación del flujo alrededor del origen, escriba

$$\overline{f'(z)} = -\frac{iK}{2\pi}\frac{1}{\overline{z}} = -\frac{iK}{2\pi}\frac{z}{|z|^2} = \frac{K}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} - \frac{iK}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} = u + iv.$$

Si γ es el círculo de radio r alrededor del origen, entonces en γ, $x = r\cos(\theta)$ y $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$, así

$$\begin{aligned}\oint_\gamma u\,dx + v\,dy &= \int_0^{2\pi}\left[\frac{K}{2\pi}\frac{r\,\mathrm{sen}(\theta)}{r^2}(-r\,\mathrm{sen}(\theta)) - \frac{K}{2\pi}\frac{r\cos(\theta)}{r^2}(r\cos(\theta))\right]d\theta \\ &= \frac{K}{2\pi}\int_0^{2\pi} -d\theta = -K.\end{aligned}$$

Este es el valor de la circulación en cualquier círculo alrededor del origen.

Por un cálculo semejante, obtenga

$$\oint_\gamma -v\,dx + u\,dy = 0,$$

así el origen no es ni una fuente ni un sumidero.

En este ejemplo restringe $|z| > R$ y piense en un cilindro sólido alrededor del origen como barrera, con el fluido arremolinándose alrededor de este cilindro (figura 13.45). ■

EJEMPLO 13.26

Puede intercambiar los papeles de las líneas de corriente y las curvas equipotenciales en el ejemplo anterior haciendo

$$f(z) = K\,Log(z),$$

con K una constante positiva. Ahora

$$f(z) = \frac{K}{2}\ln(x^2+y^2) + iK\theta,$$

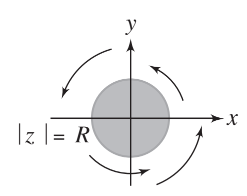


FIGURA 13.45 *Flujo alrededor de una barrera cilíndrica de radio R.*

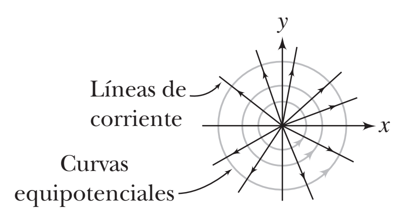


FIGURA 13.46 *Curvas equipotenciales y líneas de corriente para el potencial* $f(z) = K\,Log(z)$.

así

$$\varphi(x, y) = \frac{K}{2}\ln(x^2 + y^2) \quad \text{y} \quad \psi(x, y) = K\theta.$$

Las curvas equipotenciales son círculos alrededor del origen y las líneas de corriente son semirectas que salen del origen (figura 13.46). Como deben ser, estos círculos y líneas forman familias ortogonales de curvas. La velocidad de este flujo es

$$\overline{f'(z)} = \frac{K}{\overline{z}} = K\frac{x}{x^2 + y^2} + iK\frac{y}{x^2 + y^2} = u + iv.$$

Sea γ un círculo de radio r alrededor del origen. Ahora encuentre que

$$\oint_\gamma u dx + v dy = 0$$

y

$$\oint_\gamma -v dx + u dy = 2\pi K.$$

El origen es una fuente de energía $2\pi K$. Piense en partículas del fluido manando desde el origen, moviéndose a lo largo de rectas con velocidad decreciente conforme crece su distancia del origen. ■

EJEMPLO 13.27

Modelará un flujo alrededor de una barrera elíptica. Del ejemplo 13.25, el potencial complejo $f(z) = (iK/2\pi)Log(z)$ para $|z| > R$ modela el flujo con circulación $-K$ alrededor de una barrera cilíndrica de radio R alrededor del origen. Para modelar el flujo alrededor de una barrera elíptica, mapee el círculo $|z| = R$ conformemente en la elipse. Para esto, considere el mapeo

$$w = z + \frac{a^2}{z},$$

en donde a es una constante positiva. Este se llama una *transformación de Joukowski*, y se usa para analizar flujo de fluido alrededor de las alas de un aeroplano debido a las imágenes distintas del círculo que resulta de hacer distintas elecciones de a.

Sean $z = x + iy$ y $w = X + iY$. El círculo $x^2 + y^2 = R^2$ es mapeado en la elipse

$$\frac{X^2}{1 + (a/R)^2} + \frac{Y^2}{1 - (a/R)^2} = R^2,$$

siempre que $a \neq R$. En la figura 13.47 se muestra esta elipse. Si $a = R$, el círculo mapea en $[-2a, 2a]$ en el eje real.

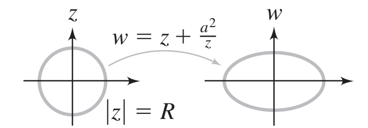


FIGURA 13.47 *Transformación de Joukowski mapeando un círculo en una elipse.*

Resuelva para z en la transformación de Joukowski. Como es una ecuación cuadrática, tiene dos soluciones, y elija

$$z = \frac{w + \sqrt{w^2 - 4a^2}}{2}.$$

Componga este mapeo con la función compleja potencial para la barrera circular en el ejemplo 13.25. Obtiene

$$F(w) = f(z(w)) = \frac{iK}{2\pi}\, Log\left(\frac{w + \sqrt{w^2 - 4a^2}}{2}\right).$$

Esto es un potencial complejo para el flujo en el plano w alrededor de una barrera elíptica si $R > a$, y alrededor del plato plano $-2a \leq X \leq 2a$, $Y = 0$ si $R = a$. ■

Esta sección concluye con una aplicación de integración compleja a un flujo de fluido. Suponga que f es un potencial complejo para un flujo alrededor de una barrerra cuya frontera es una trayectoria cerrada γ. Suponga que el empuje del fluido fuera de la barrera está dado por el vector $A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$. Entonces un teorema de Blasius asegura que

$$A - iB = \frac{1}{2} i\rho \oint_\gamma [f'(z)]^2\, dz,$$

en donde ρ es la densidad constante del fluido. Más aún, el momento del empuje alrededor del origen está dado por

$$\text{Re}\left(-\frac{1}{2}\rho \oint_\gamma z[f'(z)]^2\, dz\right).$$

En la práctica, estas integrales usualmente son evaluadas mediante el teorema del residuo.

SECCIÓN 13.5 PROBLEMAS

1. Analice el flujo dado por el potencial complejo $f(z) = az$, en donde a es una constante compleja distinta de cero. Dibuje algunas curvas equipotenciales y líneas de corriente, y determine la velocidad y si el flujo tiene alguna fuente o sumidero.
2. Analice el flujo con potencial $f(z) = z^3$. Dibuje algunas curvas equipotenciales y líneas de corriente.
3. Dibuje algunas curvas equipotenciales y líneas de corriente para el flujo con potencial $f(z) = \cos(z)$.
4. Dibuje algunas curvas equipotenciales y líneas de corriente para el flujo con potencial $f(z) = z + iz^2$.
5. Analice el flujo con potencial $f(z) = K\, Log(z - z_0)$, en donde K es una constante real distinta de cero y z_0 es un número complejo dado. Pruebe que z_0 es una fuente para este flujo si $K > 0$ y un sumidero si $K < 0$. Dibuje algunas curvas equipotenciales y líneas de corriente del flujo.
6. Analice el flujo con potencial $f(z) = K\, Log(z - a)/(z - b)$, donde K es un número real distinto de cero y a y b son números complejos distintos. Dibuje algunas curvas equipotenciales y líneas de corriente para este flujo.
7. Sea $f(z) = k(z + 1/z)$, con k un real constante distinto de cero. Dibuje algunas curvas equipotenciales y líneas de corriente para este flujo. Pruebe que f modela el flujo alrededor de la mitad superior del círculo unitario.
8. Sea

$$f(z) = \frac{m - ik}{2\pi}\, Log\left(\frac{z-a}{z-b}\right),$$

en donde m y k son números reales distintos de cero y a y b son números complejos distintos. Pruebe que este flujo tiene una fuente o sumidero de energía m y un remolino de energía k en ambos a y b. (Un punto en donde se combinan las propiedades de fuente [o sumidero] y remolino se llama un *remolino espiral*). Dibuje algunas curvas equipotenciales y líneas de corriente para este flujo.

9. Analice el flujo con potencial

$$f(z) = k\left(z + \frac{1}{z}\right) + \frac{ib}{2\pi}\,Log(z),$$

en donde k y b con constantes reales distintas de cero. Dibuje algunas curvas equipotenciales y líneas de corriente para este fluido.

10. Analice el flujo con potencial

$$f(z) = iKa\sqrt{3}\,Log\left(\frac{2z - ia\sqrt{3}}{2z + ia\sqrt{3}}\right),$$

con K y a constantes positivas. Pruebe que este potencial modela un flujo irrotacional alrededor del cilindro $4x^2 + 4(y - a)^2 = a^2$ con una frontera plana a lo largo del eje y. Dibuje algunas curvas equipotenciales y líneas de corriente para este flujo.

11. Use el teorema de Blasius para probar que la fuerza por unidad de anchura en el cilindro en el problema 10 tiene componente vertical $2\sqrt{3}\pi\rho a K^2$, con ρ la densidad constante del fluido.

LA SERIE DE FOURIER DE UNA FUNCION CONVERGENCIA DE UN SERIE DE FOURIER SERIE DE FO EN COSENOS EN SENOS INTEGRA

CAPÍTULO 14

Matrices y sistemas lineales

14.1 Matrices

Una matriz n por m (o $n \times m$) matriz es un arreglo rectangular de objetos dispuestos en n filas y m columnas.

Vamos a denotar las matrices en negritas. Por ejemplo,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \pi \\ 1 & \sqrt{2} & -5 \end{pmatrix}$$

es una matriz de 2 × 3 (dos filas, tres columnas) y

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} e^t & 1 & -1 & \cos(t) \\ 0 & 4t & -7 & 1-t \end{pmatrix}$$

es una matriz de 2 × 4.

El objeto que se encuentra en la fila i y la columna j de una matriz se llama su elemento i, j. A menudo escribimos $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, lo que significa que el elemento i, j de $\mathbf{A}$ es a_{ij}. En las matrices de arriba, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, $a_{11} = 2$, $a_{22} = \sqrt{2}$, $a_{23} = -5$, $b_{14} = \cos(t)$ y $b_{21} = 0$.

Si los elementos de una matriz $n \times m$ son números reales, entonces cada fila puede ser considerada como un vector en R^m y cada columna como un vector en R^n. En el primer ejemplo, $\mathbf{A}$ tiene dos filas que son vectores en R^3 y columnas que forman tres vectores en R^2. Este punto de vista de vectores es a menudo útil en el tratamiento de matrices.

Dos matrices $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ y $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ son iguales si tienen el mismo número de filas, el mismo número de columnas, y para cada i y j, $a_{ij} = b_{ij}$. Las matrices de igualdad tienen las mismas dimensiones y los objetos que se encuentran en las mismas posiciones de las matrices deben ser iguales.

Hay tres operaciones que vamos a definir para las matrices: suma de matrices, multiplicación por un escalar, y multiplicación de matrices. Estas se definen como sigue.

Suma de matrices

Si $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ y $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ son ambas matrices $n \times m$, entonces su suma se define como la matriz $n \times m$ $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]$.

Añadimos dos matrices de las mismas dimensiones agregando objetos en los mismos lugares en las matrices. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 8 & 12 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 12 & 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

Podemos pensar en esto como la adición de vectores fila respectivos, o vectores columna respectivos, de la matriz.

Multiplicación por un escalar

Multiplique una matriz por una cantidad escalar (por ejemplo un número o función) multiplicando cada elemento de la matriz por el escalar. Si $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, entonces Si $c\mathbf{A} = [ca_{ij}]$.

$$\sqrt{2}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2t \\ \operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \\ 2t\sqrt{2} \\ \sqrt{2}\operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix}.$$

Esto es lo mismo que multiplicar cada vector fila o cada vector columna, por c. Como otro ejemplo,

$$\cos(t)\begin{pmatrix} 2 & e^t \\ \sin(t) & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(t) & e^t\cos(t) \\ \cos(t)\operatorname{sen}(t) & 4\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Multiplicación de matrices

Si $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ es $n \times k$ y $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ es $k \times m$. Entonces el producto $\mathbf{AB}$ es la matriz $n \times m$ cuyo elemento i, j es

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj},$$

o

$$\sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sj}.$$

Este es el producto escalar de la fila i de $\mathbf{A}$ con la columna j de $\mathbf{B}$ (ambos son vectores en R^k):

elemento i, j de $\mathbf{AB}$ = (fila i de $\mathbf{A}$) · (columna j de $\mathbf{B}$)

$$= (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ik}) \cdot (b_{1j}, b_{2j}, \cdots, b_{kj})$$
$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}.$$

Esto aclara por qué el número de columnas de **A** debe ser igual al número de filas de **B** para el producto **AB** por definir. Sólo podemos llevar el producto escalar de dos vectores de la misma dimensión.

EJEMPLO 14.1

Si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aquí **A** es 2×2 y **B** es de 2×3, para que podamos calcular **AB**, que es de 2×3 (número de filas de **A**, número de columnas de **B**). En términos de productos escalares de filas con columnas,

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} <1,3> \cdot <1,2> & <1,3> \cdot <1,1> & <1,3> \cdot <3,4> \\ <2,5> \cdot <1,2> & <2,5> \cdot <1,1> & <2,5> \cdot <3,4> \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 4 & 15 \\ 12 & 7 & 26 \end{pmatrix}.$$

En este ejemplo, **BA** no se define porque el número de columnas de **B** no es igual al número de filas de **A**.

EJEMPLO 14.2

Si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

Debido a que **A** es 2×4 y **B** es 4×2, entonces **AB** está definido y es 2×2:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} <1,1,2,1> \cdot <-1,2,1,12> & <1,1,2,1> \cdot <8,1,1,6> \\ <4,1,6,2> \cdot <-1,2,1,12> & <4,1,6,2> \cdot <8,1,1,6> \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15 & 17 \\ 28 & 51 \end{pmatrix}.$$

En este ejemplo, **BA** también se define y es una matriz de 4×4:

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 7 & 46 & 15 \\ 6 & 3 & 10 & 4 \\ 5 & 2 & 8 & 3 \\ 36 & 18 & 60 & 24 \end{pmatrix}.$$

Aun cuando ambos, **AB** y **BA**, están definidas, estas matrices pueden no ser iguales, y pueden incluso no tener las mismas dimensiones. La multiplicación de matrices es conmutativa.

Vamos a enumerar algunas de las propiedades de estas operaciones con matrices.

TEOREMA 14.1

Sean **A**, **B** y **C** matrices. Entonces, siempre que se definan las operaciones indicadas:

1. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ (la suma de matrices es conmutativa)
2. $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$.
3. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{AC}$.
4. $(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$.
5. $c\mathbf{AB}=(c\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}(c\mathbf{B})$ para cualquier escalar c.

Prueba Las pruebas de estas conclusiones son evidentes. Para demostrarlas, vamos a probar la operación (3):

elemento i, j de **A** (**B** + **C**) = (fila i de **A**) · (columna j de **B** + **C**)

= (fila i de **A**) · (columna j de **B** + columna j de **C**)

= (fila i de **A**) · (columna j de **B**) + ((fila i de **A**) · (columna j de **C**)

= (elemento i, j de **AB**) + (elemento i, j de **AC**)

= elemento i, j de **AB** + **AC**

Ya hemos señalado que en algunos aspectos la multiplicación de matrices no se comporta como multiplicación de números reales. Los siguientes ejemplos ilustran otras diferencias.

EJEMPLO 14.3

Incluso cuando **AB** y **BA** están definidas y tienen las mismas dimensiones, es posible que $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

pero

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -14 & 24 \\ -5 & 12 \end{pmatrix}. \quad \blacklozenge$$

EJEMPLO 14.4

No hay, en general, cancelación de productos: si **AB** = **AC**, no se sigue que **A** = **C**. Para ilustrar,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 21 & 54 \end{pmatrix},$$

aunque

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}. \quad \blacklozenge$$

EJEMPLO 14.5

El producto de dos matrices no cero puede ser una matriz cero:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \blacklozenge$$

La adición y la multiplicación de matrices se pueden hacer en MAPLE utilizando los comandos `A+B` y `A.B`, que se encuentran en el paquete `linalg` de subrutinas. La multiplicación de **A** por un escalar c se logra con `c*A`.

14.1.1 Multiplicación de matrices desde otra perspectiva

Sea **A** una matriz $n \times k$ y **B** una matriz $k \times m$. Hemos definido **AB** como la matriz $n \times m$ cuyo elemento i, j es el producto escalar de la fila i de **A** con la columna j de **B**.

A veces es útil observar que la columna j de **AB** es la matriz producto de **A** con la columna j de **B**. Por lo tanto, se puede calcular una matriz producto **AB** multiplicando una matriz **A** $n \times$ K por cada $k \times 1$ de la columna **B**.

En concreto, si las columnas de **B** son $\mathbf{B}_1, \cdots, \mathbf{B}_m$, entonces podemos pensar en **B** como una matriz de estas columnas:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \Vert & \Vert & \cdots & \Vert \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \cdots & \mathbf{B}_m \\ \Vert & \Vert & \cdots & \Vert \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\mathbf{AB} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \Vert & \Vert & \cdots & \Vert \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \cdots & \mathbf{B}_m \\ \Vert & \Vert & \cdots & \Vert \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \Vert & \Vert & \cdots & \Vert \\ \mathbf{AB}_1 & \mathbf{AB}_2 & \cdots & \mathbf{AB}_m \\ \Vert & \Vert & \cdots & \Vert \end{pmatrix}.$$

Como ejemplo, sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 7 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -38 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix},$$

y

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

Estas son las columnas de **AB**:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 6 & 7 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 8 & 6 \\ -38 & 13 & 21 \end{pmatrix}.$$

También a veces puede resultar útil pensar en un producto **AX**, cuando **X** es una columna de matriz $k \times 1$, como una combinación lineal de las columnas $\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k$ de **A**. En particular, si

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix},$$

luego

$$\mathbf{AX} = x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \cdots + x_k\mathbf{A}_k.$$

Por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

14.1.2 Terminología y matrices especiales

Vamos a definir algunos términos y matrices especiales que se encuentran con frecuencia.

La *matriz cero* $n \times m$ $\mathbf{O}_{nm}$ es la matriz $n \times m$ que tiene todos los elementos iguales a cero.

Por ejemplo

$$\mathbf{O}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si **A** es $n \times m$, entonces

$$\mathbf{A} + \mathbf{O}_{nm} = \mathbf{O}_{nm} + \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

El negativo de una matriz **A** es el producto escalar $(-1)\mathbf{A}$ formado multiplicando cada elemento de la matriz por -1. Denotamos a esta matriz como la matriz $-\mathbf{A}$. Si **B** tiene las mismas dimensiones que **A**, entonces podemos denotar $\mathbf{B} + (-\mathbf{A})$ como $\mathbf{B}-\mathbf{A}$, como lo hacemos con los números.

Una *matriz cuadrada* es una que tiene el mismo número de filas y de columnas. Si $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ es $n \times n$, la diagonal principal de **A** consiste de los elementos de la matriz, $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$. Estos son los elementos de la matriz a lo largo de la diagonal desde la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha.

La *matriz de identidad* $n \times n$ es la matriz $n \times n$ $\mathbf{I}_n$ con cada elemento i, j igual a cero si $i \neq j$, y cada elemento i, i igual a 1. Por ejemplo,

$$\mathbf{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, $\mathbf{I}_n$ tiene 1 a lo lo largo de su diagonal principal y ceros en el resto de los lugares.

TEOREMA 14.2

Si **A** es $n \times m$, entonces

$$\mathbf{I}_n\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I}_m = \mathbf{A}. \quad \blacklozenge$$

La prueba de esto es rutinaria. Tenga en cuenta que las dimensiones deben ser correctas: debemos multiplicar a **A** a la izquierda por $\mathbf{I}_n$, pero a la derecha por $\mathbf{I}_m$, para que estos productos se puedan definir.

EJEMPLO 14.6

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\mathbf{I}_3\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$

y

$$\mathbf{A}\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} = \mathbf{A}. \quad \blacklozenge$$

Si $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ es una matriz $n \times m$, la *transpuesta* de **A** es la matriz $m \times n$ definida por

$$\mathbf{A}^t = [a_{ji}].$$

Formamos la transpuesta al intercambiar las filas y las columnas de **A**.

EJEMPLO 14.7

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 & -4 \\ 0 & \pi & 12 & -5 \end{pmatrix},$$

una matriz de 2×4. Entonces $\mathbf{A}^t$ es la matriz de 4×2

$$\mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & \pi \\ 3 & 12 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}. \quad \blacklozenge$$

TEOREMA 14.3 Propiedades de la transpuesta

1. $(\mathbf{I}_n)^t = \mathbf{I}_n$.
2. Para cualquier matriz **A**,

$$(\mathbf{A}^t)^t = \mathbf{A}.$$

3. Si **AB** está definida, entonces

$$(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t. \quad \blacklozenge$$

Prueba de la conclusión (2) La prueba es evidente si tomamos la transpuesta de una transposición, entonces intercambiamos las filas y columnas, luego intercambiamos de nuevo, dejando a cada elemento en su forma y posición original.

Es menos evidente que, si tomamos la transpuesta de un producto, a continuación se obtiene el producto de las transpuestas, en el orden inverso, que es la conclusión (3). Vamos a probar esto.

Prueba de la conclusión (3) Primero observe que la conclusión es consistente con la definición de el producto de la matriz. Si $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ es $n \times m$ y $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ es $m \times k$, entonces $\mathbf{AB}$ es $n \times k$, así que $(\mathbf{AB})^t$ es $k \times n$. Sin embargo, $\mathbf{A}^t$ es $m \times n$ y $\mathbf{B}^t$ es $k \times m$, por lo que $\mathbf{A}^t\mathbf{B}^t$ se define sólo si $n = k$, mientras $\mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$ está siempre definida y es $k \times n$.

Ahora, a partir de la definición del producto de matrices

$$\begin{aligned}\text{Elemento } i, j \text{ de } \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t &= \sum_{s=1}^{k} (\mathbf{B}^t)_{is}(\mathbf{A}^t)_{sj} \\ &= \sum_{s=1}^{k} b_{si}a_{js} = \sum_{s=1}^{k} a_{js}b_{si} \\ &= \text{elemento } i, j \text{ de } \mathbf{AB} = \text{elemento } i, j \text{ de } (\mathbf{AB})^t.\end{aligned}$$

Este argumento también se puede administrar convenientemente en términos de productos escalares:

$$\begin{aligned}(\mathbf{B}^t\mathbf{A}^t)_{ij} &= (\text{ fila } i \text{ de } \mathbf{B}^t) \cdot (\text{ columna } j \text{ de } \mathbf{A}_t) \\ &= (\text{ columna } i \text{ de } \mathbf{B}) \cdot (\text{ fila } j \text{ de } \mathbf{A}) \\ &= (\text{ fila } j \text{ de } \mathbf{A}) \cdot (\text{ columna } i \text{ de } \mathbf{B}) \\ &= (\mathbf{AB})_{ji} + ((\mathbf{AB})^t)_{ij}\end{aligned}$$

En algunos contextos, es útil observar que el producto escalar de dos vectores n puede ser escrito como un producto de matriz. Escriba los vectores n

$$\mathbf{X} = \lt x_1, x_2, \cdots, x_n \gt \quad \text{y} \quad \mathbf{Y} = \lt y_1, y_2, \cdots, y_n \gt .$$

como columnas de matrices $n \times 1$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Entonces $\mathbf{X}^t$ es una matriz $1 \times n$, y $\mathbf{X}^t\mathbf{Y}$ es una matriz 1×1, a la que consideramos como un escalar:

$$\mathbf{X}^t\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) = \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}.$$

14.1.3 Caminos aleatorios en cristales

Vamos a aplicar la multiplicación de matrices a la enumeración de caminos a través de un cristal. Los cristales tienen sitios dispuestos en un patrón reticular. Un átomo puede saltar de un sitio que ocupa a uno adyacente, desocupado, y, a continuación, proceder desde allí a otros lugares, por lo que es un *camino al azar* a través del cristal.

Podemos representar este entramado de lugares dibujando un punto para cada ubicación y una línea entre los puntos exactamente cuando un átomo pueda pasar directamente de uno a otro en el cristal. Tal diagrama se llama una *gráfica*. La figura 14.1 muestra una gráfica típica. En este gráfico, un átomo podría moverse de v_1 a v_2 o v_3, a los que está conectado por líneas, pero no directamente a v_6 porque no hay hay una línea entre v_1 y v_6. Los puntos conectados por una línea de la gráfica se llaman adyacentes.

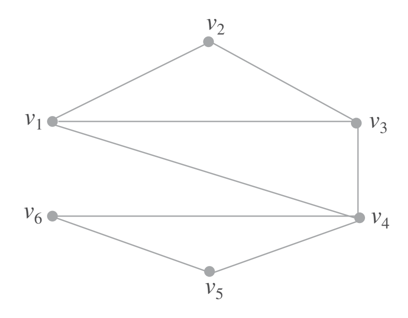


Figura 14.1 Una gráfica típica.

Un *camino* de longitud n en la gráfica es una secuencia $v_1, v_2, \cdots, v_{n+1}$ de los puntos (no necesariamente diferentes), con cada v_j adyacente a v_{j+1}. Un camino tal representa una posible vía que un átomo podría tomar sobre n bordes (quizá algunos repetidos) a través de diversos sitios en el cristal. Un camino $v_i - v_j$ es uno que comienza en v_i y termina a v_j.

A los físicos y a los ingenieros de materiales les piuede interesar la siguiente pregunta: dado un cristal con n sitios de $v_1, v_2, \cdots, v_n$, ¿cuántos diferentes ámbitos de longitud k hay entre dos sitios seleccionados?

Defina la matriz de adyacencia $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ de la gráfica para que sea la matriz $n \times n$ que tiene

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es adyacente a } v_j \text{ en la gráfica} \\ 0 & \text{si no hay una línea entre } v_i \text{ y } v_j \text{ en la gráfica.} \end{cases}$$

La gráfica de la figura 14.1 tiene la matriz adyacente de 6 × 6

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los principales elementos de la diagonal son cero, porque no hay una línea entre cualquier v_i y sí mismo.

Sostenemos que, si k es cualquier número entero positivo, entonces el número de distintos caminos $v_i - v_j$ de longitud k en el cristal es el elemento i, j de $\mathbf{A}^k$. Los elementos de $\mathbf{A}^k$ por lo tanto responden a la pregunta planteada.

Para ver por qué esto es cierto, comience con $k = 1$. Si $i = j$, hay un camino de longitud 1 entre v_i y v_j exactamente cuando v_i es adyacente a v_j , y en este caso $a_{ij} = 1$.

A continuación mostramos que, si el resultado es cierto para los sectores de longitud k, entonces debe ser cierto para caminos de longitud $k + 1$ Considere cómo se forma un camino $v_i - v_j$ de longitud $k + 1$. Primero, debe haber un camino $v_i - v_r$ de longitud 1 de v_i a algunos v_r adyacentes a v_i, seguido de un camino $v_r - v_j$ de longitud k (Figura 7.2). Entonces

número de caminos $v_i - v_j$ de longitud $k + 1$

= número de caminos únicos $v_r - v_j$ de longitud k,

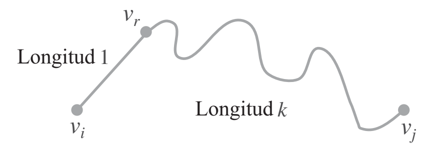


Figura 14.2 Construyendo caminos $v_i - v_j$ de longitud $k + 1$.

con esta suma tomada sobre todos los puntos v_r adyacentes a v_i. Ahora $a_{ir} = 1$ si v_r es adyacente a v_i, y 0 en caso contrario. Además, asumimos, el número de caminos distintos $v_r - v_j$ de longitud k es el elemento r, j de $\mathbf{A}^k$. Denote $\mathbf{A}^k = \mathbf{B} = [b_{ij}]$. Entonces, para r = 1, · · ·, n,

$$a_{ir}b_{rj} = 0 \text{ si } v_r \text{ no es adyacente a } v_j$$

y

$$a_{ir}b_{rj} =$$
el número de caminos distintos $v_i - v_j$ de longitud $k + 1$ si v_r es adyacente a v_i.

Por lo tanto, el número caminos distintos $v_i - v_j$ de longitud $k + 1$ es

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

y este es el elemento i, j de **AB**, que es $\mathbf{A}^{k+1}$.

EJEMPLO 14.8

La matriz adyacente de la gráfica de la figura 14.3 es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

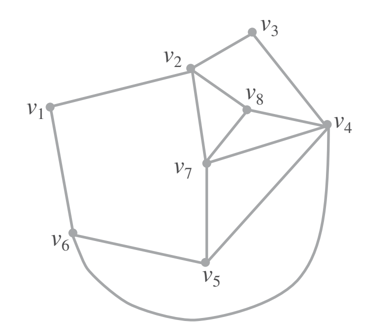


Figura 14.3 Gráfica del ejemplo 14.8

Supongamos que queremos conocer el número de paseos de longitud 3 en este gráfico. Calcule

$$\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 4 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 7 & 4 & 5 & 4 & 9 & 8 \\ 1 & 7 & 0 & 8 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 8 & 6 & 8 & 8 & 11 & 10 \\ 2 & 5 & 3 & 8 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 8 & 6 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 9 & 3 & 11 & 8 & 4 & 6 & 7 \\ 2 & 8 & 2 & 10 & 4 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, el elemento 4, 7 de $\mathbf{A}^3$ es 11, por lo que hay 11 caminos de longitud 3 entre v_4 y v_7. No hay caminos de longitud 3 entre v_4 y v_6.

Generalmente usaríamos un paquete de software para calcular $\mathbf{A}^k$.

SECCIÓN 14.1 PROBLEMAS

En los problemas 1 al 6 realice el cálculo requerido.

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 6 \\ 8 & 15 & 4 \end{pmatrix}$; $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 14 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \\ 14 & 16 \\ 1 & 25 \end{pmatrix}$, $-5\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & 1-x \\ 2 & e^x \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ x & \cos(x) \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB}$

4. $\mathbf{A} = (14), \mathbf{B} = (-12)$, $-3\mathbf{A} - 5\mathbf{B}$

5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 7 & -9 \\ 8 & 2 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 8 & 21 & 7 \\ 12 & -6 & -2 & -1 & 9 \end{pmatrix}$, $4\mathbf{A} + 8\mathbf{B}$

6. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^3 - \mathbf{B}^2$

En los problemas 7 al 16 determine si **AB** y **BA** están definidas. Lleve a cabo el proceso.

7. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$,
$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 & 12 & 5 \\ -3 & -3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -9 \end{pmatrix}$

8. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

9. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 & 14 & -22 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

10. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 2 \\ 18 & -22 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -16 & 0 & 0 & 28 \\ 0 & 1 & 1 & 26 \end{pmatrix}$

11. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -21 & 4 & 8 & -3 \\ 12 & 1 & 0 & 14 \\ 1 & 16 & 0 & -8 \\ 13 & 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$,
$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -9 & 16 & 3 & 2 \\ 5 & 9 & 14 & 0 \end{pmatrix}$

12. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 \\ 5 & 9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

13. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

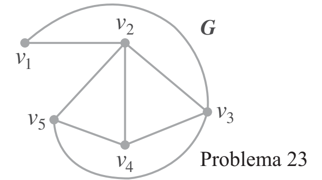
14. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

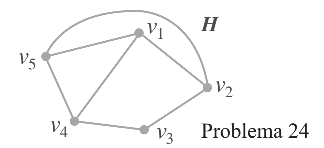
15. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

16. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 8 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

En los problemas 17 al 21 determine si **AB** y **BA** están definidas. Para los productos que estén definidos, dé las dimensiones de la matriz producto.

17. **A** es 14×21, **B** es 21×14.
18. **A** es 18×4, **B** es 18×4.
19. **A** es 6×2, **B** es 4×6.
20. **A** es 1×3, **B** es 3×3.
21. **A** es 7×6, **B** es 7×7.
22. Encuentre matrices 2×2 no-cero **A**, **B**, y **C** de tal manera que **BA** = **CA** pero **B** ≠ **C**.
23. Para la gráfica *G* de la figura 14.4, determine el número de caminos $v_1 - v_4$ de longitud 3, el número de caminos $v_2 - v_3$ de longitud 3, y el número de caminos $v_2 - v_4$ de longitud 4.
24. Para la gráfica *H* de la figura 14.4, determine el número de caminos $v_1 - v_4$ de longitud 4 y el número de caminos $v_2 - v_3$ de longitud 2.
25. Para la gráfica *K* de la figura 14.4, determine el número de caminos $v_4 - v_5$ de longitud 2, el número de caminos $v_2 - v_3$ de longitud 3 y el número de caminos $v_1 - v_2$ y $v_4 - v_5$ de longitud 4.
26. Sea **A** la matriz de adyacencia de una gráfica *G*.
(a) Demuestre que el elemento *i*, *j* de $\mathbf{A}^2$ es igual al número de puntos de *G* que son vecinos de v_i en *G*. Este número se llama el *grado* de v_i.





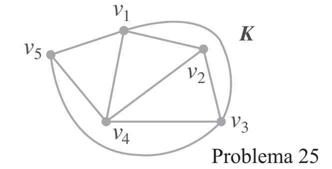


Figura 14.4 Gráficas para los problemas 23, 24 y 25 de la sección 14.1.

(b) Demuestre que el elemento *i*, *j* de $\mathbf{A}^3$ es igual a dos veces el número de triángulos en *T* que contienen a v_i como un vértice. Un triángulo en G consiste de tres puntos, cada uno de un vecino del otro.

27. Demuestre que el conjunto de todas las matrices $n \times m$ con elementos reales es un espacio vectorial, utilizando las operaciones de adición de matrices y multiplicación de matrices por escalares. ¿Cuál es la dimensión de este espacio vectorial?
28. Reahga el problema 27 para el caso de que los elementos de las matrices sean números complejos.

14.2 Operaciones elementales entre filas

Algunas aplicaciones, como las que determinan cierta información sobre las matrices, hacen uso de las *operaciones elementales entre filas*. Vamos a definir tres de estas operaciones. Sea **A** una matriz.

1. Tipo de operación I: intercambiar dos filas de **A**.
2. Tipo de operación II: multiplicar una fila de **A** por un número distinto de cero.
3. Tipo de operación III: añadir un múltiplo escalar de una fila a otra fila de **A**.

EJEMPLO 14.9

Vamos a ver un ejemplo de cada una de estas operaciones entre filas. Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & 3 & -7 \\ 2 & -3 & 4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Si intercambiamos las filas dos y tres de **A**, obtenemos

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 9 & 3 & -7 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Si multiplicamos la fila tres de **A** por 7, obtenemos

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 63 & 21 & -49 \\ 2 & -3 & 4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Y si añadimos −6 multiplicado por la fila uno a la fila tres de **A**, obtenemos

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 12 & 3 & -33 & 11 \\ 2 & -3 & 4 & 11 \end{pmatrix}. \quad \blacklozenge$$

Cada operación elemental entre filas puede realizarse multiplicando **A** por la izquierda por una matriz cuadrada construída aplicando esa operación entre filas a una matriz de identidad.

TEOREMA 14.4

Sea **A** una matriz $n \times m$. Supongamos que **B** está formada a partir de **A** por una operación elemental entre filas. Sea **E** la matriz formada al realizar esta operación en $\mathbf{I}_n$. Entonces

$$\mathbf{B} = \mathbf{EA}. \quad \blacklozenge$$

Una matriz formada mediante la realización de una operación elemental entre filas en $\mathbf{I}_n$ se denomina una *matriz elemental*. El teorema 14.4 dice que podemos realizar cualquier operación elemental entre filas en **A** multiplicando **A** a la izquierda por la matriz elemental formada al realizar esta operación en $\mathbf{I}_n$.

Dejaremos la prueba de ello a los ejercicios 14.9, 14.10, y 14.11. Sin embargo, es instructivo ver el teorema de acción.

EJEMPLO 14.10

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Como **A** es 3×4, utilizaremos $\mathbf{I}_3$ para realizar operaciones entre filas.

Primero, intrercambie las filas dos y tres de **A** para formar

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 9 & 3 & -7 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Realice esta operación entre filas en $\mathbf{I}_3$ para obtener

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 9 & 3 & -7 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \mathbf{B}.$$

Luego multiplique la fila tres de **A** por 7 para formar

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 63 & 21 & -49 \end{pmatrix}.$$

Realice esta operación entre filas en $\mathbf{I}_3$ para obtener

$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\mathbf{E}_2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 63 & 21 & -49 \end{pmatrix} = \mathbf{C}.$$

Finalmente, sume 2 veces la primera fila a la segunda para obtener

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 & -3 \\ -3 & 3 & 14 & -1 \\ 0 & 9 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Esta operación se puede lograr mediante la matriz elemental

$$\mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A modo de prueba

$$\mathbf{E}_3\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 & -3 \\ -3 & 3 & 14 & -1 \\ 0 & 9 & 3 & -7 \end{pmatrix} = \mathbf{D}. \quad \blacklozenge$$

Este resultado tiene una consecuencia importante. Supongamos que formamos **B** a partir de **A** mediante la realización de una secuencia de operaciones elementales entre filas una tras otra. Es decir, llevamos a cabo la operación $\mathcal{O}_1$ en **A** para obtener $\mathbf{A}_1$, luego $\mathcal{O}_2$ en $\mathbf{A}_1$ para formar $\mathbf{A}_2$, y así sucesivamente hasta que realizamos en $\mathcal{O}_r$ en $\mathbf{A}_{r-1}$ para formar $\mathbf{A}_r = \mathbf{B}$. Podemos imaginar este proceso

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\mathcal{O}_1} \mathbf{A}_1 \xrightarrow{\mathcal{O}_2} \mathbf{A}_2 \xrightarrow{\mathcal{O}_3} \mathbf{A}_3 \rightarrow$$

$$\cdots \xrightarrow{\mathcal{O}_{r-1}} \mathbf{A}_{r-1} \xrightarrow{\mathcal{O}_r} \mathbf{A}_r = \mathbf{B}.$$

Podemos realizar cada operación elemental $\mathcal{O}_j$ multiplicando a la izquierda por la matriz elemental $\mathbf{E}_j$ formada por la ejecución de esta operación en $\mathbf{I}_n$. Entonces

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{E}_1\mathbf{A}$$
$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{E}_2\mathbf{A}_1 = \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A}$$
$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{E}_3\mathbf{A}_2 = \mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A}$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{A}_{r-1} = \mathbf{E}_{r-1}\mathbf{A}_{r-2} = \mathbf{E}_{r-1}\mathbf{E}_{r-2}\cdots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A}$$
$$\mathbf{A}_r = \mathbf{E}_r\mathbf{A}_{r-1} = \mathbf{E}_r\mathbf{E}_{r-1}\cdots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A}.$$

Si designamos

$$\Omega = \mathbf{E}_r\mathbf{E}_{r-1}\cdots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$$

en este orden, entonces

$$\mathbf{B} = \Omega\mathbf{A}.$$

Además, Ω es un producto de matrices elementales.

Asignaremos un teorema a esta secuencia.

TEOREMA 14.5

Sea que **B** se obtiene de **A** mediante una secuencia de operaciones elementales entre filas. Entonces hay una matriz Ω que es un producto de matrices elementales tales que

$$\mathbf{B} = \Omega\mathbf{A}. \ \blacklozenge$$

En la formación de Ω como un producto de matrices elementales, $\mathbf{E}_1$ realiza la primera operación entre filas en **A**, a continuación, $\mathbf{E}_2$ realiza la segunda operación en $\mathbf{E}_1\mathbf{A}$, y así sucesivamente. El orden de las operaciones, por tanto, de los factores que componen Ω, es crucial.

No necesitamos escribir realmente abajo cada $\mathbf{E}_j$ para formar Ω. El mismo resultado se consigue como sigue: realice la primera operación de fila en $\mathbf{I}_n$, entonces la segunda operación en la matriz resultante, la tercera operación en esta matriz, y así sucesivamente. Después de que todas las operaciones de fila se hayan realizado, el resultado final es Ω.

EJEMPLO 14.11

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 4 \\ 9 & 3 & 7 & -7 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Formaremos B empezando por A y realizando las siguientes operaciones en el orden dado:

$\mathcal{O}_1$: sumar −3 veces la fila 2 a la fila 3; luego

$\mathcal{O}_2$: sumar 2 veces la fila 1 a la fila 2; luego

$\mathcal{O}_3$: intercambiar las filas 1 y 3; luego

$\mathcal{O}_4$: multiplicar la fila 2 por −4.

Para formar Ω para realizar estas operaciones, comience

$$\mathbf{I}_3 \xrightarrow{\mathcal{O}_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{O}_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{O}_3} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{O}_4} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -8 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Omega.$$

Luego

$$\Omega\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -8 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 4 \\ 9 & 3 & 7 & -7 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -27 & -7 & -20 & 26 \\ -84 & -4 & -36 & -4 \\ 6 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{B}. \ \blacklozenge$$

Posteriormente será importante saber que el efecto de cada operación elemental entre filas puede ser revertida por una operación elemental entre filas del mismo tipo. Para ver esto, observe cada instancia.

Si formamos **B** de **A** intercambiando las filas i y j, luego intercambiando estas mismas filas (otro tipo de operación I) en **B** regresaremos a **A**.

Si multiplicamos una fila de **A** por un número k distinto de cero, y luego multiplicamos esa fila de **B** por $1 / k$ (una operación de tipo II) volvemos a obtener **A**.

Por último, si añadimos α veces la fila i a la fila j de **A**, y a continuación, añadimos $-\alpha$ veces la fila i a la fila j de **B** (una operación de tipo III) volvemos a obtener **A**.

Puesto que todos estos retrocesos son realizados por operaciones elementales entre filas, también se pueden lograr multiplicando por la izquierda por una matriz elemental.

Decimos que **A** es *equivalente por filas* a **B** si **B** se puede obtener de una por una secuencia de operaciones elementales entre filas. La equivalencia por filas tiene las siguientes propiedades.

TEOREMA 14.6

1. Cada matriz es equivalente por filas a sí misma.
2. Si **A** es equivalente por filas a **B**, entonces **B** es equivalente por filas a **A**.
3. Si **A** es equivalente por filas a **B** y **B** es equivalente por filas a **C**, entonces **A** es equivalente por filas a **C**.

Las operaciones elementales entre filas se pueden hacer en MAPLE utilizando los comandos `swaprow (A, i, j)`, `Mulrow (A, 2, a)` y `AddRow (A, i, j, a)`, que se encuentran en el paquete `linalg` de subrutinas.

SECCIÓN 14.2 PROBLEMAS

En cada uno de los problemas 1 al 8, realice la operación elemental entre filas o secuencia de operaciones de fila en **A** y luego obtenga una matriz Ω de manera que $\Omega\mathbf{A}$ sea el resultado final.

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 16 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$; multiplique fila 2 por $\sqrt{3}$.

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 1 \\ 8 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; agregue 6 veces la fila 2 a la fila 3.

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 14 & 6 \\ 8 & 1 & -3 \\ 2 & 9 & 5 \end{pmatrix}$; $\sqrt{13}$ veces sume la fila 3 a la 1 luego intercambie las filas 1 y 2 y posteriormente multiplique la fila 1 por 5.

4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -3 \\ 12 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; intercambie las filas 2 y 3, luego añada el negativo de la fila 1 a la fila 2.

5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$; $\sqrt{3}$ veces sume la fila 2 a la 1, y multiplique fila 2 por 15 e intercambie las filas 1 y 2.

6. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & -6 \\ 1 & 13 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; sume la fila 1 a la 3 y luego $\sqrt{3}$ veces sume la fila 1 a la 2 y multiplique la fila 4, then add row 2 to row 3.

7. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 9 \\ -9 & 7 & -5 & 7 \end{pmatrix}$; multiplique la fila 3 por 4 y sume 14 veces la fila 1 a la 2, luego intercambie las filas 2 y 3.

8. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 14 \\ 1 & 5 & 2 \\ 9 & 15 & 0 \end{pmatrix}$; intercambie las filas 2 y 3, luego sume 3 veces la fila 2 a la 3, intercambie filas 1 y 3 y multiplique la línea 3 por 4.

En los problemas 9, 10 y 11, **A** es una matrtiz $n \times m$.

9. Sea **B** formada de **A** intercambiando las filas s y t. Sea **E** formada de $\mathbf{I}_n$ intercambiando estas filas. Pruebe que **B** = **EA**.

10. Sea **B** formada de **A** multiplicando la fila s por α. Sea **E** formada de $\mathbf{I}_n$ multiplicando la fila s por α. Pruebe que **B** = **EA**.

11. Sea **B** formada de **A** sumando α veces la fila s a la fila t. Sea **E** formada de $\mathbf{I}_n$ mediante esta misma operación. Pruebe que **B** = **EA**.

14.3 Forma escalonada reducida por filas

Ahora que sabemos cómo realizar operaciones elementales por filas, abordaremos una razón por la que alguien querría hacer esto. En esta sección se establece una forma especial para la que vamos a querer manipular las matrices y en las dos secciones siguientes se aplica esta forma especial a la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Primero, hay que definir la *entrada principal* de una fila de una matriz como su primer elemento distinto de cero, la leyendo de izquierda a derecha. Si todos los elementos de una fila son cero, entonces esta fila no tiene entrada principal.

Una matriz **A** $n \times m$ está en *forma escalonada reducida por filas* siempre que se cumplan las siguientes condiciones.

1. La entrada principal de cada fila diferente de cero es 1.
2. Si alguna fila tiene su entrada principal en la columna j, entonces todos los otros elementos de la columna j son cero.
3. Si fila i es distinta de cero y la fila k es una fila cero, entonces $i < k$.
4. Si la entrada principal de la fila r_1 está en la columna c_1, y la entrada principal de la fila r_2 está en columna c_2, y $r_1 < r_2$, entonces, $c_1 < c_2$.

Cuando una matriz satisface estas condiciones, a menudo acortaremos la frase "*forma escalonada reducida por filas* y nos limitaremos a decir que la matriz está reducida, o está en forma reducida.

La condición (1) de la definición significa que, si vemos a través de cualquier fila distinta de cero de izquierda a derecha, el primer elemento no cero que veremos será 1.La condición (2) significa que, si nos encontramos en la entrada principal 1 de cualquier fila diferente de cero y miramos hacia arriba o hacia abajo de esa columna, sólo vemos ceros. La condición (3) significa que cualquier fila de ceros en una matriz reducida debe estar por debajo de todas las filas que tienen elementos distintos de cero. Las filas cero estarán en la parte inferior de la matriz. La condición (4) significa que las entradas principales de una matriz reducida se mueven hacia abajo, de izquierda a derecha según vamos viendo la matriz.

EJEMPLO 14.12

Las siguientes matrices están reducidas:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \blacklozenge$$

EJEMPLO 14.13

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

no está reducida. Sin embargo, sostenemos que, por una secuencia de operaciones elementales de renglón, podemos transformar **C** en una matriz reducida.

En primer lugar, si la matriz tuviera una o más filas cero, habría que intercambiarlas para colocarlas en la parte inferior de la nueva matriz. Este ejemplo **C** no tiene ninguna fila cero.

En vista de la condición (4) de la definición, empezamos por la esquina superior izquierda. Multiplicamos la fila uno por 1/2 para obtener una matriz que tenga una entrada principal 1 en la fila uno:

$$\mathbf{C} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & -4 & 6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Para obtener ceros debajo del 1 en la posicion 1, 1, hay que sumar −2 veces la fila uno a la tres:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & -4 & 6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ahora, la segunda fila de la matriz. La entrada principal es −4, así que dividimos esta fila entre −4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Además del 1 en la posición 2, 2 de esta matriz, queremos que haya ceros en la fila 2. Para ello, sumamos 2 veces la fila 2 a la fila 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sucede que la entrada principal de la tercera fila de la matriz es 1.

Para obtener ceros en la colomna 3 sobre esta entrada principal, añadimos 3/2 veces la fila tres a la fila 2 y luego -1/2 veces la fila tres a la fila 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta es una matriz reducida que es equivalente a C, habiendo sido obtenida de aquella por una secuencia de de operaciones elementales por filas.

En este ejemplo, empezamos con **C** y se obtuvo una matriz reducida. Si hubiéramos utilizado una secuencia de operaciones elementales por filas diferente, ¿podríamos haber llegado a una matriz reducida diferente? La respuesta es no.

TEOREMA 14.7

Cada fila de la matriz es equivalente a una matriz en la forma reducida. Además, la forma reducida de una matriz se determina completamente por la matriz en sí, no por el proceso de reducción. Es decir, no importa qué secuencia de operaciones elementales por filas se utilice para producir una matriz reducida equivalente a **A**, el proceso dará como resultado la misma matriz reducida.

Prueba Toda matriz puede ser manipulada para que tenga la forma reducida siguiendo la idea del Ejemplo 14.13. En primer lugar, mueva cualquier fila cero a la parte inferior de la matriz por intercambios de fila. A continuación, inicie en la superior izquierda por la entrada principañ, y multiplicando esta fila por un escalar, obtenga una matriz que tenga un 1 en esta posición. Añada múltiplos de esta fila a las otras filas para obtener ceros en esta columna por debajo de la entrada principal. A continuación, pase a la segunda fila y lleve a cabo el mismo procedimiento que comienza por su entrada principal. Después de cada fila diferente de cero ha sido tratada, obtenemos una matriz reducida.

En vista de la singularidad de la forma reducida de una matriz dada, vamos a denotar la forma reducida de **A** como $\mathbf{A}_R$. El proceso de determinación de $\mathbf{A}_R$, por cualquier secuencia de operaciones elementales de fila, se conoce como la *reducción de* **A**.

EJEMPLO 14.14

Sea:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Vamos a reducir esta matriz. Primero intercambiamos filas para mover la fila cero a la parte inferior de la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La entrada principal de la fila uno está en la posición 1, 3, y la entrada principal de la tercera fila se encuentra en la posición 2, 2. Queremos que las entradas desciendan por la matriz de izquierda a derecha, por lo que intercambiamos las filas uno y dos para obtener

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La entrada principal de (la nueva) fila uno es 1 y ya cuenta con ceros por debajo de ella, por lo que podemos pasar a la segunda fila y encontrar su entrada principal, que es 2. Multiplicamos la fila dos por 1/2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En esta última matriz hay que sumar −3 veces la fila dos a la tres:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La entrada principal de la fila tres es −4. Multiplique la fila tres de esta matriz por −1/4.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, obtener ceros por encima y por debajo de la entrada principal en la fila tres de la última matriz sumamos −1 veces la fila tres a la fila 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_R.$$

De haber reducido **A** por cualquier otra secuencia de operaciones elementales por filas hubieramos obtenido la misma matriz $\mathbf{A}_R$.

En todos los ejemplos que hemos visto hasta ahora, se peude observar que las filas no nulas de una matriz reducida son vectores *m* linealmente independientes, donde *m* es el número de columnas de la matriz. Esto es cierto en general porque, si la fila *i* es una fila diferente de cero, entonces el elemento principal de la fila *i* es 1, y todas las filas por encima y por debajo de esta fila tienen 0 en esta columna. Así, cada fila vector no cero en $\mathbf{A}_R$ tiene un 1 en una coordenada donde todos los otros vectores fila tienen ceros. Cuando nos ocupemos de los sistemas de rango será importante saber que las filas no cero de $\mathbf{A}_R$ son linealmente independientes en el espacio de filas de **A**, y por lo tanto, forman una base para este espacio de filas.

Las operaciones elementales de fila que se utilizan para reducir una matriz **A** se pueden lograr multiplicando **A** a la izquierda por alguna matriz elemental Ω (que sea un producto de matrices elementales). En vista de los teoremas 14.5 y 14.7, podemos afirmar lo siguiente.

TEOREMA 14.8

Sea **A** cualquier matriz. Entonces existe una matriz Ω tal que

$$\Omega\mathbf{A} = \mathbf{A}_R. \ \blacklozenge$$

Dada **A**, hay un dispositivo de notación conveniente que nos permite encontrar $\mathbf{A}_R$ y Ω al mismo tiempo. Supongamos que **A** es $n \times m$. Entonces Ω será $n \times n$. Forme la *matriz aumentada* $n \times (m + n)$ $[\mathbf{A}{:}\mathbf{I}_n]$ poniendo a $\mathbf{I}_n$ como condicional *n* en las columnas adicionales a la derecha de **A**. Los puntos verticales separan las columnas originales *m* de **A** de las *n* columnas adosadas de **A**, y no juegan ningún papel en los cálculos. Ahora reduzca **A**, llevando a cabo las mismas operaciones en las filas adosadas de $\mathbf{I}_n$. Cuando **A** (las columnas *m* a la izquierda de esta matriz aumentada) se hayan reducido a $\mathbf{A}_R$, la columnas *n* de la derecha serán Ω, ya que formamos Ω comenzando con la matriz identidad y la realizando las mismas operaciones elementales por filas que utilizamos para reducir **A**.

EJEMPLO 14.15

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos a reducir **A** y, al mismo tiempo, a encontrar una matriz de 2 × 2 tal que $\Omega\mathbf{A} = \mathbf{A}_R$. Comience con la matriz aumentada y redúzcala:

$$[\mathbf{A} \vdots \mathbf{I}_2] = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{((−1/3) veces la fila uno)} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 & \vdots & -1/3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{(sume −4 veces la fila uno a la fila dos)} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 & \vdots & -1/3 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 & \vdots & 4/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{(multiplique la fila dos por −3/2)} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 & \vdots & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & \vdots & -2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(sume 1/3 de la fila dos a la fila uno)} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & \vdots & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 & \vdots & -2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$$= [\mathbf{A} \vdots \mathbf{I}_2]_R.$$

Las primeras tres columnas de esta matriz aumentada son $\mathbf{A}_R$, mientras que las dos últimas forman Ω:

$$\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \end{pmatrix} \text{ y } \Omega = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ -2 & -3/2 \end{pmatrix}.$$

Como prueba

$$\Omega\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ -2 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_R.$$

Esta es la forma reducida de $[\mathbf{A} \vdots \mathbf{I}_2]$. ♦

El comando de `pivot` de MAPLE es muy adecuado para la reducción de una matriz **A** que se ha introducido en el programa. En primer lugar busque las entradas principales de las filas no cero. La ubicación de una entrada principal se denomina una *posición de pivote*. Obtenemos ceros por encima y por debajo de una entrada principal por medio de operaciones elementales por filas, añadiendo múltiplos constantes de esta fila de las otras filas si es necesario. Esto se llama *pivotar* alrededor de la entrada principal, y se puede hacer en una operación que se llama `pivot` en MAPLE. Si una entrada principal se produce en la posición i, j de A, podemos formar una matriz **B** que tenga ceros encima y por debajo de α mediante la introducción de un comando

```
B:=pivot(A,i,j);
```

Después de pivotar en torno a cada entrada principal, lo que resulta en una matriz **K**, sólo tenemos que hacer que todas las entradas principales sean 1 para obtener una forma escalonada reducida. Si **K** tiene una entrada α en la fila i, multiplique esta fila por 1 / α mediante la introducción de

```
F:=mulrow(K,i,1/α);
```

Después de hacer esto para todas las filas que contienen una entrada principal, el resultado es la forma escalonada reducida por filas de **A**.

SECCIÓN 14.3 PROBLEMAS

En cada uno de los problemas 1 al 12, encuentre la forma reducida de **A** y produzca una matriz Ω tal que $\Omega\mathbf{A} = \mathbf{A}_R$

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & -5 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

8. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

10. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

11. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -7 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

12. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

14.4 Espacios de filas y columnas

En esta sección vamos a desarrollar tres números asociados con matrices. Estos números tienen un papel importante en aplicaciones tales como la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Sea **A** una matriz $n \times m$ de números reales. Cada una de las filas n es un vector en $\boldsymbol{R}^m$. El lapso de estos vectores de fila (el conjunto de todas las combinaciones lineales de estos vectores) es un subespacio de $\boldsymbol{R}^m$ llamado *espacio de filas* de **A**. Esto puede o puede no ser todo $\boldsymbol{R}^m$, dependiendo de **A**. La dimensión del espacio de filas de **A** es el *rango de filas* de **A**.

Del mismo modo, las columnas m son vectores en $\boldsymbol{R}^n$. La envergadura de estos vectores de columna es el espacio de columnas de **A**, y es un subespacio de $\boldsymbol{R}^n$. La dimensión de este espacio columna es el *rango de columnas* de **A**.

EJEMPLO 14.16

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

El espacio de filas es el subespacio de $\boldsymbol{R}^3$ atravesado por las cinco filas de A. Este subespacio está formado por todas las combinaciones lineales

$$\alpha(5, 1, -5) + \beta(-1, 1, 3) + \gamma(1, 1, 7)$$
$$+ \delta(2, 0, 4) + \epsilon(1, -3, 6)$$

de los vectores de fila. Los últimos tres vectores de fila son linealmente independientes (ninguno es una combinación lineal de los otros dos). Los dos primeros son combinaciones lineales de los tres últimos:

$$(5, -1, 5) = -(1, 1, 7) + 3(2, 0, 4)$$

Y

$$(-1, 1, 3) = (1, 1, 7) - (2, 0, 4),$$

Por tanto, los tres primeros vectores de fila forman una base para el espacio de filas. Este espacio de filas tiene dimensión 3 y es todo de $\boldsymbol{R}^3$. El rango por filas de **A** es 3.

El espacio de columnas de **A** es el subespacio de $\boldsymbol{R}^5$ consistente en todas las combinaciones lineales de los vectores de columna, que seguimos escribiendo como columnas:

$$\alpha \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Estos tres vectores de columna son linealmente independientes en $\boldsymbol{R}^5$ y abarcan un sub espacio tridimensional de $\boldsymbol{R}^5$. El rango de columna de **A** es 3.

En este ejemplo,

rango de fila de **A** = rango de columna de **A** = 3.

Asumimos que esto no es una coincidencia.

TEOREMA 14.9 *Igualdad de los rangos de filas y columnas*

Para cualquier matriz, el rango de fila es igual al rango de columna.

Prueba Aunque esto es cierto en general, vamos a demostrarlo cuando cada a_{ij} es un número real, lo que permite que explotemos los espacios de filas y columnas de **A**. Supongamos que **A** es $n \times m$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2,r+1} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \cdots & a_{rm} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nr} & a_{n,r+1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Denote los vectores de fila $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \cdots, \mathbf{R}_n$, tal que

$$\mathbf{R}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{im}) \text{ en } R^m.$$

Supongamos que el rango por filas de **A** es r. Como una conveniencia de notación, supongamos que las primeras r filas son linealmente independientes. Entonces cada uno de $\mathbf{R}_{r+1}, \cdots, \mathbf{R}_n$ es una combinación lineal de $\mathbf{R}_1, \cdots, \mathbf{R}_r$.
Escriba

$$\mathbf{R}_{r+1} = \beta_{r+1,1}\mathbf{R}_1 + \cdots + \beta_{r+1,r}\mathbf{R}_r$$
$$\mathbf{R}_{r+2} = \beta_{r+2,1}\mathbf{R}_1 + \cdots + \beta_{r+2,r}\mathbf{R}_r$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{R}_n = \beta_{n,1}\mathbf{R}_1 + \cdots + \beta_{n,r}\mathbf{R}_r.$$

Ahora obseerve que la columna j de **A** se puede escribir

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{rj} \\ a_{r+1,j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{1j}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_{r+1,1} \\ \vdots \\ \beta_{n1} \end{pmatrix} + a_{2j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_{r+1,2} \\ \vdots \\ \beta_{n,2} \end{pmatrix} + \cdots + a_{rj}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \beta_{r+1,r} \\ \vdots \\ \beta_{n,r} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, cada columna de **A** es una combinación lineal de los r vectores n en el lado derecho de la última ecuación. Por tanto, estos vectores r abarcan el espacio columna de **A**, por lo que la dimensión de este espacio de columnas es, a lo más, r (igual a r si estas columnas son linealmente independientes, menor a r si no). Esto demuestra que

dimensión del espacio de columna de **A** $\leq$ dimensión del espacio de fila.

Repitiendo este argumento, utilizando columnas en lugar de filas, nos encontramos con que la dimensión del espacio de filas es menor que o igual a la dimensión del espacio de columnas. Esto demuestra el teorema.

Ahora defina el rango de **A** como el rango fila de la matriz, que es la misma que el rango de columna. Denotamos este número como rango(**A**). La matriz del ejemplo 14.16 tiene rango 3.

Dada una matriz real arbitraria **A**, puede que no sea obvio cuál sea el rango de **A**. Sin embargo, si **R** es una matriz reducida, entonces,

rango(**R**) = número de filas no cero de **R**.

Para ver esto, recuerde que las filas no cero de **R** forman una base para el espacio de filas de esa matriz, por lo tanto, su número es la dimensión de este espacio de filas.

Ahora supongamos que realiza una operación elemental por filas en **A** para formar **B**. ¿Cómo cambia esto el espacio de filas de **A**? La respuesta es que no cambia en absoluto. Este hecho es importante en los sistemas de ecuaciones lineales.

TEOREMA 14.10

Sea **B** formada a partir de una matriz **A** $n \times m$ por una secuencia de operaciones elementales por filas. Entonces **A** y **B** tienen el mismo espacio de filas, por lo tanto, también

$$\text{rango}(\mathbf{A}) = \text{rango}(\mathbf{B}).$$

Prueba Es suficiente, para demostrar el teorema, para el caso que **B** está formada de **A** por una por una operación elemental por filas. Deje que los vectores de fila de **A** sean $\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_n$. El espacio de filas de **A** es el subespacio de $\mathbf{R}^m$ consistente de todas las combinaciones lineales

$$\alpha_1\mathbf{A}_1 + \alpha_2\mathbf{A}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{A}_n.$$

Si la operación elemental por filas es un intercambio de filas, entonces las filas de **A** y **B** son las mismas (que aparecen en un orden diferente) y por lo tanto abarcan el mismo subespacio de $\mathbf{R}^m$.
Supongamos que se lleva a cabo la una operación elemental por filas tipo II, multiplicando fila r de **A** por un número distinto de cero c. Ahora el espacio de filas de **B** consta de todos los vectores

$$\alpha_1\mathbf{A}_1 + \cdots + c\alpha_r\mathbf{A}_r + \cdots + \alpha_n\mathbf{A}_n.$$

Como los α_j son arbitrarios, esto es de nuevo una combinación lineal de las filas de **A**, por lo tanto, los espacios de filas de **A** y **B** son el mismo.

Por último, consideremos el caso de que se realice una operación de tipo III, agregando c veces la fila i a la fila j para formar **B**. Ahora los vectores de fila de **B** son

$$\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_{j-1}, c\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_j, \mathbf{A}_{j+1}, \cdots, \mathbf{A}_n.$$

Cualquier combinación lineal de estas filas es de nuevo una combinación lineal de las filas de **A**, por lo tanto, en este caso los espacios de filas de **A** y **B** también son el mismo.

Por último, porque los espacios de filas son el mismo, su dimensión es la misma y las matrices tienen el mismo rango.

Si definimos las operaciones de columna elementales análogos a las operaciones elementales de fila, encontraríamos que éstos dejan el espacio de columnas de una matriz sin cambios.

El teorema 14.10 tiene varias consecuencias importantes.

COROLARIO 14.1

Para cualquier matriz real **A**, **A** y $\mathbf{A}_R$ tienen el mismo espacio de filas. Por lo tanto,

$$\text{rango}(\mathbf{A}) = \text{número de filas no nulas de } \mathbf{A}_R.$$

Esto se deduce del hecho de $\mathbf{A}_R$ se forma a partir de **A** por una secuencia de operaciones elementales por filas, así

$$\begin{aligned}\text{rango}(\mathbf{A}) &= \text{rango}(\mathbf{A}_R)\\ &= \text{número de filas no cero de } \mathbf{A}_R.\end{aligned}$$

EJEMPLO 14.17

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como se trata de una matriz reducida con tres filas distintas de cero, rango(**A**) = 3.

COROLARIO 14.2

Sea **A** una matriz **A** $n \times m$ de números reales. Entonces

$$\text{rango}(\mathbf{A}) = n \text{ sí y sólo sí } \mathbf{A}_R = \mathbf{I}_n.$$

Prueba En primer lugar, sabemos que

$$\text{rango}(\mathbf{A}) = \text{número de filas no cero de } \mathbf{A}_R.$$

Si $\mathbf{A}_R = \mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A}_R$ tiene n filas distintas de cero y esta matriz tiene rango n, por lo tanto, **A** también tiene rango n.

Por el contrario, si **A** tiene rango n, entonces también lo tiene $\mathbf{A}_R$, por lo que esta matriz reducida es una matriz $n \times n$ con 1 recorriendo la diagonal principal y todos los demás elementos (por encima y por debajo de las entradas principales) cero. Entonces $\mathbf{A}_R = \mathbf{I}_n$.

El comando de MAPLE `rank(A)` devolverá el rango de **A**.

SECCIÓN 14.4 PROBLEMAS

En cada uno de los problemas 1 a 14, encuentre la forma reducida de la matriz y utilice esto para determinar el rango de la matriz. También encuentre una base para el espacio de filas de la matriz y una base para el espacio de columnas.

1. $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 11 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 12 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 8 & -4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ -4 & 11 & 11 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

15. Sea A una matriz de números reales. Pruebe que

$$\text{rango}(\mathbf{A}) = \text{rango}(\mathbf{A}^t)$$

14.5 Sistemas homogéneos

Queremos desarrollar un método para encontrar todas las soluciones de un sistema lineal homogéneo de n ecuaciones en m incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &= 0. \end{aligned}$$

Los números a_{ij} son llamados los *coeficientes del sistema* y A = $[a_{ij}]$ es la *matriz de coeficientes*.

La fila i contiene los coeficientes de la ecuación i y la columna j contiene la coeficientes de x_j.

Defina

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

y escriba la matriz cero $n \times 1$ como simplemente **O**, una columna de n ceros. Entonces el sistema se puede escribir como la ecuación matricial

$$\mathbf{AX} = \mathbf{O}.$$

Vamos a desarrollar la siguiente estrategia para la solución de este sistema.

1. Demostraremos que **AX** = **O** tiene las mismas soluciones que el sistema reducido $\mathbf{A}_R\mathbf{X} = \mathbf{O}$.
2. Vamos a mostrar cómo escribir todas las soluciones del sistema reducido directamente de la matriz reducida $\mathbf{A}_R$.
3. También vamos a utilizar la información sobre espacios vectoriales y rangos para obtener información adicional sobre las soluciones.

El resto de esta sección consiste en los detalles de la realización de esta estrategia, y ejemplos. Los dos primeros ejemplos nos dan una idea de lo que se debe buscar en la resolución de un sistema homogéneo.

EJEMPLO 14.18

Considere el sistema simple

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Por supuesto, no necesitamos matrices para resolver este sistema, pero queremos ilustrar un punto. La matriz de coeficientes es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Es sencillo hallar

$$\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/5 \\ 0 & 1 & -1/5 \end{pmatrix}.$$

El sistema reducido $\mathbf{A}_R\mathbf{X} = \mathbf{O}$ es

$$x_1 + \frac{7}{5}x_3 = 0$$

$$x_2 - \frac{1}{5}x_3 = 0.$$

Este sistema reducido puede ser resuelto mediante inspección:

$$x_1 = -\frac{7}{5}x_3,\ x_2 = \frac{1}{5}x_3,\ x_3 \text{ es arbitraria.}$$

Podemos dar a x_3 cualquier valor numérico, y esto determina a x_1 y x_2 para producir una solución.

Será útil para escribir esta solución como una matriz de columna:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -7/5 \\ 1/5 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -7/5 \\ 1/5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

en el que hemos escrito $x_3 = \alpha$ porque se ve más ordenado. Aquí α puede ser cualquier número.

Esta solución general del sistema reducido es también la solución del sistema original. En este ejemplo, la solución general depende de una constante arbitraria, por lo tanto es, como para ser discutido, una solución de una sola dimensión.

En el Ejemplo 14.18, x_3 se llama una *variable libre*, ya que puede asumir cualquier valor. En este ejemplo se tiene una variable libre, pero la solución general de un sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{O}$ podría tener cualquier número de ellas.

Las variables libres ocurren en columnas de $\mathbf{A}_R$ *que no contienen una entrada principal de una fila.*

EJEMPLO 14.19

Considere el sistema 3 × 5

$$x_1 - 3x_2 + x_3 - 7x_4 + 4x_5 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$$

$$x_2 - 4x_3 + x_5 = 0.$$

La matriz de coeficientes es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un cálculo simple arroja

$$\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -35/16 & 13/16 \\ 0 & 1 & 0 & 28/16 & -20/16 \\ 0 & 0 & 1 & 7/16 & -9/16 \end{pmatrix}.$$

El sistema reducido $\mathbf{A}_R\mathbf{X} = \mathbf{O}$ es

$$x_1 - \tfrac{35}{16}x_4 + \tfrac{13}{16}x_5 = 0,$$

$$x_2 + \tfrac{28}{16}x_4 - \tfrac{20}{16}x_5 = 0,$$

y

$$x_3 + \tfrac{7}{16}x_4 - \tfrac{9}{16}x_5 = 0.$$

Este sistema es sencillo de resolver

$$x_1 = \tfrac{35}{16}x_4 - \tfrac{13}{16}x_5,$$

$$x_2 = -\tfrac{28}{16}x_4 + \tfrac{20}{16}x_5,$$

y

$$x_3 = -\tfrac{7}{16}x_4 + \tfrac{9}{16}x_5$$

en el que x_4 y x_5 (las variables libres) se pueden dar los valores y éstos determinan x_1, x_2 y x_3. Una vez más, tenga en cuenta que estas dos variables libres se encuentran en las dos columnas de la matriz reducida que no contiene ningún elemento principal de cualquier fila.

Podemos expresar esta solución más prolijamente estableciendo $x_4 = 16\alpha$ y $x_5 = 16\beta$ con α y β números arbitrarios y escribiendo

$$x_1 = 35\alpha - 13\beta,$$

$$x_2 = -28\alpha + 20\beta,$$

$$x_3 = -7\alpha + 9\beta,$$

$$x_4 = 16\alpha,$$

y

$$x_5 = 16\beta.$$

Aquí α y β son cualquier número. Esta es la *solución general* del sistema reducido, y es fácil verificar que también es la solución del sistema original. Como matriz de columna, esta solución es

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 35\alpha - 13\beta \\ -28\alpha + 20\beta \\ -7\alpha + 9\beta \\ 16\alpha \\ 16\beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 35 \\ -28 \\ -7 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -13 \\ 20 \\ 9 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}. \quad \blacklozenge$$

Esta forma de escribir la solución general revela su estructura como una de dos dimensiones, dependiendo de dos constantes arbitrarias.

Estos ejemplos ilustran la estrategia descrita al comienzo de esta sección. Esto dependerá del hecho crucial de que el sistema reducido tiene las mismas soluciones que el sistema original, como ahora vamos a verificar.

TEOREMA 14.11

Sea $\mathbf{A}$ $n \times m$. Entonces los sistemas $\mathbf{AX} = \mathbf{O}$ y $\mathbf{A}_R\mathbf{X} = \mathbf{O}$ tienen las mismas soluciones.

Prueba Primero, sabemos que hay una matriz

$$\Omega = \mathbf{E}_r\mathbf{E}_{r-1}\cdots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1,$$

un producto de matrices elementales. qie reduce a $\mathbf{A}$:

$$\Omega\mathbf{A} = \mathbf{A}_R.$$

Ahora, suponga que **X** = **C** es una solución de **AX** = **O**. Entonces **AC** = **O**, tal que

$$\Omega\mathbf{O} = \Omega(\mathbf{AC}) = (\Omega\mathbf{A})\mathbf{C} = \mathbf{A}_R\mathbf{C} = \mathbf{O},$$

así que **C** es también una solución del sistema reducido.

Por el contrario, supongamos que **K** es una solución del sistema reducido, por lo que $\mathbf{A}_R\mathbf{K} = \mathbf{O}$. Queremos mostrar que **AK** = **O**. Dado que $\Omega\mathbf{A} = \mathbf{A}_R$, tenemos $(\Omega\mathbf{A})\mathbf{K} = \mathbf{O}$, por lo que

$$(\mathbf{E}_r\mathbf{E}_{r-1}\cdots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1)\mathbf{AK} = \mathbf{O}.$$

Ahora, cada $\mathbf{E}_j$ es una matriz elemental, y sabemos que hay una matriz elemental $\mathbf{E}^*_j$ que invierte el efecto de $\mathbf{E}_j$. De la última ecuación, tenemos

$$\mathbf{E}_1^*\mathbf{E}_2^*\cdots\mathbf{E}_{r-1}^*\mathbf{E}_r^*(\mathbf{E}_r\mathbf{E}_{r-1}\cdots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1)\mathbf{AK} = \mathbf{O}.$$

Pero $\mathbf{E}^*_r\mathbf{E}_r = \mathbf{I}_n$ y , y $\mathbf{E}^*_{r-1}\mathbf{E}_{r-1} = \mathbf{I}_n$ y así sucesivamente hasta $\mathbf{E}^*_1\mathbf{E}_1 = \mathbf{I}_n$ por lo que en el último producto todas las matrices elementales se cancelan en pares, dejando **AK** = **O**. Por lo tanto **K** es también una solución de la sistema original, lo que completa la prueba.

Por tanto, podemos concentrarnos en la solución de un sistema reducido. Como hemos visto en los ejemplos, la solución de $\mathbf{A}_R\mathbf{K} = \mathbf{O}$ se lee fácilmente a partir de esta matriz, y tiene el dividendo añadido de que revela la estructura de estas soluciones. El conjunto de todas las soluciones del sistema homogéneo **AX** = **O** formarun espacio vectorial, que es un subespacio de R^m si **A** es $n \times m$. Además, la dimensión de este espacio de soluciones puede leer a partir de $\mathbf{A}_R$, como vimos en los ejemplos.

Si $\mathbf{A}_R$ tiene k filas distintas de cero (por lo tanto rango k), entonces los k de las x_i son determinados por las variables libres $m - k$, a las que se pueden asignar cualqueir valor al escribir soluciones del sistema. Esto significa que $x_1, \cdots, x_k$ se determinan por $x_{k+1}, \cdots, x_m$, que puede ser elegido arbitrariamente. La solución general tendrá constantes arbitrarias $m - k$ en ella.

Vamos a resumir estas observaciones.

TEOREMA 14.12 *Espacio de solución de un sistema homogéneo*

Sea A n × m. Entonces

1. El conjunto de todas las soluciones de **AX** = **O** forma un subespacio de R^m, llamado el *espacio de solución* de este sistema.
2. La dimensión de este espacio de solución es

$$m - \text{número de filas no cero de } \mathbf{A}_R,$$

que es el mismo que m − rango(**A**).

Prueba Sea S el conjunto de todas las soluciones del sistema. Luego

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$$

es una solución, el sector m cero está en S.

Ahora supongamos que $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ son soluciones, y α y β son números. Entonces

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{X}_1 + \beta\mathbf{X}_2) = \alpha\mathbf{AX}_1 + \beta\mathbf{AX}_2 = \mathbf{O} + \mathbf{O} = \mathbf{O},$$

así que las combinaciones lineales de soluciones son soluciones, y S es un subespacio de R^m.

Para la dimensión de S, utilice el hecho de que el sistema tiene el mismo espacio de la solución como el sistema reducido. Como sugieren los ejemplos, las filas no cero de $\mathbf{A}_R$ nos permiten expresar la solución general como una combinación lineal de soluciones linealmente independientes, uno para cada variable libre. Dado que el número de variables libres es el número de columnas de $\mathbf{A}_R$, menos el número de filas distintas de cero, entonces la dimensión de S es m − rango(**A**).

Dado que el número de filas no cero de la matriz reducida es el rango de $\mathbf{A}_R$, que es también el rango de **A**, entonces la dimensión del espacio de la solución también se puede calcular como

$$m - \text{rango}(\mathbf{A}).$$

EJEMPLO 14.20

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} -x_1 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 + 4x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ -3x_1 + x_2 + 4x_5 &= 0. \end{aligned}$$

La matriz de coeficientes es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Manipulaciones de rutina producen la forma reducida

$$\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -9/8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5/8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

En este ejemplo **A** tiene $m = 5$ columnas, y el rango de **A** es 4 porque $\mathbf{A}_R$ tiene cuatro filas no cero. El espacio de la solución tendrá dimensión $5 - 4 = 1$.

$\mathbf{A}_R$ es la matriz de coeficientes del sistema reducido

$$\begin{aligned} x_1 - \tfrac{9}{8}x_5 &= 0, \\ x_2 + \tfrac{5}{8}x_5 &= 0, \\ x_3 + \tfrac{9}{8}x_5 &= 0, \\ x_4 - \tfrac{1}{4}x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Observe que de x_{51} a x_{54} dependen de la única variable libre x_5, que puede ser elegido arbitrariamente. Coloque $x_5 = \alpha$ para escribir la solución general

$$x_1 = \frac{9}{8}\alpha,\ x_2 = -\frac{5}{8}\alpha,\ x_3 = -\frac{9}{8}\alpha,\ x_4 = \frac{1}{4}\alpha,\ x_5 = \alpha.$$

Si dejamos que $\beta = \alpha / 8$ (β sigue siendo cualquier número), entonces

$$x_1 = 9\beta,\ x_2 = -5\beta,\ x_3 = -9\beta,\ x_4 = 2\beta,\ x_5 = 8\beta.$$

Como matriz de columna, esta solución es

$$\mathbf{X} = \beta \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ -9 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Esto da a la solución general como el conjunto de todos los múltiplos de una solución, que constituye una base para un espacio de soluciones unidimensional (un subespacio de R^5).

EJEMPLO 14.21

Resolveremos el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 + 6x_5 + 4x_6 - 2x_7 &= 0 \\ -4x_1 + x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 10x_5 - 3x_6 + 6x_7 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 5x_5 + x_6 + 3x_7 &= 0. \end{aligned}$$

La matriz de coeficientes es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 1 & 6 & 4 & -2 \\ -4 & 1 & 6 & 3 & 10 & -3 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hallamos la matriz reducida

$$\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 67/7 & 4/7 & 29/7 \\ 0 & 1 & 0 & 9/5 & 178/35 & -5/7 & 118/35 \\ 0 & 0 & 1 & 11/5 & 36/5 & 0 & 16/5 \end{pmatrix}.$$

Ya que $m = 7$ y $\mathbf{A}_R$ tiene tres no ceros, el espacio de soluciones es un subespacio de cuatro dimensiones de R^7.

La solución general depende de las variables libres arbitrarias: $x_4, \cdots, x_7$. Sea $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$, $x_6 = \gamma$ y $x_7 = \delta$ para escribir la solución general

$$\mathbf{X} = \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ -9/5 \\ -11/5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -67/7 \\ -178/35 \\ -36/5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -4/7 \\ 5/7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -29/7 \\ -118/35 \\ -16/5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \ \blacklozenge$$

Tal como lo sugiere el ejemplo 14.21, con un poco de práctica, la solución general se puede leer directamente de la matriz reducida.

Un sistema homogéneo siempre tiene al menos la solución trivial, y puede o puede no tener soluciones no triviales. A continuación una condición simple para un sistema homogéneo que tiene una solución no trivial.

COROLARIO 14.3

Sea $\mathbf{A}$ $n \times m$. Entonces, el sistema homogéneo $\mathbf{AX} = \mathbf{O}$ tiene una solución no trivial si y sólo si

$$m - \text{número de filas no cero de } (\mathbf{A}_R) > 0.$$

La razón de esto es que el sistema puede tener una solución no trivial sólo cuando la dimensión del espacio de soluciones es positivo y iene algo en él que no sea el vector cero. Dado que este espacio de soluciones es de dimensión $m - \text{rango}(\mathbf{A})$, habrá una solución no trivial exactamente cuando este número sea positivo.

En particular, vea el caso en que un sistema tiene más ecuaciones que incógnitas, tal que $m < n$. Dado que el rango de $\mathbf{A}$ no puede superar el número de filas (ecuaciones), en este caso

$$\text{rango}(\mathbf{A}) \leq n \leq m$$

por lo que $m - \text{rango}(\mathbf{A}) > 0$ y el sistema tiene una solución no trivial.

COROLARIO 14.4

Un sistema homogéneo lineal con más incógnitas que ecuaciones siempre tiene una solución no trivial.

El corolario 14.3 implica que **AX** = **O** tiene solamente la solución trivial exactamente cuando m menos el número de filas no cero de la matriz reducida es cero. En particular, cuando **A** es cuadrada, entonces $m = n$ y esto ocurre exactamente cuando la matriz $\mathbf{A}_R$ $n \times n$ tiene n filas distintas de cero, lo que a su vez sucede exactamente cuando $\mathbf{A}_R = \mathbf{I}_n$.

COROLARIO 14.5

Si **A** es $n \times n$ entonces **AX** = **O** tiene solamente la solución trivial si y sólo si $\mathbf{A}_R = \mathbf{I}_n$.

EJEMPLO 14.22

Resolveremos el sistema

$$-4x_1 + x_2 - 7x_3 = 0$$
$$2x_1 + 9x_2 - 13x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + 10x_3 = 0.$$

La matriz de coeficientes es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -7 \\ 2 & 9 & -13 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Hallamos que $\mathbf{A}_R = \mathbf{I}_3$ Por lo tanto el sistema tiene sólo la solución trivial. Esto también puede verse desde el sistema reducido, que es

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 0. \quad \blacklozenge$$

SECCIÓN 14.5 PROBLEMAS

En cada uno de los problemas 1 al 12, determine la dimensión del espacio de soluciones y encuentre la solución general del sistema mediante la reducción de la matriz de coeficientes. Escriba la solución general en términos de una o más matrices de columna.

1. $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$
   $x_2 - x_3 + x_4 = 0$

2. $-3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0$
   $x_2 + x_3 + 4x_5 = 0$
   $-3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$

3. $-2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$
   $x_1 - x_2 = 0$
   $x_1 + x_2 = 0$

4. $4x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$
   $2x_1 - x_3 = 0$

5. $x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 0$
   $2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0$
   $x_1 - 2x_3 + x_5 = 0$
   $x_3 + x_4 - x_5 = 0$

6. $6x_1 - x_2 + x_3 = 0$
   $x_1 - x_4 + 2x_5 = 0$
   $x_1 - 2x_5 = 0$

7. $$\begin{aligned} -10x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 - x_6 &= 0 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_5 &= 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 &= 0 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} 8x_1 - 2x_3 + x_6 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 - x_6 &= 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_5 - x_6 &= 0 \\ x_4 - 3x_5 + 2x_6 &= 0 \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} x_2 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_5 &= 0 \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + x_4 + x_5 - 3x_6 &= 0 \\ 2x_2 + 4x_4 - x_5 - 6x_6 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_5 - x_6 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

11. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_5 - x_6 + x_7 &= 0 \\ x_3 - x_4 + x_5 - 2x_6 + 3x_7 &= 0 \\ x_1 - x_5 + 2x_6 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_5 + x_7 + x_8 &= 0 \\ 2x_2 - x_6 + x_7 - x_8 &= 0 \\ x_3 - 4x_4 + x_5 &= 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 - x_5 + x_6 - x_7 &= 0 \end{aligned}$$

13. ¿Puede un sistema **AX** = **O**, que tiene al menos tantas ecuaciones como desconocidos, tener una solución no trivial?

14. Demuestre que un sistema **AX** = **O** tiene una solución no trivial si y sólo si las columnas de **A** son linealmente dependientes. Sugerencia: Esto se puede hacer utilizando un argumento de dimensión. Otro enfoque es escribir **AX** como una combinación lineal de las columnas de **A**, como se sugiere en la Sección 14.1.1.

15. Sea A una matriz $n \times m$ de números reales. Sea que $S(\mathbf{A})$ denote el espacio de soluciones de **A**. Sea R el espaciode filas y C el espacio de columnas de **A**.
(a) Demuestre que $R^{\perp} = S(\mathbf{A})$.
(b) Demuestre que $C^{\perp} = S(\mathbf{A}^t)$.

14.6 Sistemas no homogéneos

Consideremos ahora el sistema lineal no homogéneo de n ecuaciones con m incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n. \end{aligned}$$

En forma de matriz

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \tag{14.1}$$

Donde **A** es la matriz de coeficientes

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

El sistema es no homogéneo si al menos un $bj \neq 0$. Los sistemas no homogéneos difieren de los sistemas lineales de dos formas significativas.

1. Un sistema no homogéneo puede no tener solución. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 6 \\ 4x_1 - 6x_2 &= 8 \end{aligned}$$

puede no tener solución. Si $2x_1 - 3x_2 = 6$, entonces $4x_1 - 6x_2$ debe ser igual a 12, no a 8.

Llamamos *consistente* a **AX** = **B** si existe una solución. Si no existe una solución, el sistema es *inconsistente*.

2. Una combinación lineal de soluciones de un sistema no homogéneo **AX** = **B** no necesita ser una solución. Por lo tanto las soluciones no tienen la estructura de espacio vectorial visto en el caso homogéneo.

Sin embargo, las soluciones de **AX** = **B** tienen una propiedad que es paralela a las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Llamaremos a **AX** = **O** el *sistema homogéneo asociado* del del sistema no homogéneo **AX** = **B**. Aunque una suma de soluciones del sistema no homogéneo no tiene por qué ser una solución, afirmamos que la *diferencia* de dos soluciones cualquiera del sistema no homogéneo es una solución, no del sistema, pero del sistema homogéneo asociado. La razón de esto es que, si $\mathbf{AU}_1 = \mathbf{B}$ y $\mathbf{AU}_2 = \mathbf{B}$, entonces

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2) = \mathbf{AU}_1 - \mathbf{AU}_2 = \mathbf{B} - \mathbf{B} = \mathbf{O}.$$

Esta es la clave para el teorema fundamental para escribir la solución general de **AX** = **B**.

TEOREMA 14.13

Sea **H** la solución general del sistema homogéneo asociado. Sea $\mathbf{U}_p$ cualquier solución particular de **AX** = **B**. Entonces la expresión $\mathbf{H} + \mathbf{U}_p$ contiene todas las soluciones del sistema no homogéneo **AX** = **B**.

Prueba Supongamos que $\mathbf{H}_1, \cdots, \mathbf{H}_k$ forman una base para el espacio de solución de **AX** = **O**, donde $k = m -$ número de filas no cero de $(\mathbf{A}_R)$. Entonces la solución general del sistema homogéneo es

$$\mathbf{H} = \alpha_1\mathbf{H}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{H}_k.$$

Si **U** es cualquier solución de **AX** = **B**, entonces $\mathbf{U} - \mathbf{U}_p$ es una solución del sistema homogéneo asociado, y por lo tanto tiene la forma

$$\mathbf{U} - \mathbf{U}_p = c_1\mathbf{H}_1 + \cdots + c_k\mathbf{H}_k$$

para algunas constantes $c_1, \cdots, c_k$. Pero a continuación,

$$\mathbf{U} = c_1\mathbf{H}_1 + \cdots + c_k\mathbf{H}_k + \mathbf{U}_p,$$

y esta solución está contenida en la expresión general $\mathbf{H} + \mathbf{U}_p$.

Como consecuencia inmediata, el teorema 14.13 nos dice cuando un sistema no homogéneo puede tener sólo una solución.

COROLARIO 14.6

Un sistema no homogéneo consistente **AX** = **B** tiene una solución única si y sólo si el sistema homogéneo asociado tiene sólo la solución trivial.

El corolario se deduce del hecho de que el sistema no homogéneo tiene una solución única exactamente cuando **H** es el vector cero en el teorema 14.13.

El teorema 14.13 sugiere una estrategia para encontrar todas las soluciones de **AX** = **B**, cuando el sistema es consistente.

Paso 1: Encuentre la solución general **H** de **AX** = **O**.

Paso 2: Hallar cualquier solución $\mathbf{U}_p$ de **AX** = **B**.

Paso 3: La solución general **AX** = **B** es entonces $\mathbf{H} + \mathbf{U}_p$.

Sabemos cómo llevar a cabo el paso (1). Vamos a describir un procedimiento para el paso (2).

Para encontrar una solución particular para $\mathbf{U}_p$, haga lo siguiente.

Paso 1: Defina la *matriz aumentada* $n \times m + 1$ $[\mathbf{A}\vdots\mathbf{B}]$ conjuntando la matriz de columna **B** como columna adicional a **A**. La matriz aumentada contiene los coeficientes de las incógnitas del sistema (en las primeras *m* columnas), así como los números del lado derecho de la las ecuaciones (elementos de **B**).

Paso 2: Reducir $[\mathbf{A}\vdots\mathbf{B}]$. Ya que reducimos una matriz para obtener las entradas principales de 1 siempre que sea posible, desde la parte superior izquierda hacia la parte inferior derecha, esto se traduce finalmente en una matriz reducida

$$[\mathbf{A}\vdots\mathbf{B}]_R = [\mathbf{A}_R\vdots\mathbf{C}],$$

en el que las primeras *m* columnas son la forma reducida de **A**, y la última columna es el resultado de **B** después de las operaciones de fila utilizados para reducir **A** se han aplicado a $[\mathbf{A}\vdots\mathbf{B}]$.

Las soluciones del sistema reducido $\mathbf{A}_R\mathbf{X} = \mathbf{C}$ son las mismas que las soluciones del sistema original **AX** = **B** porque las operaciones realizadas en los coeficientes de las incógnitas también se llevan a cabo en los b_j.

Paso 3: Desde $[\mathbf{A}_R\vdots\mathbf{C}]$, lea una solución $\mathbf{U}_p$ particular. Cuando se añade a la solución general **H** del sistema homogéneo asociado, tenemos la solución general de **AX** = **B**.

Vamos a ver algunos ejemplos. Ejemplo 14.24 sugiere cómo este procedimiento de matriz aumentada nos dice cuándo el sistema no tiene solución.

EJEMPLO 14.23

Resolveremos el sistema

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & -6 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

El primer paso es la matriz aumentada

$$[\mathbf{A}\vdots\mathbf{B}] = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 & \vdots & 8 \\ 1 & 4 & -6 & \vdots & 1 \\ 0 & -2 & 2 & \vdots & -2 \end{pmatrix}.$$

Al llevar a cabo el procedimiento de reducción en esta matriz aumentada 3×4 obtenemos

$$[\mathbf{A}\vdots\mathbf{B}]_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3/2 \end{pmatrix} = [\mathbf{A}_R\vdots\mathbf{C}] = [\mathbf{I}_3\vdots\mathbf{C}].$$

C es cualquier resultado en la cuarta columna cuando reducimos **A**, las tres primeras columnas de $[\mathbf{A}\vdots\mathbf{B}]$.

Esta matriz aumentada reducida $[\mathbf{A}_R \vdots \mathbf{C}]$ representa el sistema reducido $\mathbf{I}_3\mathbf{X} = \mathbf{C}$, que es el sistema

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 5/2$$
$$x_3 = 3/2.$$

De esto, podemos leer directamente una solución del sistema no homogéneo reducido. En este ejemplo, esta solución es única por el Corolario 14.6 porque el sistema homogéneo asociado tiene sólo la solución trivial $\mathbf{A}_R = \mathbf{I}_3$.

En consonancia con el tratamiento del sistema como una ecuación matricial, escribimos generalmente la solución en términos de matrices columna. En este ejemplo,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}. \quad \blacklozenge$$

EJEMPLO 14.24

Hemos visto que el sistema

$$2x_1 - 3x_2 = 6$$
$$4x_1 - 6x_2 = 8$$

no tiene solución.Veremos cómo esta conclusión se revela cuando trabajamos con la matriz aumentada, que es

$$[\mathbf{A} \vdots \mathbf{B}] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \vdots & 6 \\ 4 & -6 & \vdots & 8 \end{pmatrix}.$$

Reducimos la matriz para obtener

$$[\mathbf{A} \vdots \mathbf{B}]_R = [\mathbf{A}_R \vdots \mathbf{C}] = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & \vdots & -4 \end{pmatrix}.$$

La segunda ecuación del sistema reducido es

$$0x_1 + 0x_2 = -4$$

que no puede tener solución.

En este ejemplo, la matriz aumentada tiene rango 2, mientras que la matriz del sistema homogéneo tiene rango 1. En general, cada vez que el rango de **A** es menor que el rango de $[\mathbf{A} \vdots \mathbf{B}]$ $\mathbf{A}_R$ tendrá al menos una fila de ceros, mientras que la fila correspondiente de la matriz aumentada reducida $[\mathbf{A}_R \vdots \mathbf{C}]$ tendrá un elemento distinto de cero en esta fila en la columna **C**. Esto corresponde a una ecuación de la forma

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_m = c_j \neq 0$$

y esto no tiene solución para los x_i. En este caso el sistema es inconsistente.

Vamos a recordar esta importante observación.

TEOREMA 14.14

El sistema no homogéneo **AX** = **B** es consistente si y sólo si **A** y [**A**⋮**B**] tienen el mismo rango.

EJEMPLO 14.25

Resolveremos el sistema

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \\ -4x_1 + x_2 + 7x_3 &= -5 \\ -2x_1 - x_2 + 11x_3 &= 14. \end{aligned}$$

La matriz aumentada es

$$[\mathbf{A}\vdots\mathbf{B}] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 3 \\ -4 & 1 & 7 & \vdots & -5 \\ -2 & -1 & 11 & \vdots & 14 \end{pmatrix}.$$

Reducimos la matriz aumentada para obtener

$$[\mathbf{A}\vdots\mathbf{B}]_R = [\mathbf{A}_R\vdots\mathbf{C}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -5 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}.$$

A tiene rango 2, debido a que su matriz reducida tiene dos filas distintas de cero. Pero [**A**⋮**B**] tiene rango 3, ya que su forma reducida tiene tres filas distintas de cero. Por lo tanto, este sistema es también inconsistente. Podemos observar desde el sistema reducido que la última ecuación es

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

sin solución.

EJEMPLO 14.26

Resolveremos el sistema

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_4 + x_5 + 6x_6 &= -3 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 4x_6 &= 1 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_6 &= 0. \end{aligned}$$

La matriz aumentada es

$$[\mathbf{A}\vdots\mathbf{B}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 6 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 & \vdots & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 1 & 0 & 2 & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Reducimos la matriz aumentada para obtener

$$[\mathbf{A}\vdots\mathbf{B}]_R = [\mathbf{A}_R\vdots\mathbf{C}] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 27/8 & 15/8 & 60/8 & \vdots & -17/8 \\ 0 & 1 & 0 & 13/8 & 9/8 & 20/8 & \vdots & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 & 7/8 & 12/8 & \vdots & 7/8 \end{pmatrix}.$$

Las primeras seis columnas son $\mathbf{A}_R$ y leemos de $[\mathbf{A}\vdots\mathbf{B}]$ que tanto A como $[\mathbf{A}\vdots\mathbf{B}]$ tienen rango 3, por lo que el sistema es consistente. De la matriz aumentada vemos inmediatamente que

$$\begin{aligned} x_1 + \tfrac{27}{8}x_4 + \tfrac{15}{8}x_5 + \tfrac{60}{8}x_6 &= -\tfrac{17}{8} \\ x_2 + \tfrac{13}{8}x_4 + \tfrac{9}{8}x_5 + \tfrac{20}{8}x_6 &= \tfrac{1}{8} \\ x_3 + \tfrac{11}{8}x_4 + \tfrac{7}{8}x_5 + \tfrac{12}{8}x_6 &= \tfrac{7}{8}. \end{aligned}$$

De estas tenemos que

$$\begin{aligned} x_1 &= -\tfrac{27}{8}x_4 - \tfrac{15}{8}x_5 - \tfrac{60}{8}x_6 - \tfrac{17}{8} \\ x_2 &= -\tfrac{13}{8}x_4 - \tfrac{9}{8}x_5 - \tfrac{20}{8}x_6 + \tfrac{1}{8} \\ x_3 &= -\tfrac{11}{8}x_4 - \tfrac{7}{8}x_5 - \tfrac{12}{8}x_6 + \tfrac{7}{8}. \end{aligned}$$

Podríamos haber ido directamente a estas ecuaciones sin el paso intermedio. Estas ecuaciones en realidad dan la solución general, con x_1, x_2, y x_3 en términos de las constantes arbitrarias x_4, x_5, y x_6. La solución es

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -\tfrac{27}{8}x_4 - \tfrac{15}{8}x_5 - \tfrac{60}{8}x_6 - \tfrac{17}{8} \\ -\tfrac{13}{8}x_4 - \tfrac{9}{8}x_5 - \tfrac{20}{8}x_6 + \tfrac{1}{8} \\ -\tfrac{11}{8}x_4 - \tfrac{7}{8}x_5 - \tfrac{12}{8}x_6 + \tfrac{7}{8} \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}.$$

Para escribir esto de una manera más reveladora, sea $x_4 = 8\alpha$, $x_5 = 8\beta$ y $x_6 = 8\gamma$ para escribir

$$\mathbf{X} = \alpha\begin{pmatrix} -27 \\ -13 \\ -11 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -15 \\ -9 \\ -7 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} -60 \\ -20 \\ -12 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -17/8 \\ 1/8 \\ 7/8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{H} + \mathbf{U}_p$$

con $\mathbf{H}$ como la solución general de $\mathbf{AX} = \mathbf{O}$ y $\mathbf{U}_p$ como una solución particular de $\mathbf{AX} = \mathbf{C}$.

EJEMPLO 14.27

El sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -11 \\ -5 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 14 \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

tiene la matriz aumentada

$$[\mathbf{A}\vdots\mathbf{B}] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -11 & \vdots & -6 \\ -5 & 1 & 9 & \vdots & 12 \\ 1 & 1 & 14 & \vdots & -5 \end{pmatrix},$$

y la reducimos hasta

$$[\mathbf{A}\vdots\mathbf{B}]_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -86/31 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -191/155 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -11/155 \end{pmatrix}.$$

Las tres primeras columnas nos dicen que **A** tiene un rango de 3, por lo que el sistema homogéneo asociado sólo tiene la solución trivial. Dado el rango de $[\mathbf{A}_R \vdots \mathbf{C}]$ es también 3, el sistema tiene una solución. Esta solución es única porque $\mathbf{A}_R = \mathbf{I}_3$.

A partir de la cuarta columna de $[\mathbf{A} \vdots \mathbf{B}]_R$, leemos la solución única

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -86/31 \\ -191/155 \\ -11/155 \end{pmatrix}. \quad \blacklozenge$$

SECCIÓN 14.6 PROBLEMAS

En cada uno de los problemas 1 a 14, encuentre la solución general del sistema o muestre que el sistema es inconsistente. Escriba la solución en forma de matriz.

1. $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + 10x_2 - x_3 &= 2 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 &= 1 \\ x_1 - 3x_4 &= 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 &= 16 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_4 - x_6 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_3 + x_5 &= 1 \\ x_2 - x_4 + 6x_6 &= 3 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 1 \\ -x_1 + 3x_2 &= 0 \\ x_1 - 4x_2 &= 3 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} 3x_2 - 4x_4 &= 10 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_6 &= 8 \\ x_2 + x_3 - 6x_4 + x_6 &= -9 \\ x_1 - x_2 + x_6 &= 0 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_4 &= 1 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 &= 0 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} 8x_2 - 4x_3 + 10x_6 &= 1 \\ x_3 + x_5 - x_6 &= 2 \\ x_4 - 3x_5 + 2x_6 &= 0 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} 14x_3 - 3x_5 + x_7 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_6 &= -4 \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -1 \\ 4x_1 + 3x_2 &= 4 \end{aligned}$$

11. $$\begin{aligned} 7x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= = -7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 &= 6 \\ x_2 - 3x_4 &= -5 \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} -4x_1 + 5x_2 - 6x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 &= -5 \\ -6x_1 + 16x_2 - 11x_3 &= 1 \end{aligned}$$

13. $$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + 7x_3 &= 4 \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} -6x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 - x_4 &= -5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 7x_4 &= 0 \end{aligned}$$

15. Demuestre que el sistema **AX** = **B** es consistente si y sólo si **B** se encuentra en el espacio de columna de **A**.

14.7 Matrices inversas

Sea **A** una matriz $n \times n$. Una matriz $n \times n$ **B** es una inversa de **A** si

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n.$$

Es fácil de encontrar matrices que no tienen inversa. Por ejemplo, sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suponga que

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

es una inversa de **A**. Entonces

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

lo que implica que

$$a = 1, b = 0, 2a = 0 \text{ and } b = 1$$

y esto es imposible. Por otro lado, muchas matrices tienen inversas. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/7 & -1/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/7 & -1/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una matriz que tiene una inversa se llama *no singular*. Una matriz sin inversa es *singular*.

Una matriz puede tener sólo una inversa. Supongamos que **B** y **C** son inversas de **A**. Entonces

$$\mathbf{B} = \mathbf{BI}_n = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) = (\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{I}_n\mathbf{C} = \mathbf{C}.$$

En vista de esto, vamos a denotar la inversa de **A** como $\mathbf{A}^{-1}$. Ahora veremos algunos hechos adicionales sobre matrices no singulares y matrices inversas.

TEOREMA 14.15

Sea A una matriz $n \times n$. Entonces,

1. $\mathbf{I}_n$ es no singular y es su propio inverso.
2. Si **A** y **B** son matrices no singulares $n \times n$, entonces también lo es **AB**. Además,

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

La inversa de un producto es el producto de las inversas en orden inverso. Esto se extiende a un producto de cualquier número finito de matrices.

3. Si **A** es no singular, también lo es $\mathbf{A}^{-1}$, y

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}.$$

La inversa de la inversa es la propia matriz.

4. Si **A** es no singular, también lo es su transpuesta $\mathbf{A}^t$, y

$$(\mathbf{A}^t)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^t.$$

La inversa de una transposición es la transpuesta de la inversa.

5. **A** es no singular si y sólo si $\mathbf{A}_R = \mathbf{I}_n$.
6. **A** es no singular si y sólo si rango(**A**) $= n$.

7. Si **AB** es no singular, también lo son **A** y **B**.
8. Si **A** y **B** son matrices $n \times n$, y cualquiera de ellos es singular, entonces sus productos **AB** y **BA** son singulares.
9. Cada matriz elemental es no singular y su inversa es una matriz elemental del mismo tipo.
10. Una matriz $n \times n$ **A** es no singular si y sólo si $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ tiene una solución para cada $n \times 1$ **B**.

Prueba Estas declaraciones utilizan la singularidad de la inversa de una matriz. Esto nos permite mostrar que una matriz es la inversa de otra matriz mostrando que se comporta como el inverso (el producto de las dos matrices es la matriz de identidad).

La conclusión (2) del teorema es cierto porque

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}_n.$$

Del mismo modo

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{I}_n.$$

Esto prueba que $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ se comporta como la inversa de **AB**, por lo tanto, esta debe tener inversa.

Para la conclusión (3) observamos que la ecuación

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$

es simétrica no sólo en el sentido de que $\mathbf{A}^{-1}$ es la inversa de **A**, sino también **A** es la inversa de $\mathbf{A}^{-1}$. Este último fraseo significa que

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}^{-1})^{-1}.$$

Para la conclusión (4), primero escribimos

$$\mathbf{I}_n = (\mathbf{I}_n)^t = (\mathbf{AA}^{-1})^t = (\mathbf{A}^{-1})^t\mathbf{A}^t.$$

Del mismo modo,

$$\mathbf{A}^t(\mathbf{A}^{-1})^t = \mathbf{I}_n$$

Estas dos ecuaciones muestran que $(\mathbf{A}^t)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^t$

La clave de la conclusión (5) se encuentra en que recordemos (Sección 14.1.1) que las columnas de **AB** son **A** veces las columnas de **B**. Usando esto, podemos intentar construir un inverso para **A** una columna a la vez. Para encontrar **B** de manera que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$, tenemos que ser capaces de elegir las columnas de **B** para que

$$\text{columna } j \text{ de } \mathbf{AB} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \text{columna } j \text{ de } \mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

que tiene 1 en el j-ésimo lugar y ceros en el resto.

Si ahora $\mathbf{A}_R = \mathbf{I}_n$, entonces el sistema que acabamos de escribir para la columna j de **B** tiene una solución única para $j = 1, \cdots, n$. Estas soluciones forman las columnas de **B** tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$, obteniendo $\mathbf{A}^{-1}$.

(En realidad, debemríamos demostrar que $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$ también, pero no vamos a entrar en detalles.)

A la inversa, si **A** es no singular entonces este sistema tiene una solución única para $j = 1, \cdots, n$ debido a que estas soluciones son las columnas de $\mathbf{A}^{-1}$. Entonces $\mathbf{A}_R = \mathbf{I}_n$. Esto demuestra la conclusión (5).

La conclusión (6) se deduce directamente de (5).

Para la conclusión (7), supongamos que **AB** es no singular. Entonces, por alguna matriz **K**, $(\mathbf{AB})\mathbf{K} = \mathbf{I}_n$. Entonces $\mathbf{A}(\mathbf{BK}) = \mathbf{I}_n$, por lo que **A** es no singular. Del mismo modo, **B** es no singular.

La conclusión (8) sigue de (7).

La conclusión (9) sigue inmediatamente de la discusión precedente del teorema 14.6.

Por último, para la conclusión (10), primero supongamos que **AX** = **B** tiene una solución para cada matriz **B** $n \times 1$. Sea $\mathbf{X}_j$ la solución de

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

con 1 en la fila j y todos los demás elementos cero. Entonces $\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}n$ forman las columnas de una matriz **K** $n \times n$ y es fácil comprobar que $\mathbf{AK} = \mathbf{I}_n$, por lo tanto, $\mathbf{K} = \mathbf{A}^{-1}$ y **A** es no singular. A la inversa, si **A** es no singular, entonces $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ es la solución de **AX** = **B** para cualquier matriz **B** $n \times 1$.

Las matrices inversas están relacionadas a los sistemas de ecuaciones lineales de la siguiente manera.

TEOREMA 14.16

Sea **A** $n \times n$.

1. Un sistema homogéneo **AX** = **O** tiene una solución no trivial si y sólo si **A** es singular.
2. Un sistema no homogéneo consistente **AX** = **B** tiene una solución única si y sólo si **A** es no singular. En este caso la solución es

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\ .$$

Prueba Si **A** es singular, entonces $\mathbf{AR} \neq \mathbf{I}_n$ en virtud del teorema 14.15, conclusión (5), por lo que el sistema **AX** = **O** tiene una solución no trivial por el corolario 14.3.

Por el contrario, supongamos que el sistema **AX** = **O** tiene una solución no trivial. Entonces rango(**A**) < n por el teorema 14.15, conclusión (6), por lo que **A** es singular.

Esto demuestra conclusión (1). Para la conclusión (2), supongamos que el sistema es consistente. La solución general tiene la forma $\mathbf{X} = \mathbf{H} + \mathbf{U}_p$, donde **H** es la solución general del sistema homogéneo asociado. Por lo tanto el sistema dado tiene una solución única exactamente cuando el sistema homogéneo sólo tiene la solución trivial, lo que ocurre si y sólo si **A** es no singular.

Encontrar la inversa de una matriz no singular se hace más fácilmente utilizando una rutina de software. En el paquete `linalg` de rutinas de álgebra lineal de MAPLE, la inversa de una matriz **A** que se ha introducido se puede encontrar utilizando

```
inversa(A);
```

Si sucede que **A** es singular, la rutina devolverá a esta conclusión.

A pesar de esto, a veces es útil, para entender un procedimiento, hacer la búsqueda de una matriz inversa.

Sea **A** una matriz $n \times n$. Formar la matriz $n \times 2n$ $[\mathbf{I}_n \vdots \mathbf{A}]$ cuyas primeras n columnas son **A** y cuyas segundas n columnas son $\mathbf{I}_n$. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$$

entonces

$$[\mathbf{A}\vdots\mathbf{I}_2] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \vdots & 1 & 0 \\ -1 & 9 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Reduzca **A**, lleve a cabo las operaciones de fila en toda la matriz $[\mathbf{A}\vdots\mathbf{I}_n]$. **A** es no singular exactamente cuando $\mathbf{AR} = \mathbf{I}_n$ aparece en las primeras n columnas. En este caso las segundas n columnas forman $\mathbf{A}^{-1}$.

EJEMPLO 14.28

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Forme

$$[\mathbf{A}\vdots\mathbf{I}_2] = \begin{pmatrix} 5 & -1 & \vdots & 1 & 0 \\ 6 & 8 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Reduzca **A**, lleve a cabo cada operación de fila en toda la fila de la matriz aumentada. Primero multiplique la fila uno por 1/5:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/5 & \vdots & 1/5 & 0 \\ 6 & 8 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sume −6 veces la fila uno a la fila dos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/5 & \vdots & 1/5 & 0 \\ 0 & 46/5 & \vdots & -6/5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplique la fila dos por 5/46:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/5 & \vdots & 1/5 & 0 \\ 6 & 1 & \vdots & -6/46 & 5/46 \end{pmatrix}.$$

Sume 1/5 veces la fila dos a la fila uno:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 8/46 & 1/46 \\ 0 & 1 & \vdots & -6/46 & 5/46 \end{pmatrix}.$$

Esta es la forma reducida. Las dos primeras columnas son $\mathbf{A}_R$. Ya que $\mathbf{A}_R = \mathbf{I}_2$, **A** es no singular. Además, podemos leer $\mathbf{A}^{-1}$ a partir de las dos últimas columnas:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 8/46 & 1/46 \\ -6/46 & 5/46 \end{pmatrix}. \quad ♦$$

EJEMPLO 14.29

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 21 \\ 4 & -28 \end{pmatrix}.$$

Forme

$$[\mathbf{A}\vdots\mathbf{I}_2] = \begin{pmatrix} -3 & 21 & \vdots & 1 & 0 \\ 4 & -28 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Reducir esta matriz multiplicando la fila uno por −1/3 y luego añadiendo −4 veces la fila uno a la fila dos para llegar a

$$\begin{pmatrix} 1 & -7 & \vdots & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 4/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las dos columnas de la izquierda, que forman $\mathbf{A}_R$, no son iguales a $\mathbf{I}_2$, por lo que $\mathbf{A}$ es singular y no tiene inversa.

Vamos a ilustrar el uso de una matriz inversa para resolver un sistema no homogéneo.

EJEMPLO 14.30

Resolveremos el sistema

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$$
$$x_1 + 9x_2 - 2x_3 = -8$$
$$4x_1 - 8x_2 + 11x_3 = 15.$$

La matriz de coeficientes es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -2 \\ 4 & -8 & 11 \end{pmatrix}.$$

Una suma y multiplicación dan como resultado

$$[\mathbf{A} \vdots \mathbf{I}_3]_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 83/53 & -13/53 & -25/53 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -19/53 & 10/53 & 7/53 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -44/53 & 12/53 & 19/53 \end{pmatrix}.$$

Las primeras tres columnas son $\mathbf{I}_3$, por lo tanto, $\mathbf{A}$ es no singular y el sistema tiene una solución única. Las últimas tres columnas de la matriz aumentada reducida nos dan

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{53}\begin{pmatrix} 83 & -13 & -25 \\ -19 & 10 & 7 \\ -44 & 12 & 19 \end{pmatrix}.$$

La solución única del sistema es $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{53}\begin{pmatrix} 83 & -13 & -25 \\ -19 & 10 & 7 \\ -44 & 12 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61/53 \\ -51/53 \\ 13/53 \end{pmatrix}. \;\blacklozenge$$

SECCIÓN 14.7 PROBLEMAS

En cada uno de los problemas 1 a 10, halle la inversa de la matriz o muestre que la matriz es singular.

1. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 16 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 12 & 1 & 14 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 14 \end{pmatrix}$

En cada uno de los problemas 11 al 15, utilice una matriz inversa para encontrar la solución única del sistema.

11. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\ x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= 2 \\ x_1 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 &= -5 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} 8x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 5 \end{aligned}$

13. $\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 &= -4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 8 \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} 12x_1 + x_2 - 3x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= -5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} 4x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= -7 \end{aligned}$

14.8 Vectores de mínimos cuadrados y ajuste de datos

En esta sección, vamos a desarrollar un acercamiento al método de los vectores de mínimos cuadrados que se aplica a un problema de ajuste de datos.

Sea **A** una matriz $n \times n$ de números y **B** un vector en R^n. El sistema **AX** = **B** puede o puede no tener una solución. Defina un vector *m* **X*** que sea un *vector de mínimos cuadrados* para el sistema **AX** = **B** si

$$\| \mathbf{AX}^* - \mathbf{B} \| \leq \| \mathbf{AX} - \mathbf{B} \| \qquad (14.2)$$

Para cada **X** en R^n.

Por lo tanto **X*** es un vector de mínimos cuadrados para **AX** = **B** si **AX*** está al menos tan cerca de **B** como **AX** lo está a **B**, para cada vector *m* **X**. Esto significa que, para cada **X**,

$$\| \mathbf{AX}^* - \mathbf{B} \| \leq \| \mathbf{AX} - \mathbf{B} \| .$$

Vamos a desarrollar un método para encontrar todos los vectores de mínimos cuadrados para un determinado sistema **AX** = **B**. La clave está en el espacio de la columna *S* de **A**. *S* es un subespacio de R^n, atravesado por las columnas $\mathbf{C}_1, \cdots, \mathbf{C}_m$ de **A**. *S* consiste de exactamente esos vectores **B** en R^n para los que el sistema **AX** = **B** tiene una solución. Esto es porque, si

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Es una matriz de números, entonces

$$\mathbf{AX} = x_1\mathbf{C}_1 + x_2\mathbf{C}_2 + \cdots + x_m\mathbf{C}_m = \mathbf{B}$$

exactamente cuando **B** es una combinación lineal de las columnas de **A**, por lo tanto, está en S.

El siguiente lema revela una conexión entre los vectores de mínimos cuadrados para **AX** = **B** y proyecciones ortogonales, según lo sugerido por la desigualdad (14.2).

LEMA 14.1

Sea **B** un vector n. Entonces, un vector m **X*** es un vector de cuadrados mínimos para **AX** = **B** si y sólo si

$$\mathbf{AX}^* = \mathbf{B}_S,$$

donde $\mathbf{B}_S$ es la proyección ortogonal de **B** en S.

Prueba Supongamos primero que $\mathbf{AX}^* = \mathbf{B}_S$. Entonces

$$\| \mathbf{B} - \mathbf{B}_S \| = \| \mathbf{B} - \mathbf{AX}^* \|$$
$$\leq \| \mathbf{B} - \mathbf{C} \|$$

para todos los vectores **C** en S, porque $\mathbf{B}_S$ es el vector de S más cercano a **B**. Pero los vectores **C** en S son exactamente los vectores **AX** para **X** en R^m, entonces

$$\| \mathbf{B} - \mathbf{AX}^* \| \leq \| \mathbf{B} - \mathbf{AX} \|$$

por cada vector m **X**, y esto demuestra que **X*** es un vector de mínimos cuadrados para **AX** = **B**.

Por el contrario, supongamos que **X*** es un vector de mínimos cuadrados para **AX** = **B**. Entonces

$$\| \mathbf{AX}^* - \mathbf{B} \| \leq \| \mathbf{AX} - \mathbf{B} \|$$

para toda **X** en S. Pero entonces **AX*** es el vector de S más cercano a **B**. Ya que $\mathbf{B}_S$ es el único vector con esta propiedad, entonces $\mathbf{AX}^* = \mathbf{B}_S$. Esto completa la demostración.

Ahora estamos en condiciones de caracterizar completamente los vectores de mínimos cuadrados de **AX** = **B** como las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales obtenidos usando **A**.

TEOREMA 14.17 Vectores de mínimos cuadrados para AX = B

Un vector m **X** es un vector de mínimos cuadrados de **AX** = **B** si y sólo si **X** es una solución del sistema

$$\mathbf{A}^t\mathbf{AX} = \mathbf{A}^t\mathbf{B}. \ \blacklozenge$$

Prueba Supongamos primero que **X*** es un vector de mínimos cuadrados de **AX** = **B**. Por el lema,

$$\mathbf{AX}^* = \mathbf{B}_S.$$

Sabemos que $\mathbf{B} - \mathbf{B}_S$ está en $S^{\perp}$, y $\mathbf{B} - \mathbf{AX}^*$ está en $S^{\perp}$. Esto significa que las columnas de **A** son ortogonales a $\mathbf{B} - \mathbf{AX}^*$. Escribimos el producto escalar de la columna j de **A** con $\mathbf{B} - \mathbf{AX}^*$ como una matriz producto, esto significa que la ortogonalidad

$$(\mathbf{C}_j)^t(\mathbf{B} - \mathbf{AX}^*) = 0.$$

Ahora $(\mathbf{C}_j)^t$ es la fila j de $\mathbf{A}^t$, por lo que

$$\mathbf{A}^t(\mathbf{B} - \mathbf{AX}^*) = \mathbf{O}$$

en la que **O** es la matriz cero $m \times 1$. Pero esta ecuación se puede escribir

$$\mathbf{A}^t\mathbf{AX}^* = \mathbf{A}^t(\mathbf{B})$$

y esto significa que **X*** es una solución del sistema **A′AX** = **A′B**.

Para demostrar lo contrario, supongamos que **X*** es una solución de este sistema. Invirtiendo parte del argumento reciente prueba que **B** − **AX*** está en $S^{\perp}$. Entonces,

$$\mathbf{B} = \mathbf{AX}^* + (\mathbf{B} - \mathbf{AX}^*)$$

es una descomposición de **B** en una suma de un vector en S y de uno en $S^{\perp}$. Como esta descomposición es única, entonces **AX*** debe ser la proyección ortogonal de **B** en *S*:

$$\mathbf{AX}^* = \mathbf{B}_S.$$

Por el lema, **X*** es un vector de mínimos cuadrados para **AX** = **B**.

El teorema 14.17 proporciona una forma de obtener todos los vectores de mínimos cuadrados para **AX** = **B**. Estas son las soluciones del sistema lineal **A′AX** = **A′B**. Ya que sabemos cómo resolver sistemas lineales, esto nos proporciona un método computable para encontrar vectores de mínimos cuadrados. Por esta razón, llamaremos al sistema

$$\mathbf{A}'\mathbf{AX} = \mathbf{A}'\mathbf{B}$$

el *sistema de vmc* (vectores de mínimos cuadrados) *auxiliar* de **AX** = **B**.

Además de proporcionar un método para encontrar todos los mínimos cuadrados para un sistema de vectores, el sistema de vmc auxiliar nos dice cuando un sistema tiene un solo vector de mínimos cuadrados. Esto ocurre exactamente cuando el sistema auxiliar tiene una solución única, que a su vez se produce cuando **A′A** es no singular. En este caso, el vector cuadrados menos para **AX** = **B** es

$$\mathbf{X}^* = (\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{B}.$$

Esto demuestra el siguiente corolario.

COROLARIO 14.7

AX = **B** tiene un único vector de mínimos cuadrados si **A′A** es no singular.

EJEMPLO 14.31

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Vamos a encontrar todos los vectores de mínimos cuadrados para **AX = B**. Calcule

$$\mathbf{A}'\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 24 \end{pmatrix}.$$

Esta es no singular, y nos encontramos con que

$$(\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 12/22 & -5/22 \\ -5/22 & 3/22 \end{pmatrix}.$$

Finalmente

$$\mathbf{A}^t\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema auxiliar de vmc es

$$\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 24 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto tiene una solución única, que es el único vector de mínimos cuadrados para el sistema:

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 24 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/22 & -5/22 \\ -5/22 & 3/22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 108/22 \\ -45/22 \end{pmatrix}. \quad \blacklozenge$$

Aplicaremos vectores de mínimos cuadrados para el problema de trazar una línea recta que es, en cierto sentido, el mejor ajuste a un conjunto de puntos de datos indicados en un plano. Podemos entender mejor la idea con un ejemplo. Supongamos que (tal vez por el experimento u observación) tenemos los puntos de datos

$$(0, -5.5), (1, -2.7), (2, -0.8), (3, 1.2), (5, 4.7),$$

que vamos a etiquetar (x_j, y_j) (de izquierda a derecha) para $j = 1, 2, 3, 4, 5$ Queremos dibujar una recta recta $y = ax + b$ que sea el "mejor ajuste" a estos puntos. Para cada uno de los puntos observados (x_j, y_j), piense en $ax_j + b$ como una aproximación a y_j, entonces

$$ax_1 + b \approx y_1,$$
$$ax_2 + b \approx y_2,$$
$$\vdots$$
$$ax_5 + b \approx y_5.$$

Considere el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.5 \\ -2.7 \\ -0.8 \\ 1.2 \\ 4.7 \end{pmatrix}.$$

Este tiene la forma **AX** = **B** con **A** definida de forma que la fila j de la matriz producto **AX** es $ax_j + b$, y esto se establece igual a la matriz de la columna **B** de la lista de y_j dadas. Por supuesto, $ax_j + b$ es sólo aproximadamente igual a y_j. Queremos una línea que "mejor se aproxime a" estos puntos, por lo que se obtiene una a y una b mediante la solución de mínimos cuadrados para un vector **X*** para este sistema.

Una vez que nos decidimos por este enfoque, el resto es aritmética. Calcule

$$\mathbf{A}^t\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 39 \end{pmatrix},$$

y

$$(\mathbf{A}^t\mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 39/74 & -11/74 \\ -11/74 & 5/74 \end{pmatrix}.$$

El vector de mínimos cuadrados único es

$$\mathbf{X}^* = (\mathbf{A}^t\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^t\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -5.0229729\cdots \\ 2.001351351\cdots \end{pmatrix}.$$

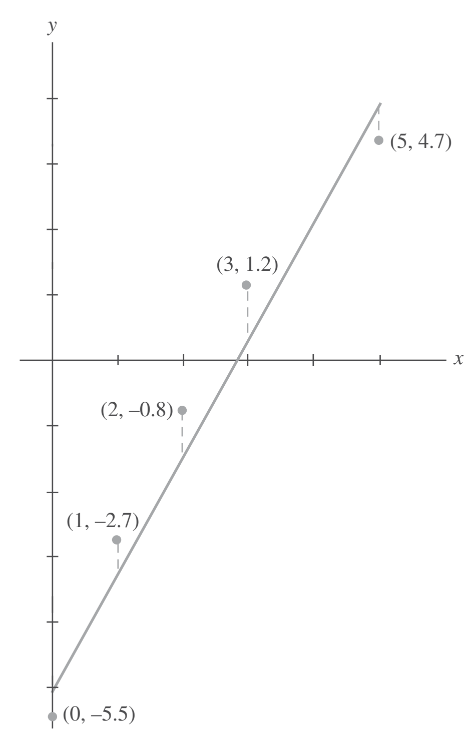


Figura 14.5 Cuadrados mínimos ajustados a datos

Elija $a = 2$ y $b = -5.02$ para obtener la recta $y = 2x - 5.02$ como la línea de mejor ajuste a los datos. Entre todas las líneas que podríamos dibujar, esta minimiza la suma de las distancias verticales desde la línea de los puntos de datos (Figura 14.5).

No debería sorprender que este problema tiene una solución única. La línea que encontramos es llamada una *línea de mínimos cuadrados* para los datos. En estadística esto se llama a menudo como la l*ínea de regresión*.

SECCIÓN 14.8 PROBLEMAS

En cada uno de los problemas 1 al 6, encuentre todos los vectores de mínimos cuadrados para el sistema dado.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 2 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

En cada uno de los problemas 7 al 10, encuentre la línea de mínimos cuadrados para los datos.

7. (1, 3.8), (3, 11.7), (5, 20.6), (7, 26.5), (9, 35.2)
8. (−5, 21.2), (−3, 13.6), (−2, 10.7), (0, 4.2), (1, 2.4), (3, −3.7), (6, −14.2)
9. (−3, −23), (0, −8.2), (1, −4.6), (2, −0.5), (4, 7.3), (7, 19.2)
10. (−3, −7.4), (−1, −4.2), (0, −3.7), (2, −1.9), (4, 0.3), (7, 2.8), (11, 7.2)

14.9 Factorización LU

Sea **A** una matriz de números $n \times m$. A veces queremos factorizar **A** en el producto de una matriz triangular inferior **L** $n \times n$ y una matriz triangular superior **U** $n \times m$. Vamos a ver por qué esto es útil en breve. En primer lugar vamos a desarrollar un procedimiento para hacerlo.

> Una matriz es *triangular superior* si sus elementos distintos de cero sólo se encuentran en o por encima de la diagonal principal. De manera equivalente, todos los elementos debajo de la diagonal principal son iguales a cero. Una matriz es *triangular inferior* si sus únicos elementos no cero están en o por debajo de la diagonal principal. En el caso de que la matriz no sea cuadrada, los principales elementos de la diagonal son los elementos 1, 1, 2, 2, $\cdots$, n, n. Si $m >$ n, habrá columnas más allá de las columnas que contengan estos elementos diagonales.

Para ver cómo construir **L** y **U**, considere un ejemplo. Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Construiremos **U** mediante la operación elemental por filas de la adición de un múltiplo escalar de una fila a otra. *No* vamos a intercambiar filas o multiplicar filas individuales por escalares en la formación de **U**.

Comience con la entrada principal en **A**. Esto es 2 en la posición 1, 1. Por una razón que se convertirá claro cuando constryamos **L**, resalte la columna uno de **A**, de alguna manera, en este caso con negritas (o, si está escribiendo la matriz en un trozo de papel, podría circular estos elementos):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 1 & 1 & -3 & 5 \\ \mathbf{2} & 3 & 6 & 1 & 4 \\ \mathbf{6} & 2 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ahora agregue múltiplos escalares de la fila uno a las otras filas para obtener ceros por debajo de la entrada principal de 2. En la matriz **B**, resalte los elementos en la columna dos por debajo de la columna uno.

$$\mathbf{A} \to \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & \mathbf{2} & 5 & 4 & -1 \\ 0 & \mathbf{-1} & -2 & 8 & -18 \end{pmatrix}.$$

La fila dos tiene un elemento principal 2 también. Añada un múltiplo escalar (en este ejemplo, multiplique por 1/2) de la fila dos la fila tres para obtener un cero en la posición 3, 2. Después de hacer esto, seleccione el elemento en la posición 3, 3.

$$\mathbf{B} \to \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1/2} & 10 & -37/2 \end{pmatrix}.$$

En este ejemplo $n = 3$ y $m = 5$, por lo que los elementos de la diagonal son los elementos 1, 1; 2, 2; y 3, 3, y hay dos columnas a la derecha de las columnas que contienen esta diagonal principal. Tenga en cuenta que **C** es triangular superior. Esta es **U**:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 10 & -37/2 \end{pmatrix}.$$

Observe que el resaltado no ha jugado ningún papel en la producción de **U**. Estas piezas destacadas de columnas se utilizan para formar **L**, que será triangular inferior 3 × 3. Los elementos resaltados están todos en las tres primeras columnas, y todos caen en o por debajo de la diagonal principal. Ahora forman la matriz triangular inferior 3 × 3

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

D incluye la primera columna resaltada de **A**, los elementos resaltados de la segunda columna en **B**, y el elemento resaltado de la tercera columna en **C**, llenas con ceros en por encima de la diagonal principal. Esto todavía no es **L**. Para ello, queremos 1 a lo largo de la diagonal principal. Por lo tanto, multiplicamos la columna uno de **D** por 1/2, la segunda columna por 1/2, y la tercera columna por 2. Esto produce **L**:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es fácil comprobar que **LU** = **A**.

Este procedimiento puede llevarse a cabo en general. Primera forme **U**, explotando los elementos principales de las columnas de **A** y haciendo una operación elemental por renglón para obtener ceros por debajo de estos elementos, a continuación, retenga los elementos de estas columnas sobre y por encima de la diagonal principal para formar los elementos de **U** por encima de su diagonal principal. Rellene el resto de **U**, por debajo de la diagonal principal, con ceros.

La estrategia de resaltar es un modo para recordar los elementos que van a ser usados en la formación de columnas de **L** sobre y por debajo de la diagonal principal. Después de la colocación de estos elementos, y rellenando ceros arriba de la diagonal principal, multiplique cada columna por un escalar para obtener 1's a lo largo de la diagonal principal. La matriz resultante es **L**.

El proceso de factorización de **A** en un producto de matrices triangulares inferiores y superiores se llama *Factorización LU*.

¿Cuál es el punto de factorización LU? En las aplicaciones del mundo real, las matrices pueden ser extremadamente grandes y los números no serán todos números enteros pequeños. Mucha aritmética está involucrada en la manipulación de tales matrices. Tener matrices triangulares superiores e inferiores implica tener que hacer menos aritmética (y de ahí ahorrar tiempo en la computadora, y dinero), y los sistemas de ecuaciones que tienen matrices de coeficientes triangulares son más fáciles de resolver.

Como una instancia específica de una simplificación con la factorización LU, supongamos que queremos resolver un sistema **AX** = **B**. Si escribimos **A** = **LU**, entonces el sistema es

$$\mathbf{AX} = (\mathbf{LU})\mathbf{X} = \mathbf{L}(\mathbf{UX}) = \mathbf{B}.$$

Sea **UX** = **Y** y resuelva el sistema

$$\mathbf{LY} = \mathbf{B}$$

para **Y**. Una vez que conocemos **Y**, entonces la solución de **AX** = **B** es la solución de

$$\mathbf{UX} = \mathbf{Y}.$$

Ambos sistemas implican matrices de coeficientes triangulares, por lo tanto, pueden ser más fáciles de resolver que el sistema original.

EJEMPLO 14.32

Vamos a resolver el sistema **AX** = **B**, donde

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4&3&3&-4&6\\1&1&-1&3&4\\2&2&-4&6&1\\8&-2&1&4&6\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}4\\-2\\6\\1\end{pmatrix}.$$

Podríamos resolver este sistema mediante la búsqueda de la forma escalonada reducida de **A**. Para ilustrar la factorización LU, primero factorice **A**. Comience encontrando **U**:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{4}&3&3&-4&6\\\mathbf{1}&1&-1&3&4\\\mathbf{2}&2&-4&6&1\\\mathbf{8}&-2&1&4&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4&3&3&-4&6\\0&\mathbf{1/4}&-7/4&4&5/2\\0&\mathbf{1/2}&-11/1&8&-2\\0&\mathbf{-8}&-5&12&-6\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}4&3&3&-4&6\\0&1/4&-7/4&4&5/2\\0&0&\mathbf{-2}&8&-7\\0&0&\mathbf{-61}&140&74\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4&3&3&-4&6\\0&1/4&-7/4&4&5/2\\0&0&-2&0&-7\\0&0&0&\mathbf{140}&575/2\end{pmatrix}=\mathbf{U}.$$

Ahora podemos formar la matriz **L** 4 × 4 comenzando con las columnas resaltadas y la obtención de 1 de abajo de la diagonal principal:

$$\begin{pmatrix}4&0&0&0\\1&1/4&0&0\\2&1/2&-2&0\\8&-8&-61&140\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1/4&1&0&0\\1/2&2&1&0\\2&-32&61/2&1\end{pmatrix}=\mathbf{L}.$$

Ahora resuelva **LY** = **B**. Debido a que **L** es triangular inferior, este es el sistema

$$y_1=4,$$

$$\frac{1}{4}y_1+y_2=-2,$$

$$\frac{1}{2}y_1+2y_2+y_3=6$$

$$2y_1-32y_2+\frac{61}{2}y_3+y_4=1$$

con la solución

$$\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}4\\-3\\10\\-408\end{pmatrix}.$$

Ahora resuleva

$$\mathbf{UX}=\mathbf{Y}.$$

Debido a que **U** es triangular superior, este es el sistema

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 6x_5 &= 4, \\ \frac{1}{4}x_2 - \frac{7}{4}x_3 + 4x_4 + \frac{5}{2}x_5 &= -3 \\ -2x_3 - 7x_5 &= 10 \\ 140x_4 + \frac{575}{2}x_5 &= -408. \end{aligned}$$

Resuelva esto para obtener la solución de la solución del sistema original:

$$\mathbf{X} = \alpha \begin{pmatrix} 523/28 \\ -183/7 \\ -7/2 \\ -115/56 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3971/140 \\ -1238/35 \\ -5 \\ -102/35 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \blacklozenge$$

SECCIÓN 14.9 PROBLEMAS

En cada uno de los problemas 1 a 6,encuentre una factorización LU de la matriz.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 8 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 12 \\ 2 & -6 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & 6 \\ -3 & -7 & 10 & -4 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & 4 \\ -2 & 6 & 8 & 6 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 2 & 24 & -2 \\ -3 & 2 & 14 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

En cada uno de los problemas 7 a 12, resuelva el sistema **AX** = **B** al factorizar **A**. **A** se da primero, luego **B**.

7. $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 42 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 8 \\ 4 & 4 & 20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ -4 & 1 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -3 & 6 & -5 & 2 & 5 \\ 6 & 8 & 4 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

14.10 Transformaciones lineales

A veces queremos considerar funciones entre R^n y R^m. Tal función se asocia con cada vector en R^n un vector en R^m, según una regla definida por la función.

Una función T que se asigna vectores n a vectores m se llama una *transformación lineal* si las siguientes dos condiciones se cumplen:

1.

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

para cada todos los vectores n $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, y

2.

$$T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$$

para cada número real α y todos los vectores n $\mathbf{u}$

Estas dos condiciones se pueden agrupar en un requisito único

$$T(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v})$$

para todos los números reales α y β y los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en R^n.

Una transformación lineal también se llama un *mapeo lineal*.

EJEMPLO 14.33

Defina T por

$$T(x, y) = < x+y, x-y, 2x > .$$

Luego T mapea los vectores en R^2 a vectores en R^3. Por ejemplo,

$$T(2, -3) = < -1, 5, 4 > \text{ and } T(1, 1) = < 2, 0, 2 > .$$

Verificaremos que T es una transformación lineal. Sea

$$\mathbf{u} = < a, b > \text{ y } \quad \mathbf{v} = < c, d > .$$

Entonces

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = < a+c, b+d >$$

y

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(a+c, b+d) = < a+c+b+d, a+c-b-d, 2a+2c >,$$

mientras

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v}) &= < a+b, a-b, 2a > + < c+d, c-d, 2c > \\ &= < a+b+c+d, a-b+c-d, 2a+2c > \\ &= < a+c+b+d, a+c-b-d, 2a+2c > \\ &= T(a+c, b+d) = T(\mathbf{u}+\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Esto verifica la condición (1) de la definición. Para la condición (2), Sea α cualquier número. Entonces

$$\begin{aligned} T(\alpha\mathbf{u}) &= T(\alpha a, \alpha b) \\ &= < \alpha a+\alpha b, \alpha a-\alpha b, 2\alpha a > \\ &= \alpha < a+b, a-b, 2a > = \alpha T(\mathbf{u}). \end{aligned}$$ ♦

Es fácil comprobar que la función

$$P(a, b, c) = < a^2, 1, 1, \sin(a) >$$

de R^2 a R^4 no es lineal. Generalmente una función es no lineal (falla al ser lineal) cuando involucra a productos o potencias de las coordenadas, o a funciones no lineales como las funciones trigonométricas y funciones exponenciales, cuyas gráficas no son líneas rectas.

Usaremos la notación

$$T : R^n \to R^m$$

para indicar que T es una transformación lineal de Rn a Rm.

Cada transformación lineal $T : R^n \to R^m$ debe mapear el vector cero $\mathbf{O}_n$ de R^n al vector cero $\mathbf{O}_m$ de R^m. Para ver por qué esto es así, utilice la linealidad de T para escribir

$$T(\mathbf{O}_n) = T(\mathbf{O}_n + \mathbf{O}_n) = T(\mathbf{O}_n) + T(\mathbf{O}_n),$$

entonces

$$T(\mathbf{O}_n) = \mathbf{O}_m.$$

Sin embargo, una transformación lineal puede tomar vectores distintos de cero al vector cero. Por ejemplo, la transformación lineal

$$T(x, y) = (x - y, 0)$$

de R^2 a R^2 mapea cada vector $< x, x >$ a $< 0, 0 >$.

Vamos a definir dos propiedades importantes que una transformación lineal $T : R^n \to R^m$ puede exhibir.

> Que T esté en cada vector en R^m es la imagen de algún vector en R^n en T. Esto significa que, si **v** está en R^m, entonces debe haber alguna **u** en R^n tal que $T(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$.
>
> T es uno-a-uno, o $1 - 1$, si la única forma en que $T(\mathbf{u}_1)$ puede ser igual a $\mathbf{T}(\mathbf{u}_2)$ es tal que $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$. Esto significa que dos vectores en R^n no se pueden asignar a un mismo vector en R^m por T.

Las nociones de uno-a-uno y estar en son independientes. Una transformación lineal puede ser uno-a-uno y estar en, uno-a-uno y no estar en, no uno-a-uno y sí estar en, o ninguno de los dos, uno-a-uno o estar en.

EJEMPLO 14.34

Sea

$$T(x, y) = < x - y, 0, 0 > .$$

Entonces T es una transformación lineal de R^2 a R^3. T no es ciertamente uno-a-uno, ya que, por ejemplo,

$$T(1, 1) = T(2, 2) = < 0, 0, 0 > .$$

De hecho, $T(x, x) = < 0, 0, 0 >$ para cada número x. Por lo tanto T mapea muchos vectores al origen en R^3.

T también no está en R^3, ya que ningún vector en R^3 con un segundo o tercer componente distinto de cero es la imagen de cualquier vector en R^2 en T.

EJEMPLO 14.35

Sea que $S : R^3 \to R^2$ se define por

$$S(x, y, z) = < x, y > .$$

S está dentro, ya que cada vector en R^2 es la imagen de un vector en R^3 en S. Por ejemplo, $< -3, \sqrt{97} >= S(-3, \sqrt{97}, 0)$. Pero S no es uno-a-uno Por ejemplo, $S(-3, \sqrt{97}, 22)$ es igual $< -3, \sqrt{97} >$. ♦

Hay una prueba práctica para saber si una transformación lineal es uno-a-uno. Sabemos que cada transformación lineal mapea el vector cero al vector cero. La transformación es uno-a-uno cuando éste es el único vector de mapeo para el vector cero.

TEOREMA 14.18

Sea $T : R^n \to R^m$ una transformación lineal?. Entonces T es uno-a-uno si y sólo si $T(\mathbf{u}) = \mathbf{O}_m$ se produce sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{O}_n$.

Prueba Supongamos primero que T es uno-a-uno. Si $T(\mathbf{u}) = \mathbf{O}_m$, a continuación,

$$T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{O}_n) = \mathbf{O}_m$$

por lo que la hipótesis de que T es uno-a-uno requiere que $\mathbf{u} = \mathbf{O}_n$.

Por el contrario, supongamos que $T(\mathbf{u}) = \mathbf{O}_m$ se produce sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{O}_n$. Para demostrar que T es uno-a-uno, supongamos, para cualquier $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en R^n,

$$T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v}).$$

Por la linealidad de T,

$$T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{O}_m.$$

Por supuesto, esto implica que

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{O}_n.$$

Pero entonces $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, por lo que T es uno a uno.

Para ilustrar, S en el Ejemplo 14.35 no es uno-a-uno, porque los vectores distintos de cero se mapean al vector cero. En el Ejemplo 14.34, T no es uno-a-uno por la misma razón.

EJEMPLO 14.36

Sea que $T : R^4 \to R^7$ está definido por

$$T(x, y, z, w) = < x - y + 2z + 8w,\, y - z,\, x - w,\, y + 4w,\, 5x + 5y - z, 0, 0 > .$$

Para ver si T es uno-a-uno, examine si los vectores no cero pueden mapear al vector cero. Supongamos

$$T(x, y, z, w) = \mathbf{O}_7 = < 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 > .$$

Entonces

$$< x + y + z + w,\, y - z,\, x - w,\, x - y + z - w,\, 5x + 5y - z, 0, 0 > = < 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 > .$$

En cuanto al segundo y tercer componentes de ambos lados de esta ecuación, debemos tener $y - z = 0$ y $x - w = 0$, por lo que $y = z$ y $x = w$. Desde los primeros componentes,

$$x + y + z + w = 2x + 2y = 0,$$

tal que $y = -x$. A partir del quinto componente,

$$5x + 5y - z = 5x - 5x - z = 0$$

arroja $z = 0$. Pero entonces $y = 0$, por lo que $x = 0$ también. Luego, desde el tercer componente, $x - w = -w = 0$ implica que $w = 0$. Concluimos que

$$< x, y, z, w > = < 0, 0, 0, 0 > .$$

El único vector T que mapea al vector cero es el vector cero, por lo que T es uno a uno. Claramente T no está dentro, ya que T no mapea ningún vector de un vector-7 con un sexto o séptimo componente distinto de cero.

Cada transformación lineal $T : R^n \to R^m$ puede asociarse con una matriz $\mathbf{A}_T$ que toda la información acerca de la transformación. Recordemos que la base estándar para R^n consiste en los vectores n unitarios ortogonales

$$\mathbf{e}_1 = < 1, 0, \cdots, 0 >, \mathbf{e}_2 = < 0, 1, 0, \cdots, 0 >,$$
$$\cdots, \mathbf{e}_n = < 0, 0, \cdots, 0, 1 >$$

con una base similar (con m componentes) para R^m. Ahora, sea $\mathbf{A}_T$ la matriz cuyas columnas son de las imágenes en R^m de $T(\mathbf{e}_1)$, $T(\mathbf{e}_2)$, $\cdots$, $T(\mathbf{e}_n)$ con coordenadas escritas en términos de la norma con base en R^m. $\mathbf{A}_T$ es una matriz $m \times n$ que representa a T en el sentido de que

$$T(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \mathbf{A}_T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

Por lo tanto podemos calcular $T(\mathbf{X})$ como el producto de la matriz $\mathbf{A}_T$ con la matriz de la columna de los componentes de $\mathbf{X}$. Note que $\mathbf{A}_T$ es $m \times n$, y $\mathbf{X}$ (escrita como una matriz columna) es $n \times 1$, por lo que $\mathbf{A}_T\mathbf{X}$ es $m \times 1$. Por lo tanto, es un vector en R^m.

EJEMPLO 14.37

Sea $T(x, y) = < x - y, 0, 0 >$, como en el Ejemplo 14.34. Entonces

$$T(1, 0) = < 1, 0, 0 > \text{ and } T(0, 1) = < -1, 0, 0 >$$

entonces

$$\mathbf{A}_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Ahora observe que

$$\mathbf{A}_T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

dando las coordenadas de $T(x, y)$ con respecto a la base estándar para R^3.We por lo tanto, puede leer las coordenadas de $T(x, y)$ como un producto de matriz.

EJEMPLO 14.38

En el Ejemplo 14.36 teníamos

$$T(x, y, z, w) = < x - y + 2z + 8w, y - z, x - w, y + 4w, 5x + 5y - z, 0, 0 > .$$

Para la matriz de T calcule

$$T(1, 0, 0, 0) = < 1, 0, 1, 0, 5, 0, 0 >, T(0, 1, 0, 0) = < -1, 1, 0, 1, 5, 0, 0 >$$
$$T(0, 0, 1, 0) = < 2, -1, 0, 0, -1, 0, 0 >, T(0, 0, 0, 1) = < 8, 0, -1, 4, 0, 0, 0 > .$$

Entonces

$$\mathbf{A}_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenemos T(x, y, z, w) como el producto de la matriz

$$\mathbf{A}_T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}. \quad \blacklozenge$$

$\mathbf{A}_T$ nos permite plantear preguntas sobre T en términos de sistemas de ecuaciones lineales, sobre los cuales sabemos ya bastante.

En primer lugar, $T : R^n \rightarrow R^m$ es uno-a-uno exactamente cuando $T(\mathbf{X}) = < 0, 0, \cdots, 0 >$ en R^m implica que $\mathbf{X} = < 0, 0, \cdots, 0 >$ en R^n. Esto equivale a afirmar que el sistema $m \times n$

$$\mathbf{A}_T\mathbf{X} = \mathbf{O}$$

sólo tiene la solución trivial $\mathbf{X} = \mathbf{O}$. Esto ocurre si y sólo si $n - \text{rango}(\mathbf{A}_T) = 0$, lo que a su vez se produce si y sólo si las n columnas de $\mathbf{A}_T$ son linealmente independientes, ya que el rango de $\mathbf{A}_T$ es la dimensión de su espacio de filas. Esto establece lo siguiente.

TEOREMA 14.19

Sea $T : R^n \rightarrow R^m$ una transformación lineal. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. T es uno-a-uno.
2. rango$(\mathbf{A}_T) = n$.
3. Las columnas de $\mathbf{A}_T$ son linealmente independientes.

Esto se puede comprobar por T Ejemplo 14.36, con $\mathbf{A}_T$ dado en el ejemplo 14.38. Ahí $\mathbf{A}_T$ era una matriz 7×4 que tenía rango 4, y T era de uno-a-uno.

$\mathbf{A}_T$ también nos dirá si T está dentro. Para que T esté dentro, por cada $\mathbf{B}$ en R^m, debe haber alguna $\mathbf{X}$ en R^n tal que $\mathbf{T}(\mathbf{X}) = \mathbf{B}$. Esto significa que el sistema $m \times n$ $\mathbf{A}_T\mathbf{X} = \mathbf{B}$ debe tener una solución para cada $\mathbf{B}$, y esto es equivalente a las columnas de $\mathbf{A}_T$ formando un conjunto de expansión para R^n. Por lo tanto tenemos el siguiente.

TEOREMA 14.20

Sea $T : R^n \rightarrow R^m$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. T está dentro.
2. El sistema $\mathbf{A}_T\mathbf{X} = \mathbf{B}$ tiene una solución para cada $\mathbf{B}$ en R^m.
3. Las columnas de $\mathbf{A}_T$ comprenden R^m.
4. rango$(\mathbf{A})$ = rango$([\mathbf{A}_T \vdots \mathbf{B}]$ para cada $\mathbf{B}$ en R^m..

El *espacio nulo* de una transformación lineal $T : R^n \to R^m$ es el conjunto de todos los vectores en R^n que T mapea al vector cero en R^m. Por lo tanto **X** en R^n es en el espacio nulo de T exactamente cuando $T(\mathbf{X}) = < 0, 0, \cdots, 0 >$ en R^m.

Podemos determinar este espacio nulo de $\mathbf{A}_T$. En términos de la multiplicación de matrices, $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ se calcula como $\mathbf{A}_T\mathbf{X}$, en el que **X** es una matriz de columna $n \times 1$. Por lo tanto **X** está en el espacio nulo de T exactamente cuando **X** es una solución de

$$\mathbf{A}_T\mathbf{X} = \mathbf{O}.$$

El espacio nulo de T es exactamente el espacio de solución del sistema lineal homogéneo $\mathbf{A}_T\mathbf{X} = \mathbf{O}$. Este espacio de solución es un subespacio de R^n y, porque $\mathbf{A}_T$ tiene n columnas, tiene dimensión $n -$ rango($\mathbf{A}_T$). Esto demuestra lo siguiente.

TEOREMA 14.21

Sea $T : R^n \to R^m$ una transformación lineal. Entonces el núcleo de T es un subespacio de R^n de dimensión $n -$ rango($\mathbf{A}_T$).

La dimensión del espacio nulo de T es también menos el número n de filas no cero en la forma reducida de $\mathbf{A}_T$.

Los algebristas menudo se refieren al espacio nulo de una transformación lineal como su *núcleo*.

Hemos visto que cada transformación lineal de R^n a R^m tiene una representación en forma de matriz. En la otra dirección, cada matriz A $m \times n$ de números reales es la matriz de una transformación lineal, definida por $T(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}$ si $\mathbf{AX} = \mathbf{Y}$. En este sentido, las transformaciones lineales y las matrices son cuerpos equivalentes de información. Sin embargo, las matrices son más adecuados para el cálculo, en particular utilizando paquetes de software. Por ejemplo, el rango de la matriz de una transformación lineal, que podemos encontrar rápidamente con el uso de MAPLE, nos dice la dimensión del espacio nulo de la transformación.

Como nota final, observe que una transformación lineal en realidad tiene muchas representaciones de matrices diferentes. Definimos $\mathbf{A}_T$ en la forma más conveniente, utilizando bases uniformes para R^n y R^m. Si usamos otras bases, aún podríamos escribir representaciones matriciales, pero entonces tendríamos que utilizar coordenadas de vectores con respecto a estas bases, y estas coordenadas pueden no ser tan convenientes de calcular.

SECCIÓN 14.10 PROBLEMAS

En cada uno de los problemas 1 al 10, determine si sí o no la función dada es una transformación lineal. Si lo es, escriba la representación matricial de T (según la norma estándar) y determine si T está dentro y si T es uno-a-uno. También determine el núcleo de T y su dimensión.

1. $T(x, y, z) = < 3x, x - y, 2z >$
2. $T(x, y, z, w) = < x - y, z - w >$
3. $T(x, y) = < x - y, x + y, 2xy, 2y, x - 2y >$
4. $T(x, y, z, v, w) = < w, v, x - y, x - z, w - x - 3y >$
5. $T(x, y, z, u, v) = < x - u, y - z, u + v >$
6. $T(x, y, z, u) = < x + y + 4z - 8u, y - z - x >$
7. $T(x, y) = < x - y, \operatorname{sen}(x - y) >$
8. $T(x, y, w) = < 4y - 2x, y + 3x, 0, 0 >$
9. $T(x, y, u, v, w) = < u - v - w, w + u, z, 0, 1 >$
10. $T(x, y, z, v) = < 3z + 8v - y, y - 4v >$

CAPÍTULO 15

LA SERIE DE FOURIER DE UNA
FUNCION CONVERGENCIA DE UN
SERIE DE FOURIER SERIE DE FO
EN COSENOS EN SENOS INTEGRA

Determinantes

15.1 Definición de un determinante

Los determinantes son escalares (números o a veces funciones) formados a partir de matrices cuadradas de acuerdo a una regla vamos a desarrollar. El Wronskiano de dos funciones es un determinante, y en breve veremos determinantes en otros contextos importantes. Este capítulo desarrolla algunas propiedades de los determinantes que tendremos que usar para evaluarlos y hacer uso de ellos.

Sea n un entero con $n \geq 2$. Una permutación de los enteros $1, 2, \cdots, n$ es un reordenamiento de estos números enteros. Por ejemplo, si p es la permutación que reorganiza

$$1, 2, 3, 4, 5, 6 \rightarrow 3, 1, 4, 5, 2, 6,$$

entonces entonces $p(1) = 3$, $p(2) = 1$, $p(3) = 4$, $p(4) = 5$, $p(5) = 2$ y $p(6) = 6$.

Una permutación se caracteriza por ser par o impar de acuerdo a una regla vamos a ilustrar.

Considere la permutación

$$p\text{: } 1, 2, 3, 4, 5 \rightarrow 2, 5, 1, 4, 3$$

de los números enteros 1, 2, 3, 4, 5. Para cada k en la lista permutada a la derecha, cuente el número de números enteros a la derecha de k que son más pequeños que k. Hay un número a la derecha de 2 menor que 2, tres números a la derecha de 5 menores que 5, no hay números a la derecha de 1 menores que 1, hay un número a la derecha de 4 menor que 4, y no hay números a la derecha de 3 más pequeños que 3. Como $1 + 3 + 0 + 0 + 1 = 5$ es impar, p es una permutación impar. Cuando esta suma es par, p es una permutación par.

Si p es una permutación en $1, 2, \cdots, n$, definir

$$\sigma(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \text{ es una permutación par} \\ -1 & \text{si } p \text{ es una permutación impar} \end{cases}$$

El *determinante* de una matriz A $n \times n$ se define como

$$\det \mathbf{A} = \sum_{p} \sigma(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)} \tag{15.1}$$

con esta suma extiendiéndose sobre todas las permutaciones de p de 1, 2, · · ·, n. Tenga en cuenta que det **A** es una suma de términos, cada uno de los cuales es más o menos un producto que contiene un elemento de cada fila y cada columna de **A**.

A menudo denotamos det **A** como |**A**|. Esto no debe confundirse con el valor absoluto, ya que un determinante puede ser negativo.

EJEMPLO 15.1

Vamos a utilizar la definición para evaluar los determinantes generales 2 × 2 y 3 × 3. Para el caso 2 × 2, tenemos una matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Sólo hay dos permutaciones en los números 1, 2, a saber,

$$p_1 : 1, 2 \to 1, 2 \text{ and } p_2 : 1, 2 \to 2, 1.$$

Es fácil comprobar que $p1$ es par y que $p2$ es impar. Por lo tanto

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \sigma(p_1) a_{1p_1(1)} a_{2p_1(2)} + \sigma(p_2) a_{1p_2(1)} a_{2p_2(2)} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

Para el caso de 3 × 3, supongamos que $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ es una matriz de 3 × 3. Ahora debemos utilizar las seis permutaciones de los números enteros 1, 2, 3:

$$\begin{aligned} &p_1 : 1, 2, 3 \to 1, 2, 3, (\text{ par }); \; p_2 : 1, 2, 3, \to 1, 3, 2, (\text{impar}); \\ &p_3 : 1, 2, 3 \to 2, 3, 1, (\text{ par }); \; p_4 : 1, 2, 3, \to 2, 1, 3, (\text{impar}); \\ &p_5 : 1, 2, 3, \to 3, 1, 2, (\text{ par }); \; p_6 : 1, 2, 3, \to 3, 2, 1, (\text{impar}). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} |\mathbf{B}| &= \sum_{k=1}^{6} \sigma(p_k) b_{1p_k(1)} b_{2p_k(2)} b_{3p_k(3)} \\ &= b_{11}b_{22}b_{33} - b_{11}b_{23}b_{32} + b_{12}b_{23}b_{31} \\ &= b_{12}b_{21}b_{33} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{13}b_{22}b_{31}. \end{aligned}$$ ♦

Hay $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ permutaciones de 1, 2, · · ·, n (por ejemplo, 120 permutaciones de 1, 2, 3, 4, 5), por lo que la definición no es un método práctico de evaluación. Sin embargo, sirve como punto de partida para el desarrollo de las propiedades de los determinantes que necesitaremos para hacer uso de ellos.

TEOREMA 15.1 *Propiedades fundamentales de los determinantes*

Sea **A** una matriz $n \times n$. Entonces

1. $|\mathbf{A}^t| = |\mathbf{A}|$.
2. Si **A** tiene una fila o columna cero, entonces $|\mathbf{A}| = 0$.
3. Si **B** está formada por un intercambiando dos filas o columnas (una operación de tipo I, ampliada para incluir columnas), entonces

$$|\mathbf{B}| = -|\mathbf{A}|.$$

4. Si dos filas de **A** son las mismos, o si dos columnas de **A** son las mismos, entonces $|\mathbf{A}| = 0$.
5. Si **B** está formada por una multiplicación de una fila o columna por un número distinto de cero (una operación tipo II), entonces

$$|\mathbf{B}| = \alpha\,|\mathbf{A}|.$$

6. Si una fila (o columna) de **A** es un múltiplo constante de la otra fila (o columna), entonces $|\mathbf{A}| = 0$.
7. Supongamos que cada elemento de la fila k de **A** está escrito como una suma

$$a_{kj} = b_{kj} + c_{kj}.$$

Defina una matriz **B** de **A** reemplazando cada a_{kj} de **A** por b_{kj}. Defina una matriz **C** de **A** reemplazando cada a_{kj} por c_{kj}. Entonces

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| + |\mathbf{C}|.$$

En la notación determinante,

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k1}+c_{k1} & \cdots & b_{kj}+c_{kj} & \cdots & b_{kn}+c_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kj} & \cdots & c_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{15.2}$$

8. Si **D** se forma a partir de **A** por la adición de α veces una fila (o columna) a otra fila (o columna) (una operación de tipo III), entonces

$$|\mathbf{D}| = |\mathbf{A}|.$$

9. **A** es no singular si y sólo si $|\mathbf{A}| \neq 0$.
10. Si **A** y **B** son ambos $n \times n$, entonces

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|.$$

El determinante de un producto es el producto de los determinantes.

Vamos a dar argumentos informales para estas conclusiones.

Prueba La conclusión (1) se deduce de la observación de que cada término de la suma de la ecuación (15.1) es un producto de elementos de matriz, un elemento de cada fila y uno de cada columna. Podemos, por lo tanto, obtener los mismos términos de **A** y $\mathbf{A}^t$.

La razón de conclusión (2) es que una fila o columna cero pone un factor de cero en cada término de la suma que define en la ecuación (15.1).

La conclusión (3) establece que intercambiar dos filas o dos columnas cambia el signo del determinante. Vamos a ilustrar esto para el caso 3 × 3. Sea $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ una matriz 3 × 3 y sea $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ formada intercambiando las filas uno y tres de **A**. Entonces

$$b_{11} = a_{31}, b_{12} = a_{32}, b_{13} = a_{33},$$
$$b_{21} = a_{21}, b_{22} = a_{22}, b_{23} = a_{23},$$

y

$$b_{31} = a_{11}, b_{32} = a_{12}, b_{33} = a_{13}.$$

Del Ejemplo 15.1

$$\begin{aligned}|\mathbf{B}| &= b_{11}b_{22}b_{33} - b_{11}b_{23}b_{32} + b_{12}b_{23}b_{31}\\ &= -b_{12}b_{21}b_{33} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{13}b_{22}b_{31}\\ &= a_{31}a_{22}a_{13} - a_{31}a_{23}a_{12} + a_{32}a_{23}a_{11}\\ &= -a_{32}a_{21}a_{13} + a_{33}a_{21}a_{12} - a_{33}a_{22}a_{11}\\ &= -|\mathbf{A}|.\end{aligned}$$

La conclusión (4) sigue inmediatamente a partir de (3). Forme **B** de **A** intercambiando las dos filas o columnas idénticas. Dado que **A** = **B**, |**A**| = |**B**|. Pero por (3), |**A**| = − |**B**| = |**A**|. Entonces |**A**| = 0.

La conclusión (5) es cierta porque la multiplicación de una fila o columna de **A** por α pone un factor de α en cada término de la suma (15.1) que define el determinante.

La conclusión (6) sigue de (2) si $\alpha = 0$, por lo que suponer que $\alpha \neq 0$. Ahora, la conclusión sigue a partir de (4) y (5). Supongamos que la fila k de **A** es una fila i α veces. Forme **B** de **A** multiplicando la fila k por $1/\alpha$. Entonces **B** tiene dos filas idénticas, y por lo tanto un determinante cero por (4). Pero por (5), $|\mathbf{B}| = (1/\alpha)|\mathbf{A}| = 0$, por lo que |**A**| = 0.

La conclusión (7) sigue reemplazando cada a_{kj} en la suma definición (15.1) con $b_{kj} + c_{kj}$. Note aquí que k es fija, por lo que sólo un factor en cada término de (15.1) se sustituye. En particular, generalmente el determinante de una suma que <u>no</u> es la suma de los factores determinantes. La conclusión (7) también se lleva a cabo si cada elemento de una columna especificada está escrito como la suma de dos términos.

La conclusión (8) sigue a partir de (4) y (7). Para ver esto vamos a lidiar con filas, para ser específicos. Supongamos que se añade α veces una fila i a la fila k de **A** para formar **D**. En el lado derecho de la ecuación (15.2), reemplace cada b_{kj} con αa_{ij}, y cada c_{kj} con a_{kj}, lo que resulta en lo siguiente:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha a_{i1} + a_{k1} & \alpha a_{i2} + a_{k2} & \cdots & \alpha a_{in} + a_{kn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \cdots & \alpha a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}.$$

Entonces $|\mathbf{A}|$ es la suma de los factores determinantes de las matrices de la derecha. Pero el segundo determinante a la derecha es sólo $|\mathbf{A}|$ y la primera es 0 por (4) porque la fila k es un múltiplo de la fila i.

Para la conclusión (9), tenga en cuenta que, por (3), (5) y (8), cada vez que producimos **B** de **A** por una operación elemental por filas, $|\mathbf{B}|$ es igual a un múltiplo no nulo de **A**. Puesto que reducimos una matriz por una secuencia de operaciones elementales por filas, entonces $|\mathbf{A}|$ es siempre un múltiplo no cero de $|\mathbf{A}_R|$. Esto significa que $|\mathbf{A}|$ es distinto de cero si y sólo si $|\mathbf{A}_R|$ es distinto de cero. Pero este es el caso cuando **A** es exactamente no singular, ya que en este caso $\mathbf{A}_R = \mathbf{I}_n$. Si $\mathbf{A}_R = \mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A}_R$ tiene al menos una fila cero y tiene cero determinante.

El desaparecer o no desaparecer del determinante es una prueba importante para la existencia de una inversa.

Por último, vamos a esbozar una prueba de la conclusión (10). Si **A** es no singular, entonces no es un producto de matrices elementales que reduce **A** a $\mathbf{I}_n$:

$$\mathbf{E}_r\mathbf{E}_{r-1}\cdots\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \mathbf{I}_n.$$

Entonces

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}\cdots\mathbf{E}_r^{-1},$$

es un producto de inversas de matrices elementales, que son de nuevo las matrices elementales. Como podemos hacer esto para una matriz **B** no singular también, podemos escribir **AB** como un producto de matrices elementales. Entonces esto es suficiente para demostrar que el determinante de un producto de matrices elementales es el producto de los determinantes de estas matrices elementales. Esto se puede hacer para dos matrices elementales utilizando las propiedades (3), (5) y (8) de los determinantes y después a los correspondientes productos arbitrarios por inducción.

Si cualquiera de **A** o **B** es singular, entonces también lo es **AB**, y en este caso,

$$|\mathbf{AB}| = 0 = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|.$$

Las conclusiones (3), (5) y (8) nos dicen los efectos de las operaciones elementales de fila en el determinante de una matriz. Sin embargo, en el contexto de los determinantes, estas operaciones se pueden aplicar a las columnas también. Cuando las usamos para representar matrices de sistemas de ecuaciones, las filas contienen ecuaciones y las columnas contienen los coeficientes de las incógnitas particulares, por lo que hay una diferencia esencial entre filas y columnas. Sin embargo, el determinante de una matriz no incluye estas interpretaciones y no hay preferencia por filas sobre columnas (por ejemplo, $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^t|$).

SECCIÓN 15.1 PROBLEMAS

1. Sea $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ una matriz $n \times n$ y sea α un número. Forme $\mathbf{B} = [\alpha a_{ij}]$ multiplicando cada elemento de **A** por α. ¿Cómo se relacionan $|\mathbf{A}|$ y $|\mathbf{B}|$?

2. Sea $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ una matriz $n \times n$ y sea α un número no cero. Forme la matriz $\mathbf{B} = [\alpha^{i-j} a_{ij}]$. ¿Cómo se relacionan $|\mathbf{A}|$ y $|\mathbf{B}|$? *Sugerencia*: Es útil mirar los casos 2×2 y 3×3 para obtener una idea de a qué se parece **B**.

3. Una matriz $n \times n$ es *antisimétrica* si $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^t$. Explique por qué el determinante de una matriz antisimétrica que tenga un número impar de filas y columnas debe ser cero.

4. Evaluar $|\mathbf{I}_n|$ para $n = 2, 3, \cdots$. *Sugerencia*: En la suma de la ecuación (15.1), el único término que no tiene un factor de cero corresponde a la permutación de identidad $p: 1, 2, \cdots, n \to 1, 2, \cdots$ n.
5. Demuestre que el determinante de una matriz triangular superior o inferior es el producto de los principales elementos de su diagonal. *Sugerencia*: Cada término, excepto uno de la suma (15.1) contiene un factor de a_{ij} con $i > j$ y un término a_{ij} con $i < j$, y uno de estos términos debe ser cero si la matriz es triangular superior o inferior. El término excepcional corresponde a la permutación p que deja a cada número $1, 2, \cdots, n$ sin modificación.
6. Demuestre que una matriz triangular superior o inferior es no singular si y sólo si tiene elementos distintos de cero en la diagonal principal.
7. Sea **B** $n \times m$. Sabemos que podemos alcanzar cada operación elemental por filas multiplicando a la izquierda por la matriz formada por la realización de la operación en $\mathbf{I}_n$. Demuestre que cada operación de la columna principal puede realizarse multiplicando a la derecha por la matriz obtenida mediante la realización de la operación de la columna en $\mathbf{I}_m$.

15.2 Evaluación de determinantes I

Cuantos más elementos cero tenga una matriz, más fácil será evaluar su determinante. La razón de esto es que cada elemento cero hace que algunos términos en la suma de la ecuación (15.1) se desvanezcan. Como ejemplo, en el Ejemplo 15.1, si $a_{12} = a_{13} = 0$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

y

$$|\mathbf{A}| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})$$

con cuatro de los seis términos de $|\mathbf{A}|$ que son 0 cancelándose debido a los ceros en la primera fila de **A**.

Una generalización de esta observación será la base de un método útil para evaluar determinantes.

LEMA 15.1

Sea **A** $n \times n$, y supongamos que la fila k o columna r tiene todos los elementos cero, excepto tal vez para a_{kr}. Entonces

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{k+r} a_{kr} |\mathbf{A}_{kr}|, \tag{15.3}$$

donde $\mathbf{A}_{kr}$ es la matriz $n - 1 \times n - 1$ formada por la eliminación de la fila k y la columna r de A.

Esto reduce el problema de la evaluación de un determinante $n \times n$ a uno de la evaluación de un factor determinante menor, $n - 1 \times n - 1$. Para ver por qué el lema es cierto, comience con el caso de que todos los elementos de la fila uno, excepto, quizás, a_{11}, son cero. Entonces

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

En la suma de la ecuación (15.1), el factor $a_{1p(1)}$ es cero si $p(1) \neq 1$, ya que todos los otros elementos de la fila uno son cero. Esto significa que sólo tendremos que considerar la suma sobre permutaciones p de la forma

$$p : 1, 2, 3, \cdots, n \to 1, p(2), p(3), \cdots, p(n).$$

Pero esto es sólo una permutación de los números $n - 1$ 2, 3, · · ·, n, ya que el 1 es fijo y sólo 2, 3, · · ·, n son ejecutados. En la definición de la ecuación (15.1), podemos por lo tanto sumar en sólo las permutaciones q de 2, 3, · · ·, n, y el factor a_{11} de todos los términos de la suma, para obtener

$$|\mathbf{A}| = \sum_q a_{11} \sum_q a_{2q(2)} a_{3q(3)} \cdots a_{nq(n)} = |\mathbf{A}_{11}|.$$

Esto es a_{11} veces el determinante de la matriz $n - 1 \times n - 1$ formada por la eliminación de la fila uno y columna uno de **A**.

En el caso general de que a_{kr} sea un elemento de una fila o columna cuyos elementos son todos diferentes de cero, podemos intercambiar las filas $k - 1$ y columnas $r - 1$ entonces para obtener una nueva matriz con a_{kr} en la posición 1, 1 de una fila o columna que tenga sus otros elementos iguales a cero. Dado que cada intercambio incurre en un factor de −1 en el determinante, entonces, por el resultado anterior,

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{k-1+r-1} a_{kr} |\mathbf{A}_{kr}| = (-1)^{k+r} a_{kr} |\mathbf{A}_{kr}.$$

Rara vez tenemos la suerte de encontrarnos con una matriz A que tenga una fila o columna con todos menos posiblemente un elemento iguales a cero. Sin embargo, podemos utilizar las operaciones elementales por filas y columnas para obtener una matriz **B** tal de **A**. Además de las propiedades (3), (5) y (8) de los determinantes, podemos realizar el seguimiento del efecto de cada operación por filas y columnas en el valor del determinante. Estos y el lema, nos permiten reducir la evaluación de un determinante $n \times n$ de una constante por un determinante $n - 1 \times n - 1$. Entonces podemos repetir esta estrategiapara eventualmente obtener de manera constante un determinante lo suficientemente pequeño como para evaluarlo convenientemente.

EJEMPLO 15.2

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Queremos |**A**|. Este es un ejemplo simple, pero ilustra el punto. Podemos conseguir dos ceros en la columna dos añadiendo −2 veces la fila uno a la fila dos, luego 3 veces la fila uno a la fila tres. Dado que esta operación elemental por filas no cambia el valor del determinante, entonces |**A**| = |**B**|, donde

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 0 & 10 \\ 14 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Explotamos los ceros en todo menos en el lugar 1, 2 de la columna dos, luego

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| &= (-1)^{1+2}(2)|\mathbf{B}_{12}| \\ &= -2\begin{vmatrix} -5 & 10 \\ 14 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -2(-10 - 140) = 300. \end{aligned}$$ ♦

EJEMPLO 15.3

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 0 & 1 & 7 \\ 8 & 3 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 2 \\ 1 & 15 & -3 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hay muchas maneras de evaluar $|\mathbf{A}|$. Una forma de empezar es explotando el 1 en la posición 1, 3 para obtener ceros en los otros lugares en la columna 3. Sume −2 veces la fila uno a la fila tres, −5 veces la fila uno a la fila cuatro, y 3 veces la fila uno a la fila cinco para obtener

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 0 & 1 & 7 \\ 20 & 3 & 0 & -5 & 3 \\ 30 & 1 & 0 & -18 & -8 \\ -17 & 15 & 0 & 18 & 10 \end{pmatrix}.$$

La adición de un múltiplo de una fila a otra no cambia el valor del determinante, por lo que

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|.$$

Además, por la ecuación (15.3),

$$|\mathbf{B}| = (-1)^{1+3}(1)|\mathbf{C}| = |\mathbf{C}|,$$

donde C es la matriz 4 × 4 formada por la eliminación de la fila uno y la columna tres de **B**:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 & 7 \\ 20 & 3 & -5 & 3 \\ 30 & 1 & -18 & -8 \\ -17 & 15 & 18 & 10 \end{pmatrix}.$$

Ahora trabaje en C. De nuevo, hay muchas maneras de proceder. Vamos a utilizar el −1 en la posición 1, 1 para obtener ceros en la fila uno. Añada 5 veces la columna uno a la columna dos, agregar la columna uno a la columna tres y sume 7 veces la columna uno a la columna cuatro de **C** para conseguir

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 103 & 15 & 143 \\ 30 & 151 & 12 & 202 \\ -17 & 70 & 1 & -109 \end{pmatrix}.$$

Debido a que hemos añadido un múltiplo de una columna a otra,

$$|\mathbf{C}| = |\mathbf{D}|.$$

Y, utilizando la ecuación (15.3) de nuevo,

$$|\mathbf{D}| = (-1)^{1+1}(-1)|\mathbf{E}| = -|\mathbf{E}|,$$

donde **E** es la matriz 3 x 3 formada a partir de **D** mediante la supresión de la fila uno y la columna uno:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 103 & 15 & 143 \\ 151 & 12 & 202 \\ -70 & 1 & -109 \end{pmatrix}.$$

Para evaluar **E** usaremos el 1 en el lugar 3, 2. Añada −1 veces la fila tres a la fila uno y −12 veces la fila tres a la dos para conseguir

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1153 & 0 & 1778 \\ 991 & 0 & 1510 \\ -70 & 1 & -109 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$|\mathbf{E}| = |\mathbf{F}|.$$

Además

$$|\mathbf{F}| = (-1)^{3+2}(1)|\mathbf{G}| = -|\mathbf{G}|$$

donde **G** es la matriz de 2 × 2 obtenida mediante la eliminación de la fila tres y la columna dos de **F**:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1153 & 1778 \\ 991 & 1510 \end{pmatrix}.$$

Esta es una matriz 2 × 2 que podemos evaluar fácilmente:

$$|\mathbf{G}| = (1153)(1510) - (1778)(991) = -20,968.$$

Trabajando a través de la cadena de determinantes, tenemos

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= |\mathbf{B}| = |\mathbf{C}||\mathbf{D}| \\ &= -|\mathbf{E}| = -|\mathbf{F}| = |\mathbf{G}| = -20,968. \end{aligned}$$ ♦

SECCIÓN 15.2 PROBLEMAS

En cada uno de los problemas 1 al 10, utilice el método de esta sección para evaluar el determinante. En cada problema hay son muchas secuencias diferentes de operaciones que se pueden utilizar para hacer la evaluación.

1. $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 7 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 14 & 1 & 1 \\ -13 & -1 & 5 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} -4 & 5 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 8 \\ 4 & 3 & 8 \\ 13 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 17 & -2 & 5 \\ 1 & 12 & 0 \\ 14 & 7 & -7 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} -3 & 3 & 9 & 6 \\ 1 & -2 & 15 & 6 \\ 7 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -4 \\ 6 & -3 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & 1 & -2 \\ 4 & 8 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 10 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ -2 & 6 & 8 & 8 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} -7 & 16 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 6 & 1 & 1 & -5 \end{vmatrix}$

11. Complete los datos del siguiente argumento tal que $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$.

    En primer lugar, si **AB** es singular, muestre que al menos uno ya sea **A** o **B** es singular, por lo tanto, que el determinante del producto y el producto de los factores determinantes son ambos cero.

    Así, supongamos que **AB** es no singular. Demuestre que **A** y **B** se pueden escribir como productos de matrices elementales, y luego muestre que el determinante de un producto de matrices elementales es igual al producto de los determinantes de estas matrices.

15.3 Evaluación de determinantes II

En la sección anterior evaluamos los factores determinantes utilizando operaciones por filas y columnas para producir filas y columnas con todas menos una entrada cero. En esta sección usaremos esta idea desde una perspectiva diferente para escribir el determinante como una suma de números multiplicados por determinantes más pequeños.

Este método, llamado expansión por cofactores, puede ser utilizado de forma recursiva hasta que tengamos determinantes de tamaño suficientemente pequeño como para ser fácilmente evaluados.

Elija una fila k de $\mathbf{A} = [a_{ij}]$. Una extensión de la propiedad (7) de los determinantes de la Sección 15.1 nos permite escribir

$$|\mathbf{A}| = |[a_{ij}]| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{k2} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Cada uno de los n factores determinantes de la derecha tiene una fila con exactamente un elemento posiblemente distinto de cero, y puede ser expandido en ese elemento, como en la Sección 15.2. Para escribir esta expansión, defina la *menor* de a_{ij} como el determinante de la matriz $n - 1 \times n - 1$ formada por la eliminación de la fila i y la columna j de $\mathbf{A}$. Este menor se denota como M_{ij}. El cofactor de a_{ij} es el número $(-1)^{i+j} M_{ij}$. Ahora, esta suma de determinantes arroja el siguiente teorema.

TEOREMA 15.2 *Expansión por cofactores a lo largo de una una fila*

Para cualquier k con $1 \le i \le n$.

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj}. \quad \blacklozenge \tag{15.4}$$

La ecuación (15.4) establece que el determinante de $\mathbf{A}$ es la suma, a lo largo de cualquier fila k, de los elementos de esa fila de la matriz, cada uno multiplicado por su cofactor. Esto es válido para cualquier fila de la matriz, aunque por supuesto, esta suma es más fácil de evaluar si elegimos una fila con el mayor número de elementos de cero como sea posible. La ecuación (15.4) se llama la *expansión de cofactores a lo largo de la fila k*. Si escribimos algunos términos para una k fija obtenemos

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1} + (-1)^{k+2} a_{k2} M_{k2} + \cdots + (-1)^{k+n} a_{kn} M_{kn}.$$

EJEMPLO 15.4

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 7 \\ 12 & -5 & -6 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Si expandimos por cofactores a lo largo de la fila uno, obtenemos

$$\begin{aligned}|\mathbf{A}| &= \sum_{j=1}^{3}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}\\ &= (-1)^{1+1}(-6)\begin{vmatrix}-5 & -9\\ 4 & -6\end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(3)\begin{vmatrix}12 & -9\\ 2 & -6\end{vmatrix}\\ &\quad + (-1)^{1+3}(7)\begin{vmatrix}12 & -5\\ 2 & 4\end{vmatrix}\\ &= (-6)(30+36) - 3(-72+18) + 7(-48+10) = 172.\end{aligned}$$

Si expandimos por la fila tres, obtenemos

$$\begin{aligned}|\mathbf{A}| &= \sum_{j=1}^{3}(-1)^{3+j}a_{3j}M_{3j}\\ &= (-1)^{3+1}(2)\begin{vmatrix}3 & 7\\ -5 & -9\end{vmatrix} + (-1)^{3+2}(4)\begin{vmatrix}-6 & 7\\ 12 & -9\end{vmatrix}\\ &\quad + (-1)^{3+3}(-6)\begin{vmatrix}-6 & 3\\ 12 & -5\end{vmatrix}\\ &= (2)(-27+35) - 4(54-84) - 6(30-36) = 172. \ \blacklozenge\end{aligned}$$

También podemos hacer un desarrollo por cofactores a lo largo de una columna. Ahora fije j y sume los elementos de columna por j veces sus cofactores.

TEOREMA 15.3 *Expansión por cofactores por una columna*

Para cualquier j con $1 \le i \le n$.

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}. \ \blacklozenge \tag{15.5}$$

EJEMPLO 15.5

Vamos a expandir el determinante de la matriz del Ejemplo 15.3, utilizando la columna 1:

$$\begin{aligned}|\mathbf{A}| &= \sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}\\ &= (-1)^{1+1}(-6)\begin{vmatrix}-5 & -9\\ 4 & -6\end{vmatrix} + (-1)^{2+1}(12)\begin{vmatrix}3 & 7\\ 4 & -6\end{vmatrix}\\ &\quad + (-1)^{3+1}(2)\begin{vmatrix}3 & 7\\ -5 & -9\end{vmatrix}\\ &= (-6)(30+36) - 12(-18-28) + 2(-27+35) = 172.\end{aligned}$$

Si expandimos por la columna dos, obtenemos

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2}$$
$$= (-1)^{1+2}(3)\begin{vmatrix}12 & -9\\ 2 & -6\end{vmatrix} + (-1)^{2+2}(-5)\begin{vmatrix}-6 & 7\\ 2 & -6\end{vmatrix}$$
$$+ (-1)^{3+2}(4)\begin{vmatrix}-6 & 7\\ 12 & -9\end{vmatrix}$$
$$= (-3)(-72+18) - 5(36-14) - 4(54-84) = 172. \ \blacklozenge$$

A veces utilizamos las operaciones de fila y columna para producir una fila o columna con algunos elementos cero, luego escribimos una expansión de cofactor por esa fila o columna. Cada elemento cero elimina un término de la expansión por cofactores.

SECCIÓN 15.3 PROBLEMAS

En cada uno de los problemas 1 al 10, evalúe el determinante utilizando un cofactor de expansión por una fila y otra vez por una columna. Operaciones de filas y columnas principales pueden ser realizadas primero para simplificar la expansión por cofactores.

1. $\begin{vmatrix}-4 & 2 & -8\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 0\end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix}1 & 1 & 6\\ 2 & -2 & 1\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix}7 & -3 & 1\\ 1 & -2 & 4\\ -3 & 1 & 0\end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix}5 & -4 & 3\\ -1 & 1 & 6\\ -2 & -2 & 4\end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix}-5 & 0 & 1 & 6\\ 2 & -1 & 3 & 7\\ 4 & 4 & -5 & -8\\ 1 & -1 & 6 & 2\end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix}4 & 3 & -5 & 6\\ 1 & -5 & 15 & 2\\ 0 & -5 & 1 & 7\\ 8 & 9 & 0 & 15\end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix}-3 & 1 & 14\\ 0 & 1 & 16\\ 2 & -3 & 4\end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix}14 & 13 & -2 & 5\\ 7 & 1 & 1 & 7\\ 0 & 2 & 12 & 3\\ 1 & -6 & 5 & 23\end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix}-5 & 4 & 1 & 7\\ -9 & 3 & 2 & -5\\ -2 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 14 & 0 & 3\end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix}-8 & 5 & 1 & 7 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 5 & -6\\ 2 & 2 & 1 & 5 & 3\\ 0 & 4 & 3 & 7 & 2\\ 1 & 1 & -7 & -6 & 5\end{vmatrix}$

11. Demuestre que

$$\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix} = (a-b)(c-a)(b-c).$$

Esto se denomina la *determinante de Vandermonde*.

12. Demuestre que

$$\begin{vmatrix}a & b & c & d\\ b & c & d & a\\ c & d & a & b\\ d & a & b & c\end{vmatrix}$$
$$= (a+b+c+d)(b-a+d-c)\begin{vmatrix}0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & c & d & a\\ 1 & d & a & b\\ 1 & a & b & c\end{vmatrix}.$$

13. Demuestre que los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) en el plano son colineales (están en una recta) si y sólo si

$$\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix} = 0.$$

Sugerencia: Este determinante es cero exactamente cuando una fila o columna es una combinación lineal de las otras.

15.4 Una fórmula determinante para $\mathbf{A}^{-1}$

Cuando $|\mathbf{A}| \neq 0$, **A** tiene una inversa. Además, existe una fórmula para los elementos de esta inversa en términos de determinantes formados a partir de elementos de **A**.

TEOREMA 15.4 *Elementos de una matriz inversa*

Sea **A** una matriz $n \times n$ no singular y defina una matriz $n \times n$ $\mathbf{B} = [b_{ij}]$

$$b_{ij} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}(-1)^{i+j} M_{ji}.$$

Entonces $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Tenga en cuenta que el elemento i, j de **B** se define en términos de $(-1)^{i+j} M_{ji}$, el cofactor de a_{ji} (no a_{ij}).

Podemos ver por qué esta construcción da $\mathbf{A}^{-1}$ multiplicando explícitamente las dos matrices. Por la definición de la multiplicación de matrices, el elemento i, j de **AB** es

$$(\mathbf{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{ik} M_{jk}. \qquad (15.6)$$

Consideremos ahora dos casos. Si $i = j$ la suma en la ecuación (15.6) es exactamente la expansión de cofactores de $|\mathbf{A}|$ por la fila i. Los principales elementos de la diagonal de **AB** son por lo tanto 1.

Si $i \neq j$, la suma en la ecuación (15.6) es la expansión de cofactores por la fila j del determinante de la matriz formada por **A** mediante la sustitución de j por la fila i. Pero esta matriz tiene dos filas idénticas, por lo que su determinante es cero y los elementos fuera de la diagonal de **AB** son todos cero. Esto significa que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n.$$

Del mismo modo, $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$.

EJEMPLO 15.6

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & -3 \\ 2 & 9 & -5 \end{pmatrix}.$$

Es fácil calcular $|\mathbf{A}| = 120$ de modo que **A** es no singular. Determinaremos $\mathbf{A}^{-1}$ mediante el cálculo de los elementos de la matriz **B** del Teorema 15.4:

$$b_{11} = \frac{1}{120} M_{11} = \frac{1}{120} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 9 & -5 \end{vmatrix} = \frac{12}{120} = \frac{1}{10},$$

$$b_{12} = \frac{1}{120}(-1) M_{21} = -\frac{1}{120} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 9 & -5 \end{vmatrix} = \frac{29}{120},$$

$$b_{13} = \frac{1}{120} M_{31} = \frac{1}{120} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8},$$

$$b_{21} = -\frac{1}{120} M_{12} = -\frac{1}{120} \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = \frac{1}{5},$$

$$b_{22} = \frac{1}{120} M_{22} = \frac{1}{120} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = \frac{1}{15},$$

$$b_{23} = -\frac{1}{120} M_{32} = -\frac{1}{120} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$b_{31} = \frac{1}{120} M_{13} = \frac{1}{120} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = \frac{2}{5},$$

$$b_{32} = -\frac{1}{120} M_{23} = -\frac{1}{120} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = \frac{13}{60},$$

$$b_{33} = \frac{1}{120} M_{33} = \frac{1}{120} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}.$$

Entonces

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/10 & 29/120 & -1/8 \\ 1/5 & 1/15 & 0 \\ 2/5 & 13/60 & -1/4 \end{pmatrix}. \ \blacklozenge$$

SECCIÓN 15.4 PROBLEMAS

En cada uno de los problemas 1 al 10, compruebe la singularidad de la matriz evaluando su determinante. Si la matriz es no singular, utilice el teorema 15.4 para calcular la inversa.

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} -14 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 11 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 9 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & -3 & 9 \\ -2 & 1 & 7 & 4 \\ 13 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 7 & -3 & -4 & 1 \\ 8 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 7 \\ 3 & -2 & -5 & 9 \end{pmatrix}$

15.5 La regla de Cramer

La regla de Cramer es una fórmula determinante para la solución única de un sistema no homogéneo $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ cuando $\mathbf{A}$ es no singular. Por supuesto, esto es $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, pero el siguiente método es a veces conveniente.

TEOREMA 15.5 *La regla de Cramer*

Sea A una matriz de números no singular $n \times n$, y **B** una matriz de números $n \times 1$. Entonces la solución única de $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ se determina por

$$x_k = \frac{1}{|\mathbf{A}|}|\mathbf{A}(k;\mathbf{B})| \tag{15.7}$$

para $k = 1, 2, \cdots, n$, donde $\mathbf{A}(k;\mathbf{B})$ es la matriz obtenida de **A** mediante la sustitución de la columna k de **A** con **B**.

Es fácil ver por qué esto funciona. Sea

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Multiplique la columna k de **A** por x_k. Esto multiplica el determinante de **A** por x_k:

$$x_k|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k}x_k & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k}x_k & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk}x_k & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Para cada $j \neq k$ agregue la columna j x_k veces a la columna k en el último determinante. Puesto que esta operación no cambia el valor de un determinante, entonces

$$x_k|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}(k;\mathbf{B})|$$

y esto nos da la ecuación (15.7).

EJEMPLO 15.7

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= 14 \\ x_2 - 3x_3 &= 5. \end{aligned}$$

La matriz de coeficientes es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Encontramos que |**A**| = 13, por lo que este sistema tiene una solución única. Por la regla de Cramer,

$$x_1 = \frac{1}{13}\begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 14 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -\frac{117}{13} = -9,$$

$$x_2 = \frac{1}{13}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -1 & 14 & -3 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -\frac{10}{13},$$

$$x_3 = \frac{1}{13}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -\frac{25}{13}. \blacklozenge$$

SECCIÓN 15.4 PROBLEMAS

En cada uno de los problemas 1 al 10, resuelva el sistema utilizando la regla de Cramer, o demuestre que la regla no se aplica porque la matriz de coeficientes es singular.

1. $15x_1 - 4x_2 = 5$
   $8x_1 + x_2 = -4$
2. $x_1 + 4x_2 = 3$
   $x_1 + x_2 = 0$
3. $8x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0$
   $x_1 + 5x_2 - x_3 = -5$
   $-2x_1 + 6x_2 + x_3 = -4$
4. $5x_1 - 6x_2 + x_3 = 4$
   $-x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5$
   $2x_1 + 3x_2 + x_3 = -8$
5. $x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$
   $x_2 - 4x_3 = 0$
   $x_1 - x_2 - x_3 = 5$
6. $6x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 7$
   $x_1 - 4x_2 + x_5 = -5$
   $x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_5 = 0$
   $-2x_1 + x_3 - 2x_5 = 4$
   $x_3 - x_4 - x_5 = 8$
7. $2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 6$
   $x_2 - 3x_3 = 10$
   $x_1 - 4x_3 = 0$
   $x_2 - x_3 + 2x_4 = 4$
8. $2x_1 - 3x_2 + x_4 = 2$
   $x_2 - x_3 + x_4 = 2$
   $x_3 - 2x_4 = 5$
   $x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$
9. $14x_1 - 3x_3 = 5$
   $2x_1 - 4x_3 + x_4 = 2$
   $x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1$
   $x_3 - 4x_4 = -5$
10. $x_2 - 4x_4 = 18$
    $x_1 - x_2 + 3x_3 = -1$
    $x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 5$
    $x_2 + 3x_4 = 0$

15.6 Teorema árbol matriz

En 1847, G. R. Kirchhoff publicó un artículo clásico en el que deriva muchas de las leyes de circuitos eléctricos que llevan su nombre, incluyendo el teorema árbol matriz de ahora vamos a discutir.

La figura 15.1 muestra un circuito eléctrico típico. La geometría subyacente del circuito se muestra en la Figura 15.2. Tal diagrama de puntos y líneas de interconexión se llama un *grafo* o gráfico, y fue visto en el contexto de los átomos se mueven a través de cristales en la Sección 14.1.3. Un grafo marcado tiene símbolos unidos a los puntos.

Algunos de los resultados de Kirchhoff dependen de las propiedades geométricas del circuito del grafo subyacente. Una de estas propiedades es la disposición de los bucles cerrados. Otro es el número de

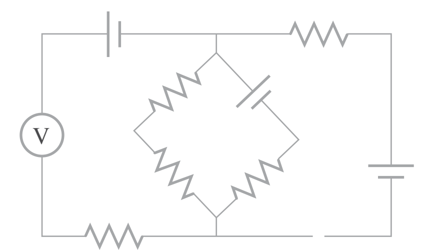


Figura 15.1 Circuito eléctrico típico.

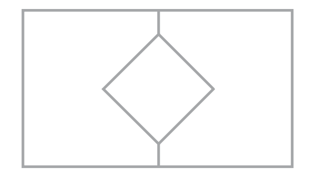


Figura 15.2 Grafo subyacente del circuito de la Figuira 15.1

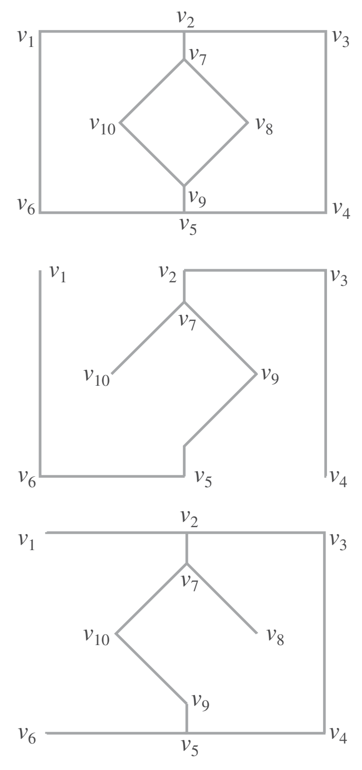


Figura 15.3 Grafo con leyendas y dos árboles de expansión.

árboles de expansión en la gráfica marcada. Un árbol de expansión es un conjunto de líneas en el gráfico de la formación sin bucles cerrados, pero que contiene un camino entre dos puntos de la gráfica. La figura 15.3 muestra un grafo etiquetado con dos árboles de expansión.

Kirchhoff deriva una relación entre los determinantes y el número de árboles de expansión en un grafo etiquetado.

TEOREMA 15.5 Teorema árbol matriz

Sea G un grafo con vértices etiquetados $v_1, v_2, \cdot\cdot\cdot, v_n$. Forme una matriz $n \times n$ $\mathbf{T} = [t_{ij}]$ de la siguiente manera. Si $i = j$, entonces t_{ij} es el número de líneas a v_i en el gráfico. Si $i \neq j$, entonces $t_{ij} = 0$ si no hay una línea j entre v_i y v_j en G, y $t_{ij} = -1$ si hay una tal línea. Entonces todos los cofactores de $\mathbf{T}$ son iguales y su valor común es el número de árboles de expansión en G.

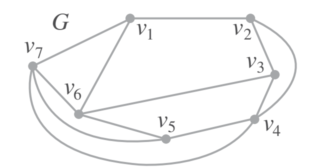


Figura 15.4 Grafo del Ejemplo 15.8

EJEMPLO 15.7

Para el grafo etiquetado de la Figura 15.4, **T** es la matriz de 7 x 7

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Evalúe cualquier cofactor de **T**. Por ejemplo, mediante la supresión de la fila 1 y la columna 1, evalúe el cofactor

$$(-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 386. \quad \blacklozenge$$

Incluso con este pequeño gráfico en el Ejemplo 15.8, está claro que sería poco práctico enumerar los árboles que abarca y enumerarlos todos.

SECCIÓN 15.6 PROBLEMAS

1. Encuentre el número de árboles de expansión en el grafo de la Figura 15.5.

Figura 15.5 Grafo del problema 1, Sección 15.6

2. Encuentre el número de árboles de expansión en el grafo de la Figura 15.6.

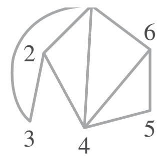


Figura 15.6 Grafo del problema 2, Sección 15.6

3. Encuentre el número de árboles de expansión en el grafo de la Figura 15.7.

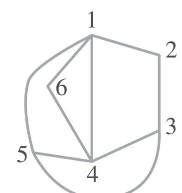


Figura 15.7 Grafo del problema 3, Sección 15.6

4. Encuentre el número de árboles de expansión en el grafo de la Figura 15.8.

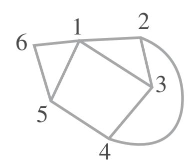


Figura 15.8 Grafo del problema 4, Sección 15.6

5. Encuentre el número de árboles de expansión en el grafo de la Figura 15.9.

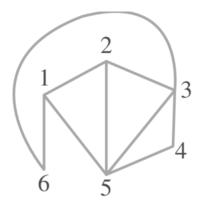


Figura 15.9 Grafo del problema 5, Sección 15.6

6. Un grafo completo en n puntos consiste en n puntos, con una línea entre cada par de puntos. Esta gráfica es a menudo denotada como K_n. Con los puntos marcados como $1, 2, \cdots, n$, demuestre que el número de árboles de expansión en K_n es n^{n-2} para $n = 3, 4, \cdots$.

LA SERIE DE FOURIER DE UNA
FUNCION CONVERGENCIA DE UN
SERIE DE FOURIER SERIE DE FO
EN COSENOS EN SENOS INTEGRA

CAPÍTULO 16

Eigenvalores, diagonalización y matrices especiales

16.1 Eigenvalores y eigenvectores

En este capítulo, el término número se refiere a un número real o complejo. Sea **A** una matriz $n \times n$ de números. Un número λ es un eigenvalor o valor propio de **A** si existe una matriz E distinta de cero $n \times 1$ tal que

$$\mathbf{AE} = \lambda\mathbf{E}. \tag{16.1}$$

Llamamos a **E** un *eigenvector* o vector propio asociado al valor propio λ.

Podemos pensar en una matriz de números $n \times 1$ como un vector n, con componentes reales o complejos. Si consideramos a **A** como una transformación lineal que mapea de un vector n **X** a un vector n **AX**, entonces la ecuación (16.1) se cumple cuando **A** mueve a **E** a un vector paralelo λ**E**. Este es el significado geométrico de un vector propio.

Si c es un número distinto de cero y $\mathbf{AE} = \lambda\mathbf{E}$, entonces

$$\mathbf{A}(c\mathbf{E}) = c\mathbf{AE} = c\lambda\mathbf{E} = \lambda(c\mathbf{E}).$$

Esto significa que los múltiplos constantes distintos de cero de los vectores propios son eigencvectores (con el mismo valor propio).

EJEMPLO 16.1

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$

entonces 0 es un valor propio de **A** con vector propio

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Para cualquier número α distinto de cero,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4\alpha \end{pmatrix}$$

es también un vector propio. Cero puede ser un eigenvalor, pero un eigenvector debe ser un vector distinto de cero (al menos un componente distinto de cero).

EJEMPLO 16.2

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto 1 es un eigenvalor o valor propio con un eigenvector o vector propio

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o esta matriz multiplicada por una constante distinta de cero. Del mismo modo,

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto -1 es un valor propio con vector propio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix},$$

o cualquier múltiplo distinto de cero de este vector.

Nos gustaría ser capaces de encontrar todos los eigenvalores de una matriz. Tendremos $\mathbf{AE} = \lambda\mathbf{E}$, para algún número λ y una matriz $n \times 1$ **E**, exactamente cuando

$$\lambda\mathbf{E} - \mathbf{AE} = \mathbf{O}.$$

Esto es equivalente a

$$(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{E} = \mathbf{O}$$

y esto ocurre exactamente cuando el sistema

$$(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{O}$$

tiene una solución no trivial **E**. La condición es que la matriz de coeficientes sea singular (determinante cero), de ahí que

$$|\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}| = 0.$$

Si se expande, el determinante de la izquierda es un polinomio de grado n en el desconocido λ, y se llama el *polinomio característico* de **A**. Por lo tanto

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = |\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}|.$$

Este polinomio tiene n raíces para λ (quizá algunas repetidos, tal vez algunos o todos complejos). Estos números n, contando multiplicidades, son todos los valores propios de **A**. Corresponden a cada valor propio λ, una solución no trivial de

$$(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{O}.$$

es un eigenvector.

Podemos resumir esta discusión de la siguiente manera.

TEOREMA 16.1 *Eigenvalores y eigenvectores de* **A**

Sea **A** una matriz $n \times n$ de números. Entonces

1. λ es un valor propio de **A** si y sólo si λ es una raíz del polinomio característico de A. Esto ocurre exactamente cuando

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = |\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}| = 0.$$

Ya que $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$ tiene grado n, **A** tiene n valores propios, contando cada valor propio tantas veces como aparezca como una raíz de $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

2. Si λ es un valor propio de **A**, entonces cualquier solución no trivial **E** de

$$(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{O}$$

es un vector propio de **A** asociado a λ.

3. Si **E** es un vector propio asociado al valor propio λ, entonces también lo es $c\mathbf{E}$ para cualquier número c distinto de cero.

EJEMPLO 16.3

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

como en el Ejemplo 16.2, el polinomio característico es

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = |\lambda \mathbf{I}_3 - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

Este polinomio tiene raíces 1, 1, −1 y estos son los valores propios de **A**. La raíz 1 tiene multiplicidad 2, y deberá figurar dos veces como un valor propio de **A**. **A** tiene tres valores propios.

Para encontrar un vector propio asociado al valor propio 1, ponga λ = 1 en (2) del teorema y resuelva el sistema

$$((1)\mathbf{I}_3 - \mathbf{A})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas tiene la solución general

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y este es un eigenvector asociado con 1 para cualquier $\alpha \neq 0$.

Para vectores propios asociados con −1, ponga = −λ = 1 en (2) del teorema y resuelva

$$((-1)\mathbf{I}_3 - \mathbf{A})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{O}.$$

Este sistema tiene la solución general

$$\begin{pmatrix} \beta \\ 2\beta \\ -4\beta \end{pmatrix}$$

y este es un eigenvector asociado con −1 para cualquier $\beta \neq 0$.

EJEMPLO 16.4

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = |\lambda \mathbf{I}_2 - \mathbf{A}| = \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 4,$$

con raíces

$$\frac{1+\sqrt{15}i}{2} \text{ and } \frac{1-\sqrt{15}i}{2}$$

y estos son los valores propios de A.

Para un eigenvector correspondiente a $(1+\sqrt{15}i)/2$ luego $(((1+\sqrt{15}i)/2)\mathbf{I}_2 - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{O}$, que es

$$\left[\frac{1+\sqrt{15}i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right] \mathbf{X} = \mathbf{O}.$$

Este es el sistema

$$\begin{pmatrix} \dfrac{-1+\sqrt{15}i}{2} & 2 \\ -2 & \dfrac{1+\sqrt{15}i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema 2 × 2 tiene la solución general

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ (1-\sqrt{15}i)/4 \end{pmatrix}.$$

Este es un eigenvector asociado a $(1+\sqrt{15}i)/2$ para cualquier $\alpha \neq 0$.

Para los eigenvectores asociados a $(1-\sqrt{15}i)/2$, resuelva el sistema 2 × 2

$$(((1-\sqrt{15}i)/2)\mathbf{I}_2-\mathbf{A})\mathbf{X}=\mathbf{O}$$

para obtener

$$\beta\begin{pmatrix}1\\(1+\sqrt{15}i)/4\end{pmatrix}.$$

Este es un eigenvector asociado a $(1-\sqrt{15}i)/2$ para cualquier $\beta \neq 0$.

Si **A** tiene números reales como elementos y $\lambda = \alpha + i\beta$ es un valor propio, entonces el conjugado $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ es también un valor propio. Esto es porque el polinomio característico de **A** tiene coeficientes reales en este caso, así que las raíces complejas (eigenvalores de **A**) se producen en pares conjugados. Además, si **E** es un vector propio correspondiente a λ, Entonces $\overline{\mathbf{E}}$ es un vector propio correspondiente a $\overline{\lambda}$, Donde tomamos el conjugado de una matriz tomando el conjugado de cada uno de sus elementos. Esto puede verse tomando el conjugado de **AE** = λ**E** para obtener

$$\overline{\mathbf{AE}}=\overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{E}}.$$

Ya que **A** tiene elementos reales, $\overline{\mathbf{A}}$ = **A** así que

$$\mathbf{A}\overline{\mathbf{E}}=\overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{E}}.$$

Esta observación se puede ver en el Ejemplo 16.4.

Hay una expresión general para los valores propios de una matriz que utilizaremos para sacar conclusiones acerca de los valores propios de matrices que tienen propiedades especiales.

LEMA 16.1

Sea **A** una matriz $n \times n$ de números. Sea λ un eigenvalor de **A**, con eigenvector **E**. Entonces

$$\lambda=\frac{\overline{\mathbf{E}}^t\mathbf{AE}}{\overline{\mathbf{E}}^t\mathbf{E}}. \quad \blacklozenge \qquad (16.2)$$

Antes de dar la prueba de una línea de esta expresión, examinaremos lo que significa el lado derecho. Sea

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_n\end{pmatrix}.$$

Luego

$$\overline{\mathbf{E}}^t\mathbf{AE}=\begin{pmatrix}e_1 & e_2 & \cdots & e_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_n\end{pmatrix}.$$

Este es un producto de una matriz $n \times 1$ con una matriz $n \times n$, entonces una matriz de $n \times 1$, por lo tanto, es una matriz 1 × 1, que nosotros consideramos un número. Si realizamos este producto matriz obtenemos el número

$$\overline{\mathbf{E}}^t\mathbf{AE}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{e_i}e_j.$$

Para el denominador de la ecuación (16.2) se tiene una matriz $1 \times n$ multiplicada por una matriz $n \times 1$, que es también una matriz de 1 × 1, o un número. Específicamente,

$$\overline{\mathbf{E}}^t\mathbf{E} = \begin{pmatrix}\overline{e_1} & \overline{e_2} & \cdots & \overline{e_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\\ \vdots\\ e_n\end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n}\overline{e_j}e_j = \sum_{j=1}^{n}|e_j|^2.$$

Por lo tanto la conclusión del Lema 16.1 se puede escribir

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{e_i}e_j}{\sum_{j=1}^{n}|e_j|^2}.$$

Prueba del Lema 16.1 Ya que $\mathbf{AE} = \lambda\mathbf{E}$ entonces

$$\overline{\mathbf{E}}^t\mathbf{AE} = \lambda\overline{\mathbf{E}}^t\mathbf{E},$$

Lo que nos da la conclusión del Lema 16.1.

Al hablar de diagonalización, necesitaremos saber si los vectores propios de una matriz son linealmente independientes. El siguiente teorema responde a esta pregunta para el caso especial en que los n valores propios de $\mathbf{A}$ son distintos (el polinomio característico no tiene raíces repetidas).

TEOREMA 16.2

Supongamos que la matriz A $n \times n$ tiene eigenvalores n distintos. Entonces $\mathbf{A}$ tiene n eigenvectores linealmente independientes.

Para ilustrar, en el ejemplo 16.4, A fue de 2×2 y tuvo dos valores propios distintos. Los vectores propios producidos para cada valor propio eran linealmente independientes.

Prueba Demostraremos por inducción que cualquiera eigenvalores distintos k llevan asociados con ellos k eigenvectores linealmente independientes. Para $k = 1$ no hay nada que mostrar. Así, supongamos que $k = 2$ y la conclusión del teorema es válido para cualquier $k - 1$ valores propios distintos. Esto significa que cualquiera valores propios distintos $k - 1$ llevan asociados con ellos $k - 1$ vectores propios distintos. Supongamos que A tiene k valores propios distintos $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ con los correspondientes vectores propios $\mathbf{V}_1, \cdots, \mathbf{V}_k$. Queremos mostrar que estos vectores propios son linealmente independientes.

Si fueran linealmente dependientes, entonces habría números $c_1, \cdots, c_k$, no todos cero, tal que

$$c_1\mathbf{V}_1 + c_2\mathbf{V}_2 + \cdots + c_k\mathbf{V}_k = \mathbf{O}.$$

Al etiquetar, si es necesario, se puede suponer, por conveniencia, que $c_1 \neq 0$ Multiplique esta ecuación por $\lambda_1\mathbf{I}_n - \mathbf{A}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{O} &= (\lambda_1\mathbf{I}_n - \mathbf{A})(c_1\mathbf{V}_1 + c_2\mathbf{V}_2 + \cdots + c_k\mathbf{V}_k)\\ &= c_1(\lambda_1\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{V}_1 + c_2(\lambda_1\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{V}_2\\ &\quad + \cdots + c_k(\lambda_1\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{V}_k\\ &= c_1(\lambda_1\mathbf{V}_1 - \lambda_1\mathbf{V}_1) + c_2(\lambda_1\mathbf{V}_2 - \lambda_2\mathbf{V}_2)\\ &\quad + \cdots + c_k(\lambda_1\mathbf{V}_k - \lambda_k\mathbf{V}_k)\\ &= c_2(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{V}_1 + \cdots + c_k(\lambda_1 - \lambda_k)\mathbf{V}_k.\end{aligned}$$

Ahora $\mathbf{V}_2, \cdots, \mathbf{V}_k$ son linealmente independientes por la hipótesis de inducción, por lo que estos coeficientes son todos cero. Pero $\lambda_1 \neq \lambda_j$ para $j = 2, \cdots, k$ por los supuestos de que los valores propios son distintos. Por lo tanto

$$c_2 = \cdots = c_k = 0.$$

Pero entonces $c_1\mathbf{V}_1 = \mathbf{O}$. Como un valor propio no puede ser el vector cero, esto significa que $c_1 = 0$ también. Por lo tanto $\mathbf{V}_1, \cdots, \mathbf{V}_k$ son linealmente independientes. Por inducción, esto demuestra el teorema.

En el Ejemplo 16.3, la matriz 3 × 3 **A** tenía sólo dos valores propios distintos, y sólo dos vectores propios linealmente independientes. Sin embargo, la matriz del siguiente ejemplo tiene tres vectores propios linealmente independientes a pesar de que sólo tiene dos valores propios distintos. Cuando los valores propios se repiten, una matriz puede o no puede tener *n* vectores propios linealmente independientes.

EJEMPLO 16.5

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 12 & -11 & 12 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de **A** son −3, 1, 1, 1 con 1 como raíz repetida del polinomio característico. Correspondiente a −3, nos encontramos con un vector propio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora busque un vector propio correspondiente a 1. Debemos resolver el sistema

$$((1)\mathbf{I}_2 - \mathbf{A})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -12 & 12 & -12 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema tiene la solución general

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

en la que α y β son cualquier número. Con $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, y luego con $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, podemos obtener dos vectores propios linealmente independientes asociados con el eigenvalor 1:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para esta matriz **A**, podemos producir tres vectores propios linealmente independientes, a pesar de que los valores propios no son distintos.

Los eigenvalores y eigenvectores de las clases especiales de matrices pueden exhibir propiedades especiales. Las matrices simétricas forman una de esas clases. $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ es *simétrica* si $a_{ij} = a_{ij}$ cuando $i \neq j$. Esto significa que $\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$, por lo tanto, que cada elemento de fuera de la diagonal es igual a su reflejo a través de esta diagonal principal. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} -7 & -2-i & 1 & 14 \\ -2-i & 2 & -9 & 47i \\ 1 & -9 & -4 & \pi \\ 14 & 47i & \pi & 22 \end{pmatrix}$$

es simétrica.

Es una propiedad importante de las matrices simétricas que las que tienen elementos reales tienen todas eigenvalores reales.

TEOREMA 16.3 *Eigenvalores de matrices reales simétricas*

Los eigenvalores de una matriz simétrica real son reales.

Prueba Por el lema 16.1 (ecuación (16.2)), para cualquier valor propio λ de **A**, con vector propio **E** = ($e_1, \cdots, e_n$),

$$\lambda = \frac{\overline{\mathbf{E}}^t \mathbf{AE}}{\overline{\mathbf{E}}^t \mathbf{E}}.$$

Como se ha indicado previamente, el denominador es

$$\overline{\mathbf{E}}^t \mathbf{E} = \sum_{j=1}^{n} |e_j|^2$$

y esto es real. Todo lo que tenemos que hacer es mostrar que el numerador es real, lo que vamos a hacer al mostrar que $\overline{\mathbf{E}}^t\mathbf{AE}$ es igual a su conjugado complejo. En primer lugar, porque los elementos de **A** son reales, cada uno es igual a su propio conjugado, por lo que $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$. Además, dado que **A** es simétrica, $\mathbf{A}^t = \mathbf{A}$. Por lo tanto

$$\overline{\overline{\mathbf{E}}^t \mathbf{AE}} = \overline{\overline{\mathbf{E}}^t}\, \overline{A\mathbf{E}} = \overline{\overline{\mathbf{E}}^t}\, \mathbf{A}\overline{\mathbf{E}} = \mathbf{E}^t \mathbf{A}\overline{\mathbf{E}}.$$

Pero la última cantidad es una matriz 1 × 1, que es igual a su propia transposición. Por lo tanto, continuando la última ecuación,

$$\mathbf{E}^t \mathbf{AE} = (\mathbf{E}^t \mathbf{A}\overline{\mathbf{E}})^t = (\overline{\mathbf{E}^t})\mathbf{A}(\mathbf{E}^t)^t = \overline{\mathbf{E}}^t \mathbf{AE}.$$

Las dos últimas ecuaciones juntos muestran que $\overline{\mathbf{E}}^t\mathbf{AE}$ es su propio conjugado, por lo tanto, es real, lo que demuestra el teorema.

Si los valores propios de una matriz real son reales, entonces los vectores propios asociados tendrán elementos verdaderos. En el caso de que **A** también sea simétrica, afirmamos que los vectores propios asociados con valores propios distintos deben ser ortogonales.

TEOREMA 16.4 *Ortogonalidad de eigenvectores*

Sea **A** una matriz simétrica real. Entonces los vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales.

Prueba Podemos obtener este resultado mediante una interacción útil entre la matriz y la notación vectorial. Sean λ y μ valores propios distintos de **A**, con vectores propios, respectivamente,

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}.$$

Hemos visto que

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{G} = e_1 g_1 + e_2 g_2 + \cdots + e_n g_n = \mathbf{E}^t \mathbf{G}.$$

Ahora usemos el que $\mathbf{AE} = \lambda\mathbf{E}$, $\mathbf{AG} = \mu\mathbf{G}$, y $\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$ para escribir

$$\begin{aligned}\lambda\mathbf{E}^t\mathbf{G} &= (\mathbf{AE})^t\mathbf{G} = (\mathbf{E}^t\mathbf{A}^t)\mathbf{G} \\ &= (\mathbf{E}^t\mathbf{A})\mathbf{G} = \mathbf{E}^t(\mathbf{AG}) = \mathbf{E}^t(\mu\mathbf{G}) = \mu\mathbf{E}^t\mathbf{G}.\end{aligned}$$

Pero entonces

$$(\lambda - \mu)\mathbf{E}^t\mathbf{G} = 0.$$

Como $\lambda \neq \mu$, entonces $\mathbf{E}^t\mathbf{G} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{G} = 0$.

EJEMPLO 16.6

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz simétrica de 3 × 3. Los valores propios son 2, −1, y 4, con vectores propios asociados

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ and } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Estos vectores propios son mutuamente ortogonales.

Encontrar los valores propios de una matriz puede ser difícil debido a la búsqueda de las raíces de un polinomio puede ser difícil. En MAPLE, el comando

```
eigenvals (A);
```

enumerará los valores propios de **A**, si n no es demasiado grande. El comando

```
eigenvects (A);
```

enumerará cada valor propio, su multiplicidad, y, para cada valor propio, tantos vectores propios linealmente independientes como se asocien con ese valor propio. También podemos encontrar el polinomio característico de A por

```
función charpoly (A, t);
```

en el que la variable del polinomio se llama t, pero se le podría dar cualquier designación.

Hay un método debido a Gershgorin que nos permite colocar los valores propios dentro de discos en el plano complejo. Esto a veces es útil para tener una idea de cómo se distribuyen los valores propios de una matriz.

TEOREMA 16.5 *Gershgorin*

Sea **A** una matriz $n \times n$ de números. Para $k = 1, 2, \cdots, n$ sea

$$r_k = \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}|.$$

Sea C_k el círculo de radio r_k con centro en (α_k, β_k), donde $\alpha_{kk} = \alpha_k + \beta_k i$. A continuación, cada valor propio de **A**, cuando se representa como un punto en el plano complejo, se encuentra en o dentro de uno de los círculos $C_1, \cdots, C_n$.

C_k el círculo centrado en el k-ésimo elemento de la diagonal α_{kk} de **A**, que tiene un radio igual a la suma de las magnitudes de los elementos a lo largo de la fila k, excluyendo el elemento de la diagonal que ocurre en esa fila.

EJEMPLO 16.7

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 12i & 1 & 3 \\ 2 & -6 & 2+i \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de **A** es

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^3 + (1-12i)\lambda^2 - (43+13i)\lambda - 68 + 381i.$$

Los círculos de Gershgorin tienen centros y radios:

$$C_1 : (0, 12), r_1 = 1 + 3 = 4,$$
$$C_2 : (-6, 0), r_2 = 2 + \sqrt{5}$$
$$C_3 : (5, 0), r_3 = 3 + 1 = 4.$$

Figura 16.1 muestra estos círculos de Gershgorin. Los valores propios están en los discos determinados por estos círculos.

El teorema de Gershgorin no es una forma de obtener valores propios que se aproximen, ya que algunos de los discos pueden tener grandes radios. Sin embargo, a veces la importante información que se revela por estos discos puede ser útil. Por ejemplo, en los estudios de la estabilidad del flujo de un fluido en que es importante saber si los valores propios se producen en el lado derecho del semiplano.

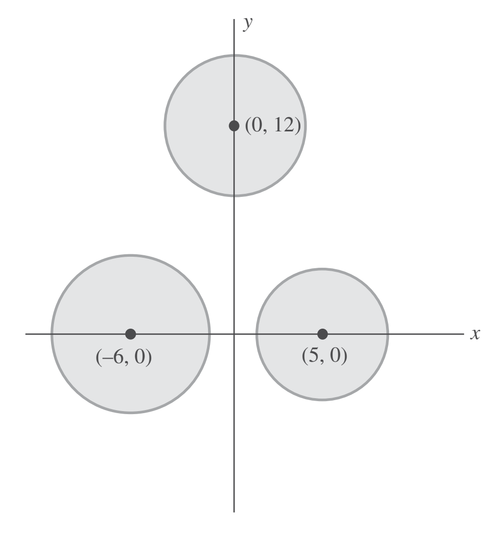


Figura 16.1 Círculos gerschgorianos en Ejemplo 16.7.

SECCIÓN 16.1 PROBLEMAS

En cada uno de los problemas 1 al 16, encuentre los valores propios de la matriz. Para cada eigenvalor, encuentre un eigenvector. Dibuje los círculos de Gershgorin para la matriz y localice los eigenvalores como puntos en el plano.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} -14 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -8 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En cada uno de los problemas 17 al 22, encuentre los valores propios y asociados a los eigenvectores de la matriz. Compruebe que los vectores propios asociados con valores propios distintos son ortogonales.

17. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} -13 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

23. Suponga que λ es un valor propio de **A** con vector propio **E**. Sea k un entero positivo. Demostrar que λ^k es un eigenvalor de $\mathbf{A}^k$ con eigenvector **E**.

24. Sea **A** una matriz $n \times n$ de números. Demuestre que el término constante en el polinomio característico de **A** es $(-1)^n|\mathbf{A}|$. Utilice esto para mostrar que cualquier matriz singular debe tener 0 como un eigenvalor.

16.2 Diagonalización

Recordemos que los elementos a_{ii} de una matriz representan su *diagonal principal*. Todos los demás elementos de la matriz son llamados los *elementos fuera de la diagonal*.

Una matriz cuadrada se llama una *matriz diagonal* si todos sus elementos fuera de la diagonal son cero. Una matriz diagonal tiene esta apariencia

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

Las matrices diagonales tienen muchas propiedades agradables. Sean A y B matrices $n \times n$ diagonales con elementos diagonales, respectivamente, a_{ii} y b_{ii}.

1. **A** + **B** es diagonal con elementos diagonales $a_{ii} + b_{ii}$.
2. **AB** es diagonal con elementos diagonales $a_{ii} b_{ii}$.
3. $$|\mathbf{A}| = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn},$$
   el producto de los elementos de la diagonal.
4. A partir de (3), **A** es no singular exactamente cuando cada elemento de la diagonal es distinto de cero (de modo que A tiene determinante distinto de cero). En este caso, A-1 es la matriz diagonal que tiene elementos de la diagonal $1/ a_{ii}$.
5. Los valores propios de **A** son sus elementos diagonales.
6. $$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
   con todos los elementos nulos, excepto el 1 en el lugar i, 1, es un vector propio correspondiente al eigenvalor a_{ii}.

La mayoría de las matrices no son diagonales. Sin embargo, a veces es posible transformar una matriz en una diagonal. Esto nos permitirá transformar algunos problemas a otras más simples.

Una matriz A $n \times n$ es diagonalizable si existe una matriz $n \times n$ **P** tal que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ sea un matriz diagonal. En este caso decimos que **P** *diagonaliza* a **A**.

Vamos a ver que no toda matriz es diagonalizable. El siguiente resultado no sólo nos dice exactamente cuándo **A** es diagonalizable, sino también la forma de elegir **P** para diagonalizar **A**, y a qué de parecerse $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$.

TEOREMA 16.6 *Diagonalización de una matriz*

Sea **A** $n \times n$. Entonces **A** es diagonalizable si y sólo si **A** tiene n vectores propios linealmente independientes. Por otra parte, si **P** es una matriz $n \times n$ con estos vectores propios como columnas, entonces $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ es la matriz diagonal $n \times n$ con los valores propios de **A** hacia abajo de su diagonal principal, en el orden en que los vectores propios se eligieron como columnas de P.

Además, si **Q** es cualquier matriz que diagonaliza a **A**, entonces necesariamente la matriz diagonal $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}$ tiene los valores propios de **A** a lo largo de la diagonal principal, y las columnas de **Q** deben ser vectores propios de **A**, en el orden en que aparecen en los valores propios de la diagonal principal de $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}$.

Vamos a demostrar el teorema después de ver tres ejemplos.

EJEMPLO 16.8

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

A tiene eigenvalores −1, 3 y los correspondientes eigenvectores linealmente independientes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Forme

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un cálculo sencillo muestra que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

una matriz diagonal con los valores propios de **A** en la diagonal principal, en el orden en que el los vectores propios se utilizan para formar las columnas.

Si invertimos el orden de estos vectores propios como columnas y definimos

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

luego

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

con los valores propios a lo largo de la diagonal principal, pero ahora en el orden que refleja el orden de los vectores propios utilizados en la formación de las columnas de **Q**.

EJEMPLO 16.9

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Los eigenvalores son $-1, (-1+\sqrt{29})/2$ y $(-1-\sqrt{29})/2$, y los eigenvectores correspondientes son

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3+\sqrt{29} \\ 10+2\sqrt{29} \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3-\sqrt{29} \\ 10-2\sqrt{29} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Estos son linealmente independientes porque los valores propios son distintos. Utilice estos vectores propios como columnas de **P** para formar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 3+\sqrt{29} & 3-\sqrt{29} \\ -3 & 10+2\sqrt{29} & 10-2\sqrt{29} \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hallamos que

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{\sqrt{29}}{812} \begin{pmatrix} 232/\sqrt{29} & -116/\sqrt{29} & 232/\sqrt{29} \\ 16-2\sqrt{29} & -1+\sqrt{29} & -19+5\sqrt{29} \\ -16-2\sqrt{29} & 1+\sqrt{29} & 19+5\sqrt{29} \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1+\sqrt{29})/2 & 0 \\ 0 & 0 & (-1-\sqrt{29})/2 \end{pmatrix},$$

con los valores propios abajo de la diagonal principal en el orden de los valores propios enumerados para las columnas de **P**.

En este ejemplo, $\mathbf{P}^{-1}$ es una matriz desagradable. Uno de los valores del Teorema 16.6 es que se nos dice a lo que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ debe parecerse, sin tener que determinar $\mathbf{P}^{-1}$ y llevar a cabo este producto.

Aunque los eigenvalores n distintos garantizan que **A** es diagonalizable, una matriz $n \times n$ con menos de n valores propios distintos puede todavía ser diagonalizable. Esto ocurrirá si somos capaces de encontrar n vectores propios linealmente independientes.

EJEMPLO 16.10

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 12 & -11 & 12 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

como en el Ejemplo 16.5. Hallamos los valores propios −3, 1, 1, con un valor propio repetido. Sin embargo, hemos sido capaces de encontrar tres vectores propios linealmente independientes. Utilice éstos como columnas para formar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces **P** diagonaliza a **A**:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una vez más, lo sabemos por el Teorema 16.6, sin calcular explícitamente el producto $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$.

Si **A** tiene menos de n vectores propios linealmente independientes, entonces **A** no es diagonalizable.

Ahora vamos a demostrar el teorema 16.6.

Prueba Sean los valores propios de **A** $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ (no necesariamente distintos). Supongamos primero que estos valores propios tienen sus correspondientes vectores propios linealmente independientes $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \cdots, \mathbf{V}_n$. Estos forman las columnas de **P**, que indicamos por escrito

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_2 & \cdots & \mathbf{V}_n \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix}.$$

P es no singular debido a que sus columnas son linealmente independientes.

Sea **D** la matriz diagonal $n \times n$ con los valores propios de **A**, en el orden dado por la diagonal principal. Queremos demostrar que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}.$$

Vamos a probar esto mostrando por cálculo directo que

$$\mathbf{AP} = \mathbf{PD}.$$

En primer lugar, recordemos que el producto **AP** tiene como columnas el producto de **A** con las columnas de **P**. Así

$$\begin{aligned} \text{columna } j \text{ de } \mathbf{AP} &= \mathbf{A}(\text{columna } j \text{ de } \mathbf{P}) \\ &= \mathbf{A}\,(\mathbf{V}_j) = \lambda_j \mathbf{V}_j. \end{aligned}$$

Ahora calcule **PD**. Por comodidad en la comprensión del cálculo, escribimos

$$\mathbf{V}_j = \begin{pmatrix} v_{1j} \\ v_{2j} \\ \cdots \\ v_{nj} \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\mathbf{PD} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 v_{11} & \lambda_2 v_{12} & \cdots & \lambda_n v_{1n} \\ \lambda_1 v_{21} & \lambda_2 v_{22} & \cdots & \lambda_n v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 v_{n1} & \lambda_2 v_{2n} & \cdots & \lambda_n v_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ \lambda_1 \mathbf{V}_1 & \lambda_2 \mathbf{V}_2 & \cdots & \lambda_n \mathbf{V}_n \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} = \mathbf{AP},$$

ya que la columna j de esta matriz es $\lambda_j \mathbf{V}_j$.

Hasta ahora hemos demostrado que, si **A** tiene vectores propios n linealmente independientes, entonces **A** es diagonalizable y $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ es la matriz diagonal con los valores propios al final de la diagonal principal, en el orden en que los vectores propios se consideran como columnas de **P**.

Para demostrar lo contrario, ahora supongamos que **A** es diagonalizable. Queremos mostrar que **A** tiene n vectores propios linealmente independientes (independientemente de si los valores propios son distintos). Además, queremos mostrar que, si $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AP}$ es una matriz diagonal, entonces los elementos diagonales de esta matriz son los valores propios de **A**, y las columnas de **Q** son los vectores propios correspondientes. Así, supongamos que

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} = \mathbf{D}.$$

Sea $\mathbf{V}_j$ la columna j de **Q**. Estas columnas son linealmente independientes porque **Q** es no singular. Mostraremos que d_j es un valor propio de **A** con vector propio $\mathbf{V}_j$.

Ya que $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$, tenemos $\mathbf{AQ} = \mathbf{QD}$. Calcule ambos lados de esta ecuación por separado. En primer lugar, ya que las columnas de **Q** son los $\mathbf{V}_j$, y luego

$$\mathbf{QD} = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_2 & \cdots & \mathbf{V}_n \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ d_1\mathbf{V}_1 & d_2\mathbf{V}_2 & \cdots & d_n\mathbf{V}_n \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix},$$

que es una matriz que tiene $d_j\mathbf{V}_j$ como columna j. Ahora calcule

$$\mathbf{AQ} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_2 & \cdots & \mathbf{V}_n \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ \mathbf{AV}_1 & \mathbf{AV}_2 & \cdots & \mathbf{AV}_n \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix},$$

que es una matriz que tiene $\mathbf{AV}_j$ como columna j. Como son iguales, entonces

$$\mathbf{AV}_j = d_j\mathbf{V}_j$$

y esto hace a d_j un valor propio de **A** con vector propio $\mathbf{V}_j$.

No toda matriz es diagonalizable. Sabemos por el teorema de que una matriz $n \times n$ con menos de n vectores propios linealmente independientes no es diagonalizable.

EJEMPLO 16.11

Sea

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

B tiene valores propios 1, 1, y todos los vectores propios son múltiplos constantes de

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto **B** tiene como vectores propios sólo múltiplos distintos de cero de un vector, y no tiene dos vectores propios linealmente independientes. Por el teorema, **B** no es diagonalizable.

Observe que, si **P** diagonalizara a **A**, entonces **P** tendría que tener vectores propios de **B** como columnas. Entonces **P** tendría que tener la forma

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

para algunos α y β distintos de cero. Pero esta matriz es singular, sin inversa, porque $|\mathbf{P}| = 0$.

La clave para diagonalizar **A** es la existencia de n vectores propios linealmente independientes. Por el Teorema 16.2, una circunstancia en la que esto siempre sucede es cuando **A** tiene n distintos eigenvalores.

COROLARIO 16.1

Una matriz $n \times n$ con n eigenvalores distintos debe ser diagonalizable.

EJEMPLO 16.12

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

A tiene eigenvalores $3, 4, (-5+\sqrt{41})/2$ y $(-5-\sqrt{41})/2$. Debido a que estos son distintos, **A** tiene 4 vectores propios linealmente independientes y por lo tanto es diagonalizable. Hay una matriz **P** tal que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-5+\sqrt{41})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-5-\sqrt{41})/2 \end{pmatrix}.$$

No tenemos que escribir esta matriz P (esto requeriría encontrar vectores propios) calcular $\mathbf{P}^{-1}$ para llegar a esta conclusión.

SECCIÓN 16.2 PROBLEMAS

En cada uno de los problemas 1 al 10, produzca una matriz **P** que diagonalice la matriz dada, o demuestre que la matriz es no diagonalizable. Determine $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$. *Sugerencia*: Tenga en cuenta que no es necesario calcular **P** para conocer esta matriz producto.

1. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

11. Sea que **A** tiene eigenvalores $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, y que **P** diagonaliza a **A**. Demuestre que, para cualquier entero positivo k,

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n{}^k \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1}.$$

En cada uno de los problemas 12 al 15, usa la idea del Problema 11 para calcular la potencia indicada de la matriz.

12. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{A}^{16}$

13. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$; $\mathbf{A}^{18}$

14. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{A}^{31}$

15. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{A}^{43}$

16. Suponga que $\mathbf{A}^2$ es diagonalizable. Demuestre que **A** es diagonalizable.

16.3 Algunos tipos especiales de matrices

En esta sección vamos a hablar de varios tipos de matrices que tienen propiedades especiales.

16.3.1 Matrices ortogonales

Una matriz A $n \times n$ es *ortogonal* si su transpuesta es su inversa:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^t.$$

En este caso,

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^t = \mathbf{A}^t\mathbf{A} = \mathbf{I}_n.$$

Por ejemplo, es fácil para comprobar que

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{5} & -1\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

es ortogonal. Simplemente multiplique esta matriz por su transpuesta para obtener $\mathbf{I}_3$.

Ya que $(\mathbf{A}^t)^t = \mathbf{A}$, una matriz es ortogonal exactamente cuando su transpuesta sea ortogonal.

También es fácil verificar que una matriz ortogonal debe tener determinante 1 o −1.

TEOREMA 16.7

Si **A** es ortogonal, entonces $|\mathbf{A}| = \pm 1$. ♦

Prueba Ya que una matriz y su traspuesta tienen el mismo determinante,

$$|\mathbf{I}_n| = 1 = |\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}\mathbf{A}^t| = |\mathbf{A}||\mathbf{A}^t| = |\mathbf{A}|^2. \ ♦$$

El nombre de "matriz ortogonal" se deriva de la siguiente propiedad.

TEOREMA 16.8

Sea **A** una matriz $n \times n$ de números reales. Entonces

1. **A** es ortogonal si y sólo los vectores de fila son vectores unitarios ortogonales en R^n.
2. **A** es ortogonal si y sólo si los vectores columna son vectores unitarios mutuamente ortogonales en R^n.

Decimos que los vectores de fila de una matriz ortogonal forman un conjunto ortonormal de vectores en R^n. Los vectores de columna también forman un conjunto ortonormal.

Prueba El elemento i, j de $\mathbf{AA}^t$ es el producto escalar de la fila i de **A** con la columna j de $\mathbf{A}^t$, y esto es el producto escalar de la fila i de **A** con la fila j de **A**.

Si $i = j$, entonces este producto escalar es cero, debido a que el elemento i, j– de $\mathbf{I}_n$ es cero. Y si $i = j$, entonces este producto vector es 1 porque el elemento i, i– de $\mathbf{I}_n$ es 1. Esto demuestra que, si **A** es una matriz ortogonal, entonces sus filas forman un conjunto ortonormal de vectores en R^n.

Por el contrario, supongamos que las filas son los vectores unitarios ortogonales en R^n. Entonces el elemento i, j de $\mathbf{AA}^t$ es 0 si $i \neq j$ y 1 si $i = j$, por lo que $\mathbf{AA}^t = \mathbf{I}_n$.

Mediante la aplicación de este argumento para $\mathbf{A}^t$, esta transposición es ortogonal si y sólo si sus filas son vectores unitarios ortogonales, y estas filas son las columnas de **A**.

Ahora sabemos mucho sobre matrices ortogonales. Usaremos esta información para determinar todas las matrices ortogonales 2×2 reales. Supongamos que

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

es ortogonal. ¿Qué nos dice esto acerca de a, b, c y d? Debido a que los vectores de filas (columnas) son vectores unitarios mutuamente ortogonales,

$$ac + bd = 0$$
$$ab + cd = 0$$
$$a^2 + b^2 = 1$$
$$c^2 + d^2 = 1.$$

Además, $|\mathbf{Q}| = \pm 1$, así que

$$ad - bc = 1 \text{ o } ad - bc = -1.$$

Mediante el análisis de estas ecuaciones en todos los casos, nos encontramos con que tiene que haber alguna θ en $[0, 2\pi)$ de tal manera que $a = \cos(\theta)$ y $b = \operatorname{sen}(\theta)$, y **Q** debe tener una de estas dos formas:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix},$$

dependiendo de si el determinante es 1 o −1. Por ejemplo, con $\theta = \pi/6$, se obtienen las matrices ortogonales 2×2

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

Si ponemos los Teoremas 16.4 y 16.8 en conjunto, se obtiene una conclusión interesante. Supongamos que S es una matriz simétrica real $n \times n$ con n eigenvalores distintos. Entonces los eigenvectores asociados son ortogonales. Estos pueden no ser vectores de la unidad. Sin embargo, un múltiplo escalar de un vector propio es todavía un vector propio. Divida cada vector propio por su longitud y utilice estos vectores propios unitarios como columnas de una matriz ortogonal **Q** que diagonaliza a **S**. Esto demuestra lo siguiente.

TEOREMA 16.9

Una matriz $n \times n$ simétrica real con eigenvalores distintos puede diagonalizarse por una matriz ortogonal.

EJEMPLO 16.13

Sea

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz real, simétrica tiene valores propios 2, −1, 4, con sus correspondientes vectores propios

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz que tenga estos vectores propios como columnas diagonalizará a **S**, pero no es una matriz ortogonal de vectores propios, porque estos no todos tienen longitud 1. Normalice el segundo y tercer vectore propio dividiéndolos por sus longitudes, y luego use estos vectores propios unitarios como columnas de una matriz ortogonal **Q**:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz ortogonal también diagonaliza a **S**.

16.3.2 Matrices unitarias

Vamos a utilizar el siguiente hecho. Si **W** es cualquier matriz, entonces las operaciones de tomar la transpuesta y el conjugado complejo se puede realizar en cualquier orden:

$$\overline{(\mathbf{W}^t)} = (\overline{\mathbf{W}})^t.$$

Esto se verifica mediante un cálculo de rutina.

También es sencillo verificar que las operaciones de tomar una inversa de la matriz, y de tomar su complejo conjugado, se pueden realizar en cualquier orden.

Ahora sea **U** una matriz $n \times n$ con elementos complejos.

Decimos que **U** es unitaria si el inverso es el conjugado de la transposición (que es el mismo que la transpuesta del conjugado):

$$\mathbf{U}^{-1} = \overline{\mathbf{U}}^t.$$

Esto significa que

$$(\overline{\mathbf{U}})^t\mathbf{U} = \mathbf{U}(\overline{\mathbf{U}})^t = \mathbf{I}_n.$$

EJEMPLO 16.14

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Es fácil comprobar que **U** es unitaria.

Si **U** es una matriz unitaria con elementos reales, entonces $\overline{\mathbf{U}} = \mathbf{U}$ y la condición de ser unitaria se convierte en $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^t$. Por lo tanto una matriz unitaria real es ortogonal. En este sentido las matrices unitarias son la extensión de matrices ortogonales para permitir que los elementos de la matriz sean complejos.

Puesto que las filas (y columnas) de una matriz ortogonal son vectores unitarios ortogonales entre sí, podríamos esperar que hubiera un análogo complejo de esta condición para matrices unitarias. Si $(x_1, \cdots, x_n)$ y $(y_1, \cdots, y_n)$ son vectores en R^n, podemos escribir

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ and } \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

y obtener el producto escalar $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$ como la matriz producto $\mathbf{X}^t\mathbf{Y}$, que es la matriz (o número) 1×1, $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$. En particular, el cuadrado de la longitud de **X** es

$$\mathbf{X}^t\mathbf{X} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

Para generalizar esto al caso complejo, supongamos que tenemos n vectores complejos $(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ y $(w_1, w_2, \cdots, w_n)$. Sea

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \text{ and } \mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

y defina el producto escalar $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{W}$ por

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{W} = \overline{\mathbf{Z}}^t\mathbf{W}.$$

Entonces

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{W} = \overline{z_1}w_1 + \overline{z_2}w_2 + \cdots + \overline{z_n}w_n.$$

De este modo

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z} = \overline{z_1}z_1 + \overline{z_2}z_2 + \cdots + \overline{z_n}z_n = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2,$$

un número real, de acuerdo con la interpretación del producto escalar de un vector consigo mismo como el cuadrado de la longitud. Con estos antecedentes, ahora definimos el complejo análogo de un conjunto ortonormal de vectores en R^n. Diremos que los vectores complejos n $\mathbf{F}_1, \cdots, \mathbf{F}_r$ forman un *sistema unitario* si $\mathbf{F}_j \cdot \mathbf{F}_k = 0$ si $j \neq k$, y cada $\mathbf{F}_j$ tiene longitud 1 (es decir, $\mathbf{F}_j \cdot \mathbf{F}_j = 1$).

Un sistema unitario es un set ortonormal de vectores cuando cada uno de los vectores tiene componentes reales. Con estos antecedentes, podemos afirmar la versión unitaria del Teorema 16.8.

TEOREMA 16.10

Una matriz compleja **U** es unitaria si y sólo sus vectores de fila (columna) forman un sistema unitario.

Afirmamos que los valores propios de una matriz unitaria deben tener magnitud 1.

TEOREMA 16.11

Sea λ un valor propio de una matriz unitaria **U**. Entonces $|\lambda| = 1$.

Esto significa que los valores propios de **U** se encuentran en la unidad de círculo sobre el origen en el plano complejo. Ya que una matriz ortogonal real también es unitaria, esto también es válido para las matrices ortogonales reales.

Prueba Sea λ un valor propio de **U** con vector propio **E**.Sabemos que **UE** = **E**. Entonces $\overline{\mathbf{U}}\overline{\mathbf{E}} = \lambda\overline{\mathbf{E}}$. Por lo tanto,

$$(\mathbf{UE})^t = \overline{\lambda}(\overline{\mathbf{E}})^t.$$

Entonces

$$(\overline{\mathbf{E}})^t(\overline{\mathbf{U}})^t = \overline{\lambda}(\overline{\mathbf{E}})^t.$$

Pero U es unitaria, entonces $\overline{\mathbf{U}}^t = \mathbf{U}^{-1}$. La última ecuación se convierte en

$$(\overline{\mathbf{E}})^t\mathbf{U}^{-1} = \overline{\lambda}(\overline{\mathbf{E}})^t.$$

Multiplique ambos lados de esta ecuación por la derecha por **UE**:

$$(\overline{\mathbf{E}})^t\mathbf{U}^{-1}\mathbf{UE} = \overline{\lambda}(\overline{\mathbf{E}})^t\mathbf{UE} = \overline{\lambda}(\overline{\mathbf{E}})^t\lambda\mathbf{E} = \overline{\lambda}\lambda\overline{\mathbf{E}}^t\mathbf{E}.$$

Ahora $\overline{\mathbf{E}}^t\mathbf{E}$ es el producto escalar de un vector propio con él mismo, y por lo tanto es un número positivo. Dividiendo la última ecuación por $\overline{\mathbf{E}}^t\mathbf{E}$ lleva a la conclusión de que $\overline{\lambda}\lambda = 1$. Entonces? $|\lambda|^2 = 1$, lo que demuestra el teorema.

16.3.3 Matrices hermitianas y hemi-hermitianas

Una matriz compleja **H** $n \times n$ es *hermitiana* si $\overline{\mathbf{H}} = \mathbf{H}^t$.

Es decir, una matriz es hermitiana si su conjugado es igual a su transpuesta. Si una matriz hermitiana tiene elementos reales, entonces debe ser simétrica, porque entonces la matriz es igual a su conjugado, que es igual a su transpuesta.

Una matriz compleja **S** $n \times n$ es *hemi-hermitiana* si $\overline{\mathbf{S}} = -\mathbf{S}^t$.

Por lo tanto, **S** es hemi-hermitiana si su conjugado es igual a la negativa de su transpuesta.

EJEMPLO 16.15

La matriz

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 15 & 8i & 6-2i \\ -8i & 0 & -4+i \\ 6+2i & -4-i & -3 \end{pmatrix}$$

Es hermitiana porque

$$\overline{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} 15 & -8i & 6+2i \\ 8i & 0 & -4-i \\ 6-2i & -4+i & -3 \end{pmatrix} = \mathbf{H}^t.$$

La matriz

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 8i & 2i \\ 8i & 0 & 4i \\ 2i & 4i & 0 \end{pmatrix}$$

es hemi-hermitiana porque

$$\overline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 0 & -8i & -2i \\ -8i & 0 & -4i \\ -2i & -4i & 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{S}^t. \ \blacklozenge$$

Queremos obtener un resultado acerca de los valores propios de matrices hermitianas y hemi-hermitianas o hermitianas sesgadas. Para esto necesitamos las siguientes conclusiones sobre el numerador de la expresión general para valores propios en el Lema 16.1.

LEMA 16.2

Sea

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

ser un complejo de n × 1 matriz. Entonces

1. Si **H** es hermitiana $n \times n$, entonces $\overline{\mathbf{Z}}^t\mathbf{HZ}$ es real.
2. Si **S** es hemi-hermitiana $n \times n$, entonces $\overline{\mathbf{Z}}^t\mathbf{HZ}$ es imaginario puro.

Prueba del Lema 16.2 Para la condición (1), supongamos **H** es hermitiana, por lo que $\overline{\mathbf{H}}^t = \mathbf{H}$. Entonces

$$\overline{(\overline{\mathbf{Z}}^t\mathbf{HZ})} = ((\overline{\overline{\mathbf{Z}}})^t)\overline{\mathbf{HZ}} = \mathbf{Z}^t\overline{\mathbf{HZ}}.$$

Pero $\overline{\mathbf{Z}}^t\mathbf{HZ}$ es una matriz 1 × 1 y así es igual a su propia transpuesta. Continuando desde la última ecuación, tenemos

$$\mathbf{Z}^t\overline{\mathbf{HZ}} = (\mathbf{Z}^t\overline{\mathbf{HZ}})^t = \overline{\mathbf{Z}}^t\overline{\mathbf{H}}^t(\mathbf{Z})^t = \overline{\mathbf{Z}}^t\mathbf{HZ}.$$

Esto demuestra que

$$\overline{(\overline{\mathbf{Z}}^t\mathbf{HZ})} = \overline{\mathbf{Z}}^t\mathbf{HZ}.$$

Ya que $\overline{\mathbf{Z}}^t\mathbf{HZ}$ es igual a su propio conjugado, esta cantidad es real.

Para probar la condición (2), supongamos que **S** es hemi-hermitiana, por lo que $\mathbf{S}^t = -\mathbf{S}$. Por un argumento como ese en la prueba de la condición (1), nos encontramos con que

$$\overline{(\overline{\mathbf{Z}}^t\mathbf{SZ})} = -\overline{\mathbf{Z}}^t\mathbf{SZ}$$

Si escribimos $\overline{\mathbf{Z}}^t\mathbf{SZ} = a + ib$, entonces, la última ecuación significa que

$$a - ib = -a - ib.$$

Pero entonces $a = -a$ así $a = 0$ y $\overline{\mathbf{Z}}^t\mathbf{SZ}$ es imaginario puro. Esto incluye la posibilidad de un eigenvalor cero.

Este lema absorbe la mayor parte del trabajo que necesitamos para el siguiente resultado, que nos da información acerca de los valores propios.

TEOREMA 16.12

1. Los valores propios de una matriz hermitiana son reales.
2. Los valores propios de una matriz hemi-hermitiana son imaginarios puros.

Prueba Por el lema 16.1, un valor propio λ de cualquier matriz **A** $n \times n$, con eigenvector correspondiente **E**, satisface

$$\lambda = \frac{\overline{\mathbf{E}}^t \mathbf{A}\mathbf{E}}{\overline{\mathbf{E}}^t \mathbf{E}}.$$

Sabemos que el denominador de este cociente es un número positivo. Ahora use el Lema 16.2. Si **A** es hermitiana, el numerador es real, por lo que λ es real. Si **A** es hemi-hermitiana entonces el numerador es imaginario puro, y λ es imaginario puro.

La figura 16.2 muestra una representación gráfica de estas conclusiones acerca de eigenvalores de las matrices. Cuando se trazan como puntos en el plano complejo, los valores propios de una matriz unitaria (u ortogonal) caen en el círculo unitario sobre el origen, los valores propios de una matriz hermitiana caen sobre el eje horizontal (real), y los valores propios de una matriz hemi-hermitiana están en el eje vertical (imaginario).

16.3.4 Formas cuadráticas

Una *forma cuadrática* es una expresión

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\overline{z_j}z_k$$

en la que los a_{jk} y los z_j son números complejos. Si estas cantidades son reales, decimos que tenemos una *forma cuadrática real*.

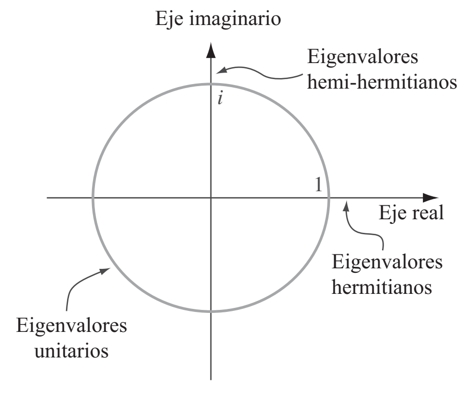


Figura 16.2 Eigenvalores de matrices unitarias hermitianas y hemi-hermitianas.

Para $n = 2$, la forma cuadrática es

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} a_{jk}\overline{z_j}z_k = a_{11}\overline{z_1}z_1 + a_{12}\overline{z_1}z_2 + a_{21}z_1\overline{z_2} + a_{22}z_2\overline{z_2}.$$

Los dos términos medios se llaman *términos de productos mixtos*, involucran a z_j y a z_k con $j \neq k$.

Si la forma cuadrática es real, entonces todos los números involucrados son reales. En este caso los conjugados no juegan ningún papel y esta forma cuadrática se puede escribir

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} a_{jk}x_j x_k = a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2x_2$$

$$= a_1x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Como hemos visto anteriormente (en la discusión que precede inmediatamente al Lema 16.1), podemos dejar $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ y escribir la forma cuadrática complejo como $\overline{\mathbf{Z}}^t\mathbf{AZ}$, donde

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Si todas las cantidades son reales, escribimos generalmente esto como $\mathbf{X}^t\mathbf{AX}$. De hecho, cualquier forma cuadrática real puede ser escrita de esta manera, con $\mathbf{A}$ como una matriz simétrica real. Vamos a ilustrar este proceso.

EJEMPLO 16.16

Considere la forma cuadrática real

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_2x_1 + 2x_2^2$$

$$= x_1^2 + 7x_1x_2 + 2x_2^2.$$

Podemos escribir la misma forma cuadrática como

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 7/2 \\ 7/2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 7x_1x_2 + 2x_2^2$$

en la que $\mathbf{A}$ es una matriz simétrica.

Esto es importante en el desarrollo de un cambio de variables estándar que se utilizan para simplificar las formas cuadráticas mediante la eliminación de términos de productos cruzados.

TEOREMA 16.13 *Teorema del eje principal*

Sea A una matriz simétrica real con valores propios distintos $\lambda_1, \cdots \lambda_n$.
Entonces hay una matriz ortogonal $\mathbf{Q}$ tal que el cambio de variables $\mathbf{X} = \mathbf{QY}$ transforma la forma cuadrática $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ en

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2.$$

Prueba Sea **Q** una matriz ortogonal que diagonaliza a **A**. Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}x_i x_j &= \mathbf{X}^t\mathbf{AX}\\ &= (\mathbf{QY})^t\mathbf{AQY} = (\mathbf{Y}^t\mathbf{Q}^t)\mathbf{AQY}\\ &= \mathbf{Y}^t(\mathbf{Q}^t\mathbf{AQ})\mathbf{Y}\\ &= \mathbf{Y}^t(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ})\mathbf{Y}\\ &= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2. \ \blacklozenge\end{aligned}$$

La expresión $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j^2$ se denomina la forma estándar de $\mathbf{X}^t\mathbf{AX}$.

EJEMPLO 16.17

Considere la forma cuadrática

$$x_1^2 - 7x_1x_2 + x_2^2.$$

Esto es $\mathbf{X}^t\mathbf{AX}$ donde

$$\begin{pmatrix} 1 & -7/2\\ -7/2 & 1\end{pmatrix}.$$

En general, la forma cuadrática real

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$$

siempre se puede escribir como $\mathbf{X}^t\mathbf{AX}$, con **A** como la matriz simétrica real

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b/2\\ b/2 & c\end{pmatrix}.$$

En este ejemplo, los valores propios de **A** son −5/2, 9/2 con vectores propios correspondientes

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

Divida cada vector propio por su longitud para obtener columnas de una matriz ortogonal **Q** que diagonalizce a **A**:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

El cambio de variables **X** = **QY** es equivalente a la configuración

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - y_2)$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2).$$

Esto transforma la forma cuadrática dada a su forma estándar

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = -\frac{5}{2}y_1^2 + \frac{9}{2}y_2^2,$$

en la que no existen términos producto cruzados $y_2 y_2$.

SECCIÓN 16.3 PROBLEMAS

En cada uno de los problemas 1 al 12, encuentre los valores propios y vectores propios asociados. Compruebe que los vectores propios asociados con valores propios distintos son ortogonales. Encuentre una matriz ortogonal que diagonalice a la matriz. Recuerde los Problemas 17-22, sección 16.1.

1. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -13 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En cada uno de los problemas 13 a 21, determine si la matriz es unitaria, hermitiana, hemi-hermitiana, o ninguna de estas. Encuentre los valores propios y los vectores propios asociados. Si la matriz es diagonalizable, escriba una matriz que la diagonalice. En los problemas 5 y 7, los valores propios deben ser aproximados, por lo que sólo "vectores propios aproximados" pueden ser encontrados. Es instructivo tratar de diagonalizar una matriz utilizando vectores propios aproximados.

13. $\begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 2i & 4 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 3 & 4i \\ 4i & -5 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1-i \\ 0 & -1-i & 0 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3-i \\ 0 & 1 & 0 \\ 3+i & 0 & 0 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2i \\ 0 & 2i & 0 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 3i & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 8 & -1 & i \\ -1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En cada uno de los problemas 22 al 28, determine una matriz **A** de manera que la forma cuadrática sea **X***ᵗ***AX**, y encontrar la forma estándar de la forma cuadrática.

22. $-5x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$
23. $4x_1^2 - 12x_1x_2 + x_2^2$
24. $-3x_1^2 + 4x_1x_2 + 7x_2^2$
25. $4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$
26. $-6x_1x_2 + 4x_2^2$
27. $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$
28. $-2x_1x_2 + 2x_2^2$
29. Suponga que **A** es hermitiana. Demuestre que

$$\overline{(\mathbf{A}\mathbf{A}^t)} = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{A}.$$

30. Demuestre que los principales elementos de la diagonal de una matriz hermitiana son reales.
31. Pruebe que cada elemento principal de la diagonal de una matriz hemi-hermitiana es cero o imaginario puro.
32. Demuestre que el producto de dos matrices unitarias es unitario.

Respuestas y soluciones a problemas seleccionados

CAPÍTULO 1

Sección 1.1

1. $\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{1}{s+1}$ **3.** $\dfrac{16s}{(s^2+4)^2}$ **5.** $\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{s}{s^2+25}$ **7.** $\dfrac{2}{s^3}+\dfrac{8}{s^2}+\dfrac{16}{s}$ **9.** $\dfrac{6}{s^4}-\dfrac{3}{s^2}+\dfrac{s}{s^2+16}$ **11.** $-2e^{-16t}$

13. $2\cos(4t)-\frac{5}{4}\operatorname{sen}(4t)$ **15.** $3e^{7t}+t$ **17.** $e^{4t}-6te^{4t}$ **23.** $\dfrac{5}{s(1+e^{-3s})}$

25. De la gráfica, $f(t)=0$ si $0<t\le 5$ y $f(t)=5$ si $5<t\le 10$ y $f(t)=0$ si $10<t\le 25$. Más aún, $f(t+25)=f(t)$, así que f es periódica de período $T=25$. Por tanto $\pounds[f](s)=\dfrac{5e^{-5s}(1-e^{-5s})}{s(1-e^{-25s})}$.

27. $\dfrac{E\omega}{s^2+\omega^2}\dfrac{1}{1-e^{-\pi s/\omega}}$ **29.** $f(t)=h$ si $0<t\le a$ y $f(t)=0$ si $a<t\le 2a$. Más aún, $f(t+2a)=f(t)$, así que f es periódica de período $2a$, y $L[f](s)=\dfrac{h}{s(1+e^{-as})}$.

Sección 1.2

1. $y=\frac{1}{4}-\frac{13}{4}e^{-4t}$ **3.** $y=-\frac{4}{17}e^{-4t}+\frac{4}{17}\cos(t)+\frac{1}{17}\operatorname{sen}(t)$ **5.** $y=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}t+\frac{17}{4}e^{2t}$

7. $y=\frac{22}{25}e^{2t}-\frac{13}{5}te^{2t}+\frac{3}{25}\cos(t)-\frac{4}{25}\operatorname{sen}(t)$ **9.** $y=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}t-\frac{33}{16}\cos(4t)+\frac{15}{64}\operatorname{sen}(4t)$

Sección 1.3

1. $\dfrac{6}{(s+2)^4}-\dfrac{3}{(s+2)^2}+\dfrac{2}{s+2}$ **3.** $\dfrac{1}{s}(1-e^{-7s})+\dfrac{s}{s^2+1}\cos(7)e^{-7s}-\dfrac{1}{s^2+1}\operatorname{sen}(7)e^{-7s}$

5. $\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{11}{s}e^{-3s}-\dfrac{4}{s^2}e^{-3s}$ **7.** $\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{2}{(s+1)^3}+\dfrac{1}{(s+1)^2+1}$ **9.** $\dfrac{s}{s^2+1}+\left(\dfrac{2}{s}-\dfrac{s}{s^2+1}-\dfrac{1}{s^2+1}\right)e^{-2\pi s}$

11. $\dfrac{s^2+4s-5}{(s^2+4s+13)^2}$ **13.** $\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{2}{s}-\left(\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{15}{s}\right)e^{-16s}$ **15.** $\dfrac{24}{(s+5)^5}+\dfrac{4}{(s+5)^3}+\dfrac{1}{(s+5)^2}$ **17.** $e^{2t}\operatorname{sen}(t)$

19. $\cos(3(t-2))H(t-2)$ **21.** $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-3t}\operatorname{senh}(\sqrt{2}t)$ **23.** $e^{-3t}\cosh(2\sqrt{2}t)-\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-3t}\operatorname{senh}(2\sqrt{2}t)$

25. $\frac{1}{16}[1-\cos(4(t-21))]H(t-21)$ **27.** $y=\cos(2t)+\frac{3}{4}[1-\cos(2(t-4))]H(t-4)$

29. $y=[-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}e^{2(t-6)}+\frac{1}{6}e^{-(t-6)}\cos(\sqrt{3}(t-4))]H(t-6)$

31. $y=-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}e^{t}-\frac{3}{20}\cos(2t)-\frac{1}{5}\operatorname{sen}(2t)+[-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}e^{t-5}+\frac{3}{20}\cos(2(t-5))-\frac{1}{5}\operatorname{sen}(2(t-5))]H(t-5)$

33. $E_{\text{out}}=5e^{-4t}+10[(1-e^{-4(t-5)})H(t-5)]$ **35.** $i(t)=\dfrac{k}{R}(1-e^{-Rt/L})-\dfrac{k}{R}(1-e^{-R(t-5)/L})H(t-5)$

37. $\pounds\,[KH(t-a)-KH(t-b)](s)=\dfrac{K}{s}e^{-as}-\dfrac{K}{s}e^{-bs}$

39. $$\pounds\left[h\left(\frac{t-a}{b-a}\right)H(t-a)+h\left(\frac{c-t}{c-b}-\frac{t-a}{b-a}\right)H(t-b)-h\left(\frac{c-t}{c-b}\right)H(t-c)\right]$$
$$=\frac{h}{b-a}\frac{e^{-as}}{s^2}-\frac{h(c-a)}{(c-b)(b-a)}\frac{e^{-bs}}{s^2}+\frac{h}{c-b}\frac{e^{-cs}}{s^2}$$

Sección 1.4

1. $\frac{1}{16}[\operatorname{senh}(2t)-\operatorname{sen}(2t)]$ **3.** $\dfrac{\cos(at)-\cos(bt)}{(b-a)(b+a)}$ si $b^2\neq a^2$; $\dfrac{t\operatorname{sen}(at)}{2a}$ si $b^2=a^2$

5. $\frac{1}{a^4}[1-\cos(at)] - \frac{1}{2a^3} t \operatorname{sen}(at)$ **7.** $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2(t-4)}\right) H(t-4)$ **9.** $y(t) = e^{3t} * f(t) - e^{2t} * f(t)$
11. $y(t) = \frac{1}{4}e^{6t} * f(t) - \frac{1}{4}e^{2t} * f(t) + 2e^{6t} - 5e^{2t}$ **13.** $y(t) = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3t) * f(t) - \cos(3t) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3t)$
15. $y(t) = \frac{4}{3}e^{t} - \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{12}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{t} * f(t) + \frac{1}{4}e^{2t} * f(t) + \frac{1}{12}e^{-2t} * f(t)$ **17.** $f(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{3}{2}$
19. $f(t) = \cosh(t)$ **21.** $f(t) = 3 + \frac{2}{5}\sqrt{15}e^{t/2}\operatorname{sen}(\sqrt{15}t/2)$ **23.** $f(t) = \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{3}{4}e^{-6t}$

Sección 1.5

1. $y = 3[e^{-2(t-2)} - e^{-3(t-2)}]H(t-2) - 4[e^{-2(t-5)} - e^{-3(t-5)}]H(t-5)$ **3.** $y = 6(e^{-2t} - e^{-t} + te^{-t})$
5. $\varphi(t) = (B+9)e^{-2t} - (B+6)e^{-3t}$; $\varphi(0) = 3$, $\varphi'(0) = B$ **7.** $3/\pi$ **9.** 4
11. $E_{\text{out}} = 10e^{-4(t-2)}H(t-2) - 10e^{-4(t-3)}H(t-3)$ **13.** 0 si $t < a$; $f(t-a)$ si $t \geq a$
15. $y(t) = \sqrt{\frac{m}{k}}\, v_0 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$

Sección 1.6

1. $x(t) = -2 + 2e^{t/2} - t$, $y(t) = -1 + e^{t/2} - t$ **3.** $x(t) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3}t - \frac{4}{9}e^{3t/4}$, $y(t) = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{3t/4}$
5. $x(t) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}e^{2t/3} + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t$, $y(t) = -\frac{3}{2}e^{2t/3} + t + \frac{3}{2}$ **7.** $x(t) = e^{-t}\cos(t) + t - 1$, $y(t) = e^{-t}\operatorname{sen}(t) + t^2 - t$
9. $x(t) = 1 - e^{-t} - 2te^{-t}$, $y(t) = 1 - e^{-t}$
11. $y_1(t) = \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t} - 1 - t$, $y_2(t) = -\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t$, $y_3(t) = -\frac{1}{6}e^{t} + \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{3}t$
13. $i_1(t) = \frac{1}{5}(1 - \frac{1}{2}e^{-t/2}) - \frac{2}{85}[e^{-(t-4)/2} - \cos(2(t-4)) + \frac{9}{2}\operatorname{sen}(2(t-4))]H(t-4)$, y
$i_2(t) = \frac{1}{10}e^{-t/2} + \frac{2}{85}[e^{-(t-4)/2} - \cos(2(t-4)) - 4\operatorname{sen}(2(t-4))]H(t-4)$
15. $x_1(t) = \frac{5}{36} - \frac{1}{20}\cos(2t) - \frac{4}{45}\cos(3t) - \left[\frac{5}{36} - \frac{1}{20}\cos(2(t-2)) - \frac{4}{45}\cos(3(t-2))\right]H(t-2)$, y
$x_2(t) = \frac{1}{18} - \frac{1}{10}\cos(2t) + \frac{2}{45}\cos(3t) - \left[\frac{1}{18} - \frac{1}{10}\cos(2(t-2)) + \frac{2}{45}\cos(3(t-2))\right]H(t-2)$
17. $m_1y_1'' = k(y_2 - y_1)$, $m_2y_2'' = -k(y_2 - y_1)$; $y_1(0) = y_1'(0) = y_2'(0) = 0$; $y_2(0) = d$. Entonces $(m_1s^2 + k)Y_1 - kY_2 = 0$ y $(m_2s^2 + k)Y_2 - kY_1 = m_2ds$. Remplazar Y_2 con $\frac{m_1s^2+k}{k}Y_1$ en la segunda ecuación para obtener
$Y_1(s) = \frac{kd}{m_1s[s^2 + k((m_1+m_2)/m_1m_2)]}$. El término cuadrático en el denominador indica que los objetos van a oscilar con período $2\pi\sqrt{\frac{m_1m_2}{k(m_1+m_2)}}$.
19. $i_1 = \left[\frac{1}{10}e^{-(t-1)} + \frac{3}{20}e^{-(t-1)/6}\right]H(t-1)$, $i_2 = \left[-\frac{1}{10}e^{-(t-1)} + \frac{1}{10}e^{-(t-1)/6}\right]H(t-1)$
21. $x_1(t) = 9e^{-t/100} + e^{-3t/50} + 3[e^{-(t-3)/100} - e^{-3(t-3)/50}]H(t-3)$;
$x_2(t) = 6e^{-t/100} - e^{-3t/50} + [2e^{-(t-3)/100} + 3e^{-3(t-3)/50}]H(t-3)$

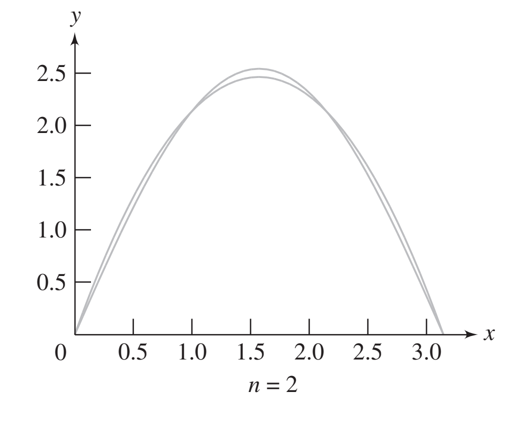
Sección 1.7

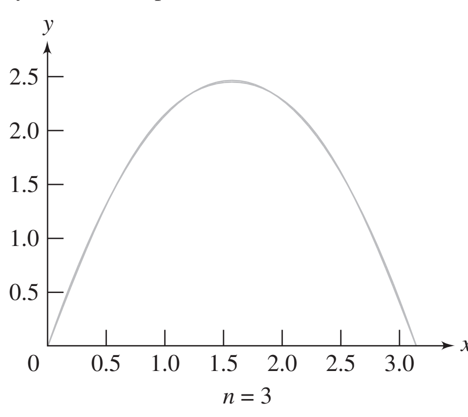
1. $y = -1 + ce^{-2/t}$ **3.** $y = 7t^2$ **5.** $y = ct^2e^{-t}$ **7.** $y = 4$ **9.** $y = 3t^2/2$

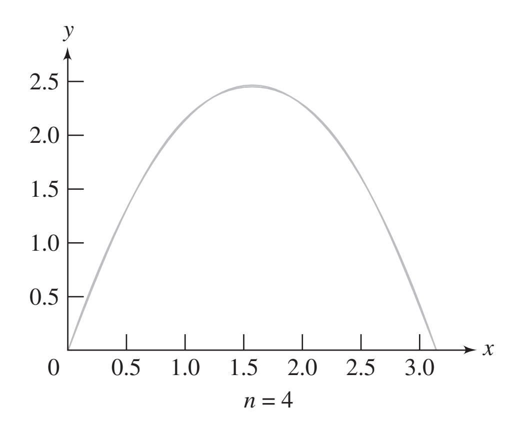
CAPÍTULO 2

Sección 2.1

1. A continuación se muestran las gráficas de la segunda, tercera y cuarta suma parcial.







Sección 2.2

1. 4 **3.** $\dfrac{1}{\pi}\operatorname{senh}(\pi)+\dfrac{2}{\pi}\operatorname{senh}(\pi)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}\cos(n\pi x)$ **5.** $\dfrac{16}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\operatorname{sen}((2n-1)x)$

7. $\dfrac{13}{3}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\dfrac{16}{n^2\pi^2}\cos\left(\dfrac{n\pi x}{2}\right)+\dfrac{4}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi x}{2}\right)\right]$ **9.** $\dfrac{3}{2}+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\operatorname{sen}((2n-1)x)$

11. $\dfrac{1}{3}\operatorname{sen}(3)+6\operatorname{sen}(3)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2\pi^2-9}\cos\left(\dfrac{n\pi x}{3}\right)$ **13.** Los coeficientes de Fourier de f y de g son los mismos.

Sección 2.3

1. La serie de Fourier es $\dfrac{11}{18}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{1}{n\pi}\left[4\operatorname{sen}\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)-\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)\right]+\dfrac{6}{n^2\pi^2}\left[\cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)-\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)+2(-1)^n\right]+\right.$ $\left.\dfrac{18}{n^3\pi^3}\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)\right\}\cos\left(\dfrac{n\pi x}{3}\right)+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{1}{n\pi}\left[4\cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)+\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)-15(-1)^n\right]-\dfrac{6}{n^2\pi^2}\left[\operatorname{sen}\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)+\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)\right]\right.$ $\left.-\dfrac{18}{n^3\pi^3}\left[\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)-(-1)^n\right]\right\}\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi x}{3}\right)$; esto converge a $\frac{3}{2}$ si $x=3$ o si $x=-3$, a $2x$ si $-3<x<-2$, a -2 si $x=-2$, a 0 si $-2<x<1$, a $\frac{1}{2}$ si $x=1$, y a x^2 si $1<x<3$.

3. Sea $\alpha_n=n\pi/3$. La serie de Fourier es $\dfrac{11}{3}\operatorname{senh}(3)-2\cosh(3)+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{\operatorname{senh}(3)\left[\dfrac{1}{1+\alpha_n^2}+\dfrac{4(1-3\alpha_n^2)}{3(1+\alpha_n^2)^3}\right]+\right.$ $\left.\dfrac{4(\alpha_n^2-1)\cosh(3)}{(1+\alpha_n^2)^2}\right\}\cos(\alpha_n x)+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{\operatorname{senh}(3)\left[\dfrac{6\alpha_n}{1+\alpha_n^2}+\dfrac{4\alpha_n(\alpha_n^2-3)}{3(1+\alpha_n^2)^2}\right]-\dfrac{8\alpha_n\cosh(3)}{(1+\alpha_n^2)^2}\right\}\operatorname{sen}(\alpha_n x)$; esto converge a $18\cosh(3)$ si $x=-3$ o $x=3$ y a x^2e^{-x} si $-3<x<3$.

5. $\dfrac{6+\pi^2}{6}+2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)+\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{2}{n}\right)(1-(-1)^n)+\dfrac{\pi^2}{n}(-1)^n\right]\operatorname{sen}(nx)$; esto converge a $\frac{1}{2}(\pi^2+2)$ para $x=\pi$ o $x=-\pi$, a x^2 si $-\pi<x<0$, a 1 si $x=0$ y a 2 si $0<x<\pi$.

7. $\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\operatorname{sen}\left(\dfrac{(2n-1)\pi x}{4}\right)$; converge a -1 si $-4<x<0$, a 0 si $x=-4$, 0 o 4, y a 1 si $0<x<4$.

9. $\dfrac{1-e^{-\pi}}{\pi}+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^ne^{-\pi}}{n^2+1}\cos(nx)$; converge a $e^{-|x|}$ para $-\pi\le x\le\pi$.

12. $-\pi^2/12$

Sección 2.4

1. Serie en cosenos: 4 (esta función es su propio desarrollo de Fourier en cosenos), que converge a 4 para $0\le x\le 3$; serie en senos: $\dfrac{16}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\operatorname{sen}\left(\dfrac{(2n-1)\pi x}{3}\right)$, que converge a 0 si $x=0$ o $x=3$ y a 4 para $0<x<3$

3. Serie en cosenos: $\frac{1}{2}\cos(x)-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{(2n-3)(2n+1)}\cos\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)$, que converge a 0 si $0\le x<\pi$ o $x=2\pi$, a $-\frac{1}{2}$ si $x=\pi$, y a $\cos(x)$ si $\pi<x<2\pi$; serie en senos: $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{(2n-3)(2n+1)}\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n-1}\operatorname{sen}(nx)$, que converge a 0 si $0\le x<\pi$ o $x=2\pi$, a $-\frac{1}{2}$ si $x=\pi$, y a $\cos(x)$ si $\pi<x<2\pi$

5. Serie en cosenos: $\frac{4}{3}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$, que converge a x^2 para $0\le x\le 2$; serie en senos: $-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{2(1-(-1)^n)}{n^3\pi^2}\right]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$, que converge a x^2 para $0\le x<2$ y a 0 para $x=2$

7. Serie en cosenos: $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{3}\right)+\frac{12}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)-\frac{6}{n^2\pi^2}(1+(-1)^n)\right]\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$, que converge a x si $0\le x\le 2$, a 1 si $x=2$, y a $2-x$ si $2<x\le 3$; serie en senos: $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{12}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{3}\right)-\frac{4}{n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)+\frac{2}{n\pi}(-1)^n\right]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$, que converge a x si $0\le x<2$, a 1 si $x=2$, a $2-x$ si $2<x<3$, y a 0 si $x=3$

9. Serie en cosenos: $\frac{5}{6}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)-\frac{4}{n^3\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right]\cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right)$, que converge a x^2 si $0\le x\le 1$, y a 1 si $1<x\le 4$; serie en senos: $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{16}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)+\frac{64}{n^3\pi^3}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)-1\right)-\frac{2(-1)^n}{n\pi}\right]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right)$, que converge a x^2 si $0\le x\le 1$, a 1 si $1<x\le 4$ y a 0 si $x=4$

11. Sean $g(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$ y $h(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$. Entonces g es par y h es impar y $f(x)=g(x)+h(x)$.

13. $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$

Sección 2.5

3. (a) La serie de Fourier de f en $[-\pi,\pi]$ es $\frac{1}{4}\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos(nx)+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}(nx)\right]$. Esta serie converge a 0 para $-\pi<x<0$, a x para $0<x<\pi$, y a $\frac{1}{2}(f(0+)+f(0-))$, o 0, en $x=0$.
(b) f es continua, por tanto, continua a pedazos en $[-\pi,\pi]$. Por el teorema 2.5, su serie de Fourier puede integrarse término a término para llegar a la integral de la suma de la serie de Fourier.
(c) Primero, $\int_{-\pi}^{x}f(t)\,dt=\begin{cases}0 & \text{si } -\pi\le x\le 0\\ \frac{1}{2}x^2 & \text{si } 0<x\le\pi\end{cases}$.
Esta función está representada por la serie obtenida al integrar la serie de Fourier de $-\pi$ a x para obtener: $\frac{1}{4}x\pi+\frac{1}{4}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx)+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{1}{n}\left(-\cos(nx)+(-1)^n\right)\right]$.

5. (a) Para $-\pi\le x\le\pi$, $x\operatorname{sen}(x)=\pi-\frac{1}{2}\pi\cos(x)+2\pi\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos(nx)$.
(b) f es continua con primera y segunda derivadas continuas en $[-\pi,\pi]$ y $f(-\pi)=f(\pi)$. El teorema 2.6 nos da $x\cos(x)+\operatorname{sen}(x)=\frac{1}{2}\pi\operatorname{sen}(x)+2\pi\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}n\operatorname{sen}(nx)$ para $-\pi<x<\pi$.
(c) La serie de Fourier de $x\cos(x)+\operatorname{sen}(x)$ en $[-\pi,\pi]$ es $\frac{1}{2}\pi\operatorname{sen}(x)+\sum_{n=2}^{\infty}2n(-1)^n\pi\frac{1}{n^2-1}\operatorname{sen}(nx)$.

Sección 2.6

3. *Sugerencia:* Escriba la definición de $f'(x+p)$ y use la periodicidad de f.

5. $1-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\left(n\pi x-\frac{\pi}{2}\right)$

7. $16+\frac{48}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sqrt{1+n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}+\tan^{-1}(n\pi)\right)$

9. $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\cos\left(2n\pi x-\frac{\pi}{2}\right)$

11. $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\left(n\pi x+\frac{\pi}{2}(-1)^n\right)$

13. $\frac{3}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}+\frac{\pi}{2}(1-(-1)^n)\right)$

15. $i(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{120(-1)^{n+1}(10-n^2)\pi}{n^2[100n^2+(10-n^2)^2]}\cos(nt)+\frac{1200(-1)^{n+1}\pi}{n[100n^2+(10-n^2)^2]}\operatorname{sen}(nt)$

Sección 2.7

1. $3+\frac{3i}{\pi}\sum_{n=-\infty,n\neq0}^{\infty}\frac{1}{n}e^{2n\pi ix/3}$ **3.** $\frac{3}{4}-\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty,n\neq0}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)+i\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-1\right)\right]e^{n\pi ix/2}$

5. $\frac{1}{2}+\frac{3i}{\pi}\sum_{n=-\infty,n\neq0}^{\infty}\frac{1}{2n-1}e^{(2n-1)\pi ix/2}$ **7.** $\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=-\infty,n\neq0}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}e^{(2n-1)\pi ix}$

9. $f(x)=\frac{5}{3}+\frac{5}{\pi}\sum_{n=-\infty,n\neq0}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right)e^{n\pi ix/6}$ y $g(x)=\frac{5}{3}+\frac{5i}{\pi}\sum_{n=-\infty,n\neq0}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{\left[\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)-1\right]\right.$ $\left.-\,i\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right\}e^{n\pi ix/6}$. f y g tiene la misma frecuencia espectral pero diferente fase espectral.

CAPÍTULO 3

Sección 3.1

1. $\int_0^{\infty}\left[\frac{2\operatorname{sen}(\pi\omega)}{\pi\omega^2}-\frac{2\cos(\pi\omega)}{\omega}\right]\operatorname{sen}(\omega x)\,d\omega$, que converge a $-\frac{\pi}{2}$ si $x=-\pi$, a x para $-\pi<x<\pi$, a $\frac{\pi}{2}$ si $x=\pi$ y a 0 si $|x|>\pi$.

3. $\int_0^{\infty}\left(\frac{2}{\pi\omega}(1-\cos(\pi\omega))\right)\operatorname{sen}(\omega x)\,d\omega$, que converge a $-\frac{1}{2}$ si $x=-\pi$, a -1 si $-\pi<x<0$, a $x=0$ si $x=0$, a 1 si $0<x<\pi$, a $\frac{1}{2}$ si $x=\pi$, y a 0 si $|x|>\pi$.

5. $\int_0^{\infty}\frac{1}{\pi\omega^3}[400\omega\cos(100\omega)+(20\,000\omega^2-4)\operatorname{sen}(100\omega)]\cos(\omega x)\,d\omega$, que converge a x^2 si $-100<x<100$, a 5000 si $x=\pm100$ y a 0 si $|x|>100$.

7. $\int_0^{\infty}\frac{2}{\pi(\omega^2-1)}[-\operatorname{sen}(\pi\omega)\operatorname{sen}(2\pi\omega)\cos(\omega x)-\cos(\pi\omega)\operatorname{sen}(2\pi\omega)\operatorname{sen}(\omega x)]\,d\omega$, que converge a $\operatorname{sen}(x)$ si $-3\pi\leq x\leq\pi$ y a 0 si $x<-3\pi$ or $x>\pi$.

9. $\int_0^{\infty}\frac{2}{\pi(1+\omega^2)}\cos(\omega x)\,d\omega$, que converge a $e^{-|x|}$ para todo real x.

Sección 3.2

1. Integral en senos: $\int_0^{\infty}\frac{4}{\pi\omega^3}[10\omega\operatorname{sen}(10\omega)-(50\omega^2-1)\cos(10\omega)-1]\operatorname{sen}(\omega x)\,d\omega$;
integral en cosenos: $\int_0^{\infty}\frac{4}{\pi\omega^3}[10\omega\cos(10\omega)-(50\omega^2-1)\operatorname{sen}(10\omega)]\cos(\omega x)\,d\omega$; ambas integrales convergen a x^2 para $0\leq x<10$, a 50 si $x=10$, y a 0 para $x>10$.

3. Integral en senos: $\int_0^{\infty}\frac{2}{\pi\omega}[1+\cos(\omega)-2\cos(4\omega)]\operatorname{sen}(\omega x)\,d\omega$; integral en cosenos: $\int_0^{\infty}\frac{2}{\pi\omega}[2\operatorname{sen}(4\omega)-\operatorname{sen}(\omega)]\cos(\omega x)\,d\omega$; ambas integrales convergen a 1 para $0<x<1$, a $\frac{3}{2}$ para $x=1$, a 2 para $1<x<4$, a 1 para $x=4$, y a 0 para $x>4$. La integral en cosenos converge a 1 en $x=0$, mientras la integral en senos converge a 0 en $x=0$.

5. Integral en senos: $\int_0^{\infty}\left\{\frac{2}{\pi\omega}[1+(1-2\pi)\cos(\pi\omega)-2\cos(3\pi\omega)]+\frac{4}{\pi\omega^2}\operatorname{sen}(\pi\omega)]\right\}\operatorname{sen}(\omega x)\,d\omega$; integral en cosenos: $\int_0^{\infty}\left\{\frac{2}{\pi\omega}[(2\pi-1)\operatorname{sen}(\pi\omega)+2\operatorname{sen}(3\pi\omega)]+\frac{4}{\pi\omega^2}[\cos(\pi\omega)-1]\right\}\cos(\omega x)\,d\omega$; ambas integrales convergen a $1+2x$ para $0<x<\pi$, to $\frac{1}{2}(3+2\pi)$ para $x=\pi$, a 2 para $\pi<x<3\pi$, a 1 para $x=3\pi$, y a 0 para $x>3\pi$. La integral en senos converge a 0 para $x=0$, mientras la integral en cosenos converge a 1 para $x=0$.

7. Integral en senos: $\int_0^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\frac{\omega^3}{4+\omega^4}\right)\operatorname{sen}(\omega x)\,d\omega$; integral en cosenos: $\int_0^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\frac{2+\omega^2}{4+\omega^4}\right)\cos(\omega x)\,d\omega$; ambas integrales convergen a $e^{-x}\cos(x)$ para $x>0$. La integral en cosenos converge a 1 para $x=0$, y la integral en senos converge a 0 para $x=0$.

9. integral en senos: $\int_0^\infty \frac{2k}{\pi\omega}[1-\cos(c\omega)]\operatorname{sen}(\omega x)\,d\omega$; integral en cosenos: $\int_0^\infty \frac{2k}{\pi\omega}\operatorname{sen}(c\omega)\cos(\omega x)\,d\omega$; ambas integrales convergen a k para $0 < x < c$, a $\frac{1}{2}k$ para $x = c$, y a 0 para $x > c$. La integral en cosenos converge a k para $x = 0$, y la integral en senos a 0 para $x = 0$.

11. Para todo x, $\int_0^\infty e^{-\omega}\cos(\omega x)\,d\omega = \frac{1}{1+x^2}$ y $\int_0^\infty e^{-\omega}\operatorname{sen}(\omega x)\,d\omega = \frac{x}{1+x^2}$.

Sección 3.3

1. $\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(-2\omega\frac{\left(1-\omega^2\right)^2}{\left((1-\omega^2)^2+4\omega^2\right)^2} - 8\frac{\omega^3}{\left((1-\omega^2)^2+4\omega^2\right)^2}\right)e^{i\omega x}\,d\omega$; que converge a $xe^{-|x|}$ para todo real x.

3. $i\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}(5\omega)}{\omega^2-\pi^2}\right)e^{i\omega x}\,d\omega$; que converge a $\operatorname{sen}(\pi x)$ para $-5 < x < 5$, y a 0 para $|x| \geq 5$.

5. $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[-e^{-1}\frac{\omega}{\omega^2+1}\operatorname{sen}(\omega) + e^{-1}\frac{1}{\omega^2+1}\cos(\omega) + \frac{i}{\omega^2}[\omega\cos(\omega) - \operatorname{sen}(\omega)]\right]e^{i\omega x}\,d\omega$; que converge a x para $-1 < x < 1$, a $\frac{1}{2}(1+e^{-1})$ para $x = 1$, a $\frac{1}{2}(-1+e^{-1})$ para $x = -1$, y a $e^{-|x|}$ para $|x| > 1$.

7. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[-\frac{\cos(\pi\omega/2)}{\omega^2-1} + i\frac{\operatorname{sen}(\pi\omega/2)-\omega}{\omega^2-1} + \frac{1-\omega\operatorname{sen}(\pi\omega/2)}{\omega^2-1} + i\frac{\omega}{\omega^2-1}\cos(\pi\omega/2)\right]e^{i\omega x}\,d\omega$; que converge a $\cos(x)$ para $0 < x < \pi/2$, a $\operatorname{sen}(x)$ para $-\pi/2 < x < 0$, a 0 para $|x| > \pi/2$, a $\frac{1}{2}$ a $x = 0$, a $-\frac{1}{2}$ en $x = -\pi/2$, y a 0 en $x = \pi/2$.

9. $\frac{2i}{\omega}[\cos(\omega) - 1]$ **11.** $-\frac{10}{\omega}e^{-2\omega i}\operatorname{sen}(\omega)$ **13.** $\frac{4}{1+4i\omega}e^{-(1+4i\omega)k/4}$ **15.** $\pi e^{-|\omega|}$ **17.** $\frac{24}{16+\omega^2}e^{2i\omega}$

19. $18\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-8t^2}e^{-4it}$ **21.** $H(t+2)e^{-10-(5-3i)t}$ **23.** $H(t)[2e^{-3t} - e^{-2t}]$

Sección 3.4

1. $\pi i[H(-\omega)e^{3\omega} - H(\omega)e^{-3\omega}]$ **3.** $\frac{26}{(2+i\omega)^2}$ **5.** $\frac{i\omega}{3+i\omega} - 1$ **7.** $\frac{5\pi}{3}e^{-2i(\omega-3)}e^{-3|\omega-3|}$ **9.** $H(t)te^{-t}$

11. $\frac{1}{4}\left[1-e^{-2(t+3)}\right]H(t+3) - \frac{1}{4}\left[1-e^{-2(t-3)}\right]H(t-3)$ **13.** $\frac{3}{2\pi}e^{-4it}\left[\frac{1}{9+(t+2)^2} + \frac{1}{9+(t-2)^2}\right]$

17. 3π **19.** $\frac{1}{\omega^3}[50\omega^2\operatorname{sen}(5\omega) + 20\omega\cos(5\omega) - 4\operatorname{sen}(5\omega)]$, $t_C = 0$, $t_R = \frac{25}{3}$

21. $e^{-4}\operatorname{sen}(4\omega)\frac{\omega}{\omega^2+1} - \frac{e^{-4}\cos(4\omega)-1}{\omega^2+1} + i\left([e^{-4}\cos(4\omega)-1]\frac{\omega}{\omega^2+1} + e^{-4}\frac{\operatorname{sen}(4\omega)}{\omega^2+1}\right)$, $t_C = 2$, $t_R = \frac{4}{3}$

23. $-\frac{2}{\omega^3}[-8\omega^2\operatorname{sen}(2\omega) - 4\omega\cos(2\omega) + 2\operatorname{sen}(2\omega)] + 2i\frac{1}{\omega^3}[8\omega^2\cos(2\omega) - 4\omega\operatorname{sen}(2\omega)]$, $t_C = 0$, $t_R = \frac{4}{3}$

Sección 3.5

1. $\hat{f}_C(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$, $\hat{f}_s(\omega) = \frac{\omega}{1+\omega^2}$

3. $\hat{f}_C(\omega) = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(K(1-\omega))}{1-\omega} + \frac{\operatorname{sen}(K(1+\omega))}{1+\omega}\right]$

$\hat{f}_S(\omega) = \frac{\omega}{\omega^2-1} - \frac{1}{2}\left[\frac{\cos(K(1+\omega))}{1+\omega} - \frac{\cos(K(1-\omega))}{1-\omega}\right]$

5. $\hat{f}_C(\omega) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+((1+\omega)^2} + \frac{1}{1+(1-\omega)^2}\right]$

$\hat{f}_S(\omega) = \frac{1}{2}\left[\frac{1+\omega}{1+(1+\omega)^2} - \frac{1-\omega}{1+(1-\omega)^2}\right]$

7. Las condiciones suficientes son: f'' y $f^{(3)}$ continuas en $[0,\infty)$; $f^{(4)}$ continua a pedazos en $[0, L]$ para todo L positivo; y $f(t) \to 0$, $f'(t) \to 0$, $f''(t) \to 0$; y $f^{(3)}(t) \to 0$ conforme $t \to \infty$. Las necesarias son $\int_0^\infty |f(t)|\,dt$ y $\int_0^\infty \left|f''(t)\right|\,dt$ convergente.

Sección 3.6

1. $\frac{K}{n}[1-(-1)^n]$ para $n = 1, 2, \ldots$ **3.** $-\frac{2}{n^3} + (-1)^n\left(\frac{2}{n^3} - \frac{\pi^2}{n}\right)$ para $n = 1, 2, \ldots$

5. $\frac{(-1)^n n \,\mathrm{sen}(a\pi)}{a^2 - n^2}$ para $n = 1, 2, \ldots$ si a no es un entero; si $a = m$, es un entero positivo, entonces $\tilde{f}_S(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi/2 & \text{si } n = m \end{cases}$.

7. $\frac{n}{n^2+1}[1-(-1)^n e^{-\pi}]$ para $n = 1, 2, \ldots$ **9.** $\tilde{f}_C(n) = \begin{cases} \pi^2/2 & \text{si } n = 0 \\ [(-1)^n - 1]/n^2 & \text{si } n = 1, 2, \ldots \end{cases}$.

11. $\tilde{f}_C(0) = \frac{1}{4}\pi^4$, $\tilde{f}_C(n) = \frac{6}{n^4} + (-1)^n\left(\frac{3\pi^2}{n^2} - \frac{6}{n^4}\right)$ si $n = 1, 2, \ldots$.

13. $\frac{a}{a^2 - n^2}[1-(-1)^n]\cos(a\pi)$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, si a no es un entero.

15. Escriba $\tilde{f'}_S(n) = \int_0^{\pi} f'(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx$ e integrando por partes.

Sección 3.7

1. $\mathbb{D}[u](0) = \sum_{j=0}^{5}\cos(j) \approx -0.23582$, $\mathbb{D}[u](1) = \sum_{j=0}^{5}\cos(j)e^{-\pi ij/3} \approx 2.9369 - 0.42794i$, $\mathbb{D}[u](2) = \sum_{j=0}^{5}\cos(j)e^{-2\pi ij/3} \approx 0.13292 - 1.6579 \times 10^{-2}i$, $\mathbb{D}[u](3) = \sum_{j=0}^{5}\cos(j)e^{-\pi ij} \approx 9.6238 \times 10^{-2}$, $\mathbb{D}[u](4) = \sum_{j=0}^{5}\cos(j)e^{-4\pi ij/3} \approx 0.13292 + 1.6579 \times 10^{-2}i$, $\mathbb{D}[u](-1) = \sum_{j=0}^{5}\cos(j)e^{\pi ij/3} \approx 2.9369 + 0.42794i$, $\mathbb{D}[u](-2) = \sum_{j=0}^{5}\cos(j)e^{2\pi ij/3} \approx 0.13292 + 1.6579 \times 10^{-2}i$, $\mathbb{D}[u](-3) = \sum_{j=0}^{5}\cos(j)e^{\pi ij} \approx 9.6238 \times 10^{-2}$, $\mathbb{D}[u](-4) = \sum_{j=0}^{5}\cos(j)e^{4\pi ij/3} \approx 0.13292 - 1.6579 \times 10^{-2}i$

3. $\mathbb{D}[u](0) = \sum_{j=0}^{5}\frac{1}{j+1} = 2.45$, $\mathbb{D}[u](1) = \sum_{j=0}^{5}\frac{1}{j+1}e^{-\pi ij/3} \approx 0.81667 - 0.40415i$, $\mathbb{D}[u](2) \approx 0.65 - 0.17321i$, $\mathbb{D}[u](3) \approx 0.61667$, $\mathbb{D}[u](4) \approx 0.65 + 0.17321i$, $\mathbb{D}[u](-1) \approx 0.81667 + 0.40415i$, $\mathbb{D}[u](-2) \approx 0.65 + 0.17321i$, $\mathbb{D}[u](-3) \approx 0.61667$, $\mathbb{D}[u](+4) \approx 0.65 - 0.17321i$

5. $\mathbb{D}[u](0) = 55$, $\mathbb{D}[u](1) \approx -6.0 + 31.177i$, $\mathbb{D}[u](2) \approx -14.0 + 10.392i$, $\mathbb{D}[u](3) = 15$, $\mathbb{D}[u](4) \approx -14.0 - 10.392i$, $\mathbb{D}[u](-1) \approx -6.0 - 31.177i$, $\mathbb{D}[u](-2) \approx -14.0 - 10.392i$, $\mathbb{D}[u](-3) \approx -15$, $\mathbb{D}[u](-4) \approx -14.0 + 10.392i$

7. La inversa es $\{u_j\}_{j=0}^{5}$, donde $u_0 = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5}(1+i)^k \approx -1.3333 + 0.16667i$, $u_1 = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5}(1+i)^k e^{\pi ik/3} \approx -0.42703 + 0.54904i$, $u_2 \approx -1.6346 \times 10^{-2} + 0.561i$, $u_3 \approx 0.33333 + 0.5i$, $u_4 \approx 0.84968 + 0.27233i$, y $u_5 \approx 1.5937 - 2.049i$

9. $u_0 = \frac{1}{7}\sum_{k=0}^{6}e^{-ik} \approx 0.10348 + 1.4751 \times 10^{-2}i$, $u_1 = \frac{1}{7}\sum_{k=0}^{6}e^{-ik}e^{2\pi ik/7} \approx 0.93331 - 0.29609i$, $u_2 \approx -9.4163 \times 10^{-2} + 8.8785 \times 10^{-2}i$, $u_3 \approx -2.3947 \times 10^{-2} + 6.2482 \times 10^{-2}i$, $u_4 \approx 4.3074 \times 10^{-3} + 5.1899 \times 10^{-2}i$, $u_5 \approx 2.5788 \times 10^{-2} + 4.3852 \times 10^{-2}i$, $u_6 \approx 5.1222 \times 10^{-2} + 3.4325 \times 10^{-2}i$

11. $u_0 \approx -0.1039$, $u_1 \approx 0.42051 + 0.29456i$, $u_2 \approx 0.13143 + 3.1205 \times 10^{-2}i$, $u_3 \approx 0.13143 - 3.1205 \times 10^{-2}i$, $u_4 \approx 0.42051 - 0.29456i$

13. Los coeficientes de Fourier son $d_k = \frac{1}{2}\int_0^2 \cos(\xi)e^{-\pi ki\xi}\,d\xi = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{sen}(2)}{\pi^2k^2 - 1} + \frac{k\pi i}{2}\frac{\cos(2) - 1}{\pi^2k^2 - 1}$. Para la aproximación TDF, elija $N = 128$, y aproxime a d_k por $f_k = \frac{1}{128}\sum_{j=0}^{127}\cos(j/64)e^{-\pi ijk/64}$.

Entonces
$d_0 = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2) \approx 0.45465$, $f_0 \approx 0.46017$
$d_1 \approx -5.1259 \times 10^{-2} - 0.2508i$ y $f_1 \approx -4.5737 \times 10^{-2} - 0.25075i$
$d_2 \approx -1.1816 \times 10^{-2} - 0.11562i$ y $f_2 \approx -6.2931 \times 10^{-3} - 0.11553i$
$d_3 \approx -5.1767 \times 10^{-3} - 7.5984 \times 10^{-2}i$ y $f_3 \approx 3.4589 \times 10^{-4} - 7.5849 \times 10^{-2}i$

$d_{-1} \approx -5.1259 \times 10^{-2} + 0.2508i$ y $f_{-1} \approx -4.5737 \times 10^{-2} + 0.25075i$
$d_{-2} \approx -1.1816 \times 10^{-2} + 0.11562i$, $f_{-2} \approx -6.2931 \times 10^{-3} + 0.11553i$,
$d_{-3} \approx -5.1767 \times 10^{-3} + 7.5984 \times 10^{-2}i$, $f_{-3} \approx 3.4589 \times 10^{-4} + 7.5849 \times 10^{-2}i$

15. Ahora, $d_k = \int_0^1 \xi^2 e^{-2\pi k i \xi} d\xi = \frac{1}{2\pi^2 k^2} + i\frac{1}{2\pi k}$ si $k \neq 0$, y $d_0 = \frac{1}{3}$. La aproximación TDF es $f_k = \frac{1}{128}\sum_{j=0}^{127}\left(\frac{j}{128}\right)^2 e^{-\pi i j k/64}$.

$d_0 = \frac{1}{3}$, $f_0 \approx 0.32944$
$d_1 \approx 5.0661 \times 10^{-2} + 0.15915i$, $f_1 \approx 4.6765 \times 10^{-2} + 0.15912i$
$d_2 \approx 1.2665 \times 10^{-2} + 7.9577 \times 10^{-2}i$, $f_2 \approx 8.7691 \times 10^{-3} + 7.9514 \times 10^{-2}i$
$d_3 \approx 5.629 \times 10^{-3} + 5.3052 \times 10^{-2}i$. $f_3 \approx 1.7329 \times 10^{-3} + 5.2956 \times 10^{-2}i$
$d_{-1} \approx 5.0661 \times 10^{-2} - 0.15915i$, $f_{-1} \approx 4.6765 \times 10^{-2} - 0.15912i$
$d_{-2} \approx 1.2665 \times 10^{-2} - 7.9577 \times 10^{-2}i$, $f_{-2} \approx 8.7691 \times 10^{-3} - 7.9514 \times 10^{-2}i$
$d_{-3} \approx 5.629 \times 10^{-3} - 5.3052 \times 10^{-2}i$, $f_{-3} \approx 1.7329 \times 10^{-3} - 5.2956 \times 10^{-2}i$

Sección 3.8

1. La serie de Fourier compleja es $2 + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} \frac{i}{\pi k} e^{\pi i k t}$, así $S_{10}(\frac{1}{8}) = 1.0207 + 1.6653 \times 10^{-16}i$. Aproximadamente $S_{10}(\frac{1}{8}) \approx \frac{1}{128}\sum_{k=-0}^{127} V_k e^{\pi i k/8}$, que es $1.0552 + 10^{-14}i$; $\left|1.0207 + 1.6653 \times 10^{-16}i - (1.0552 - 2.0983 \times 10^{-16}i)\right| = 0.003452$.

3. La serie de Fourier compleja es $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[-\frac{1}{2}\frac{\text{sen}(2)}{\pi^2k^2-1} + \frac{i}{2}k\pi\frac{\cos(2)-1}{\pi^2k^2-1}\right]e^{\pi i k t}$. Entonces $S_{10}(\frac{1}{8}) = 1.0672 - 3.4694 \times 10^{-18}i$. Aproximadamente $S_{10}(\frac{1}{8}) \approx \frac{1}{128}\sum_{k=\pm 1}^{127} V_k e^{\pi i k/8}$, que vale $1.0428 + 3.8025 \times 10^{-15}i$; $|1.0672 - 3.4694 \times 10^{-18}i - (1.0428 + 3.8025 \times 10^{-15i}$ 0.002440

5. La serie de Fourier compleja es $\frac{1}{4} + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\frac{1}{\pi^2k^2} + \frac{i}{4}\frac{2k^2\pi^2-3}{\pi^3k^3}\right)e^{2k\pi i t}$ y $S_{10}(\frac{1}{4}) = -7.2901 \times 10^{-4} + 1.0408 \times 10^{-17}i$. Aproximadamente $S_{10}(\frac{1}{4}) \approx \frac{1}{128}\sum_{k=0}^{127} V_k e^{\pi k i/2}$, que vale $3.4826 \times 10^{-3} + 9.1593 \times 10^{-16}i$; $\left|-7.2901 \times 10^{-4} + 1.0408 \times 10^{-17}i - (3.4826 \times 10^{-3} + 9.1593 \times 10^{-16}i)\right|$ ≈ 0.004212.

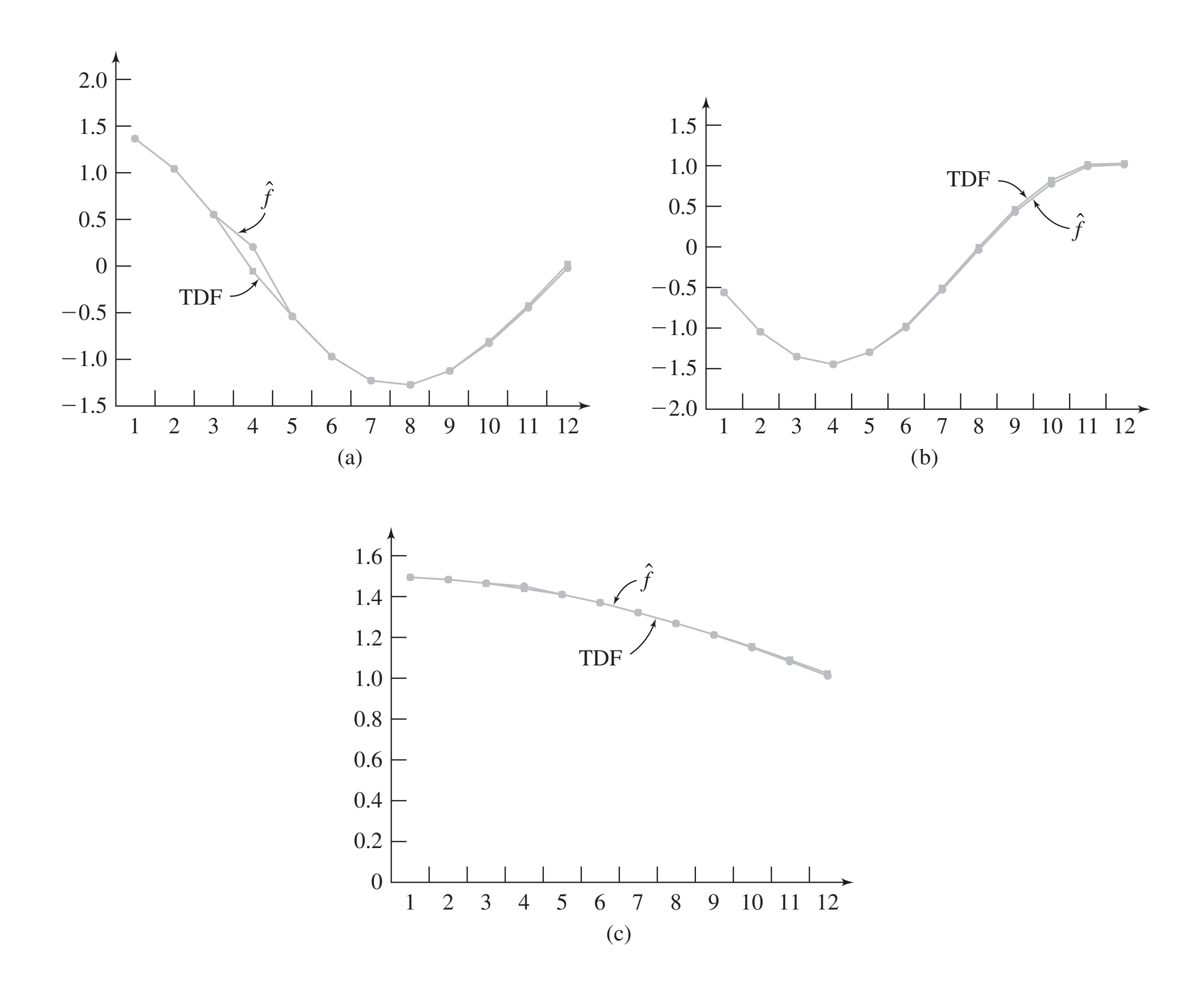
7. $0.14386 - 0.12455i$ **9.** $-6.5056 \times 10^{-3} - 2.191 \times 10^{-3}i$

En las gráficas asociadas con los problemas 11 y 13, en la serie 1 los puntos son los valores verdaderos calculados a partir de la transformada, y en la serie dos los puntos son las aproximaciones de la TDF. En todos los casos las aproximaciones se pueden mejorar eligiendo N grande.

11. $\hat{f}(\omega) = \frac{2\omega\,\text{sen}(2\omega) + \cos(2\omega) - \omega\,\text{sen}(\omega) - \cos(\omega)}{\omega^2} + i\frac{2\omega\cos(2\omega) - \text{sen}(2\omega) - \omega\cos(\omega) + \text{sen}(\omega)}{\omega^2}$. Nota: en la suma de la ecuación (3.24), $11 \leq j \leq 20$ ya que $f(t)$ es cero fuera del intervalo $[1, 2)$. Genere la siguiente tabla usando $L = 4$:

k	$\hat{f}(k/4)$	TDF $\hat{f}(k/4)$	$\left\|\hat{f}(k/4)\right\|$	$\left\|\text{TDF } \hat{f}(k/4)\right\|$
1	$1.3845 - 0.5673i$	$1.3764 - 0.5714i$	1.4962	1.4903
2	$1.0579 - 1.0421i$	$1.0445 - 1.048i$	1.485	1.4796
3	$0.5761 - 1.3488i$	$0.5558 - 1.3521i$	1.4667	1.4619
4	$0.2068 - 1.4404i$	$-.0573 - 1.4372i$	1.4406	1.4383
5	$-0.5162 - 1.3098i$	$-0.5453 - 1.2959i$	1.4078	1.406
6	$-0.9483 - 0.9865i$	$-0.9749 - 0.9602i$	1.3684	1.3684
7	$-1.2108 - 0.5325i$	$-1.2288 - 0.4945i$	1.3227	1.3247
8	$-1.2708 - 0.0295i$	$-1.2751 + .0170i$	1.2711	1.2752
9	$-1.1323 + 0.4386i$	$-1.1194 + 0.4866i$	1.2143	1.2206
10	$-0.8329 + 0.7966i$	$-0.8026 + 0.8393i$	1.1525	1.1613
11	$-0.4359 + 0.9953i$	$-0.3909 + 1.0258i$	1.0866	1.0978
12	$-0.0166 + 1.0168i$	$0.0374 + 1.0299i$	1.0169	1.0306

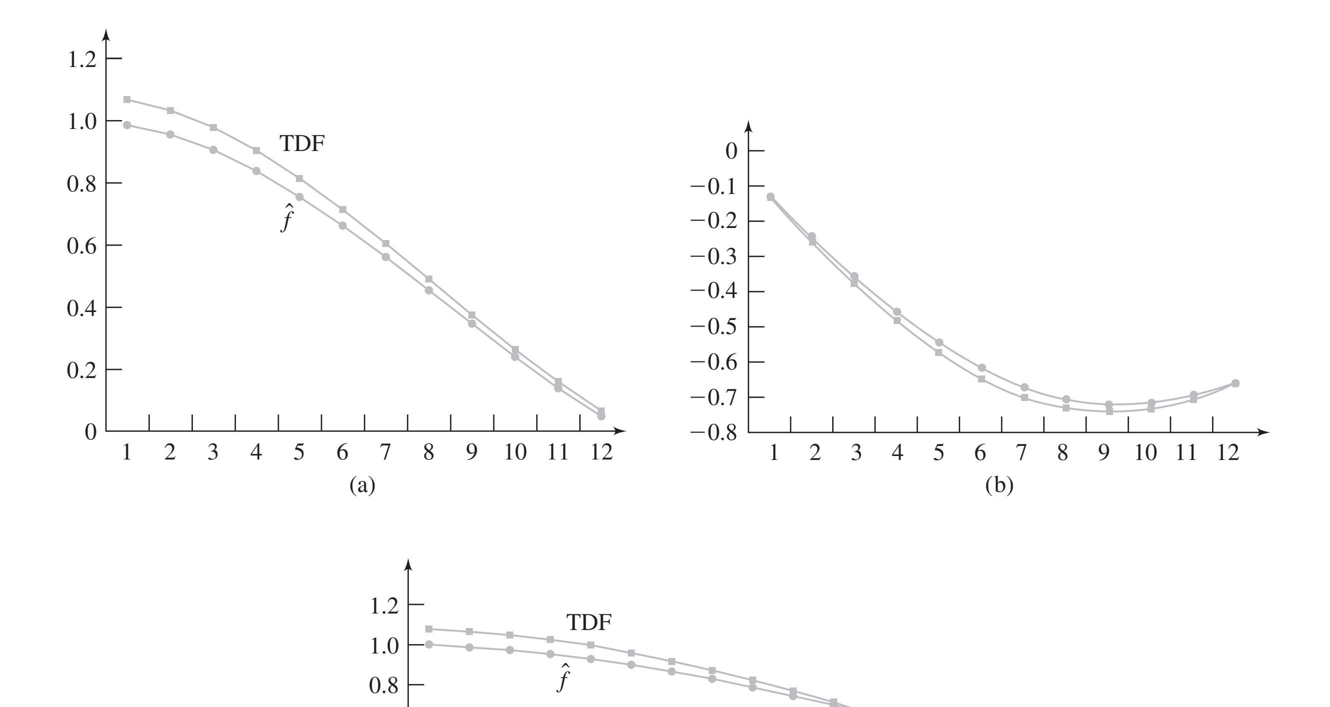
Las gráficas siguentes comparan las (a) partes reales, (b) las partes imaginarias y (c) los valores absolutos, de $\hat{f}(k/4)$ y las aproximaciones TDF.



13. $\hat{f}(\omega) = \dfrac{\text{sen}(\omega)}{\omega} + i\dfrac{\cos(\omega) - 1}{\omega}$. Con $L = 4$ obtiene la siguiente tabla (con j sumando de 0 a 10 en la ecuación (3.24)):

k	$\hat{f}(k/4)$	TDF $\hat{f}(k/4)$	$\lvert\hat{f}(k/4)\rvert$	$\lvert\text{TDF } \hat{f}(k/4)\rvert$
1	$0.9896 - 0.1244i$	$1.0686 - 0.1318i$	0.99739	1.0767
2	$0.9589 - 0.2448i$	$1.035 - 0.25925i$	0.98965	1.067
3	$0.9089 - 0.3577i$	$0.98047 - 0.37821i$	0.97675	1.0509
4	$0.8415 - 0.4597i$	$0.90716 - 0.48489i$	0.95888	1.0286
5	$0.7592 - 0.5477i$	$0.81791 - 0.57604i$	0.93614	1.0004
6	$0.6650 - 0.6195i$	$0.71616 - 0.64909i$	0.90885	0.96654
7	$0.5623 - 0.6733i$	$0.60574 - 0.70222i$	0.87722	0.92738
8	$0.4546 - 0.7081i$	$0.49076 - 0.73447i$	0.84147	0.88334
9	$0.3458 - 0.7236i$	$0.37537 - 0.74574i$	0.80198	0.83488
10	$0.2394 - 0.7205i$	$0.26362 - 0.73678i$	0.75923	0.78252
11	$0.1388 - 0.6997i$	$0.15924 - 0.70914i$	0.71333	0.7268
12	$0.0470 - 0.6633i$	$0.0655 - 0.66506i$	0.66496	0.66828

Las gráficas siguientes comparan (a) las partes reales, (b) las partes imaginarias y (c) los valores absolutos, de $\hat{f}(k/4)$ y las aproximaciones TDF.

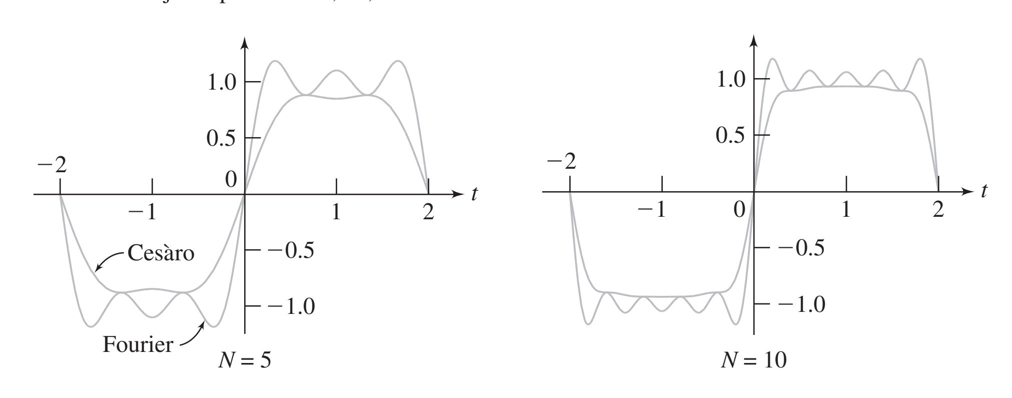


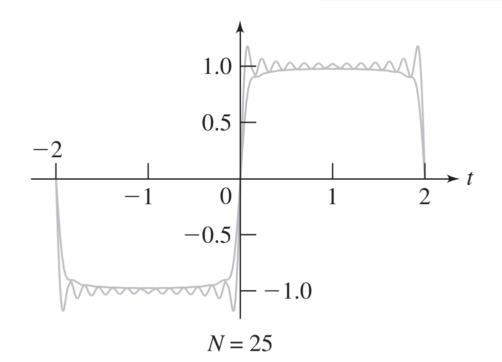
15. La serie de Fourier de f es $\displaystyle\sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \frac{i}{n\pi}(-1+(-1)^n)e^{n\pi i t/2}$, o $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi t}{2}\right)$.

Entonces $S_N(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$. La N-ésima suma de Cesàro es $\sigma_N(t) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\left|\frac{n}{N}\right|\right)\frac{i}{n\pi}$

$$\sigma_N(t) = \sum_{n=-N}^{N}\left(1-\left|\frac{n}{N}\right|\right)\frac{i}{n\pi}((-1+(-1)^n)e^{n\pi i t/2}, \text{ o } \sigma_N(t) = \sum_{n=1}^{N}\left(1-\left|\frac{n}{N}\right|\right)\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{2}\right).$$

Las gráficas están dibujadas para $N = 5, 10, 25$.



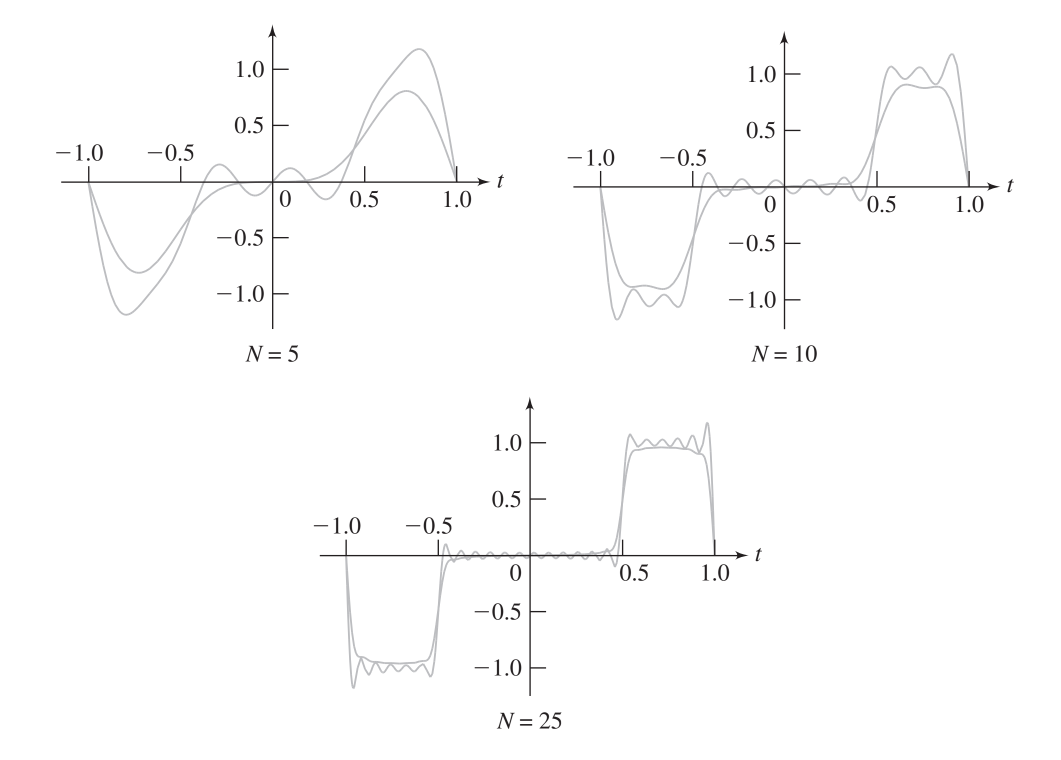


$N = 25$

17. $S_N(t) = \displaystyle\sum_{n=-N,n\neq 0}^{N} \frac{i}{n\pi}\left((-1)^n - \cos(n\pi/2)\right)e^{n\pi i t} = \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n\pi}(\cos(n\pi/2) - (-1)^n)\,\text{sen}(n\pi t),\ \sigma_N(t) =$

$$\sum_{n=-N,n\neq 0}^{N} \left(1 - \left|\frac{n}{N}\right|\right)\frac{i}{n\pi}\left((-1)^n - \cos(n\pi/2)\right)e^{n\pi i t} = \sum_{n=1}^{N}\left(1 - \left|\frac{n}{N}\right|\right)\frac{2}{n\pi}(\cos(n\pi/2) - (-1)^n)\,\text{sen}(n\pi t)$$

Las gráficas están dibujadas para $N = 5, 10, 25$.



$N = 5$ $N = 10$ $N = 25$

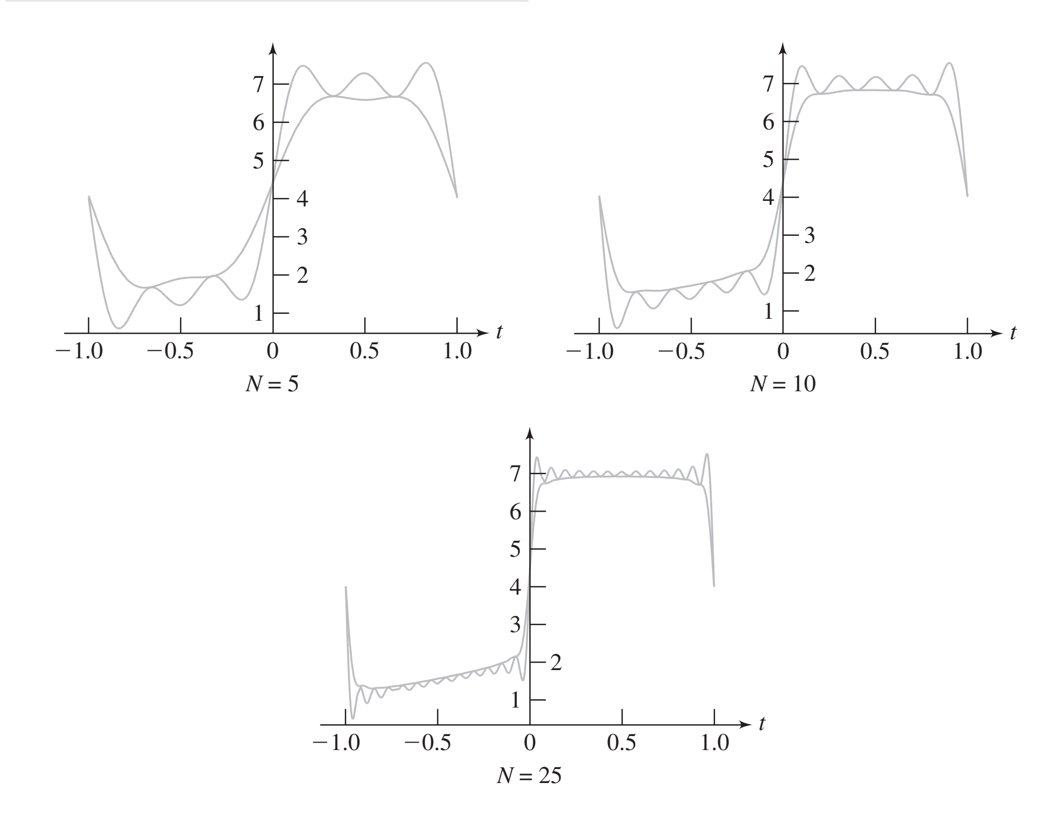
19. $S_N(t) = \dfrac{17}{4} + \displaystyle\sum_{n=-N,n\neq 0}^{N}\left(\frac{1}{2}\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2} + \frac{i}{n\pi}\left(1 - \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{7}{2}((-1)^n - 1)\right)\right)e^{n\pi i t}$

$$= \frac{17}{4} + \sum_{n=1}^{N}\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t) - \frac{2}{n\pi}\left(-\frac{5}{2} + 3(-1)^n\right)\text{sen}(n\pi t),$$

$$\sigma_N(t) = \frac{17}{4} + \sum_{n=-N,n\neq 0}^{N}\left(1 - \left|\frac{n}{N}\right|\right)\left[\frac{1}{2}\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2} + \frac{i}{n\pi}\left(1 - \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{7}{2}[(-1)^n - 1]\right)\right]e^{n\pi i t}$$

$$+ \frac{17}{4} + \sum_{n=1}^{N}\left(1 - \left|\frac{n}{N}\right|\right)\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t) - \frac{2}{n\pi}\left(-\frac{5}{2} + 3(-1)^n\right)\text{sen}(n\pi t)\right]$$

Las gráficas están dibujadas para $N = 5, 10, 25$ (ver siguiente página).

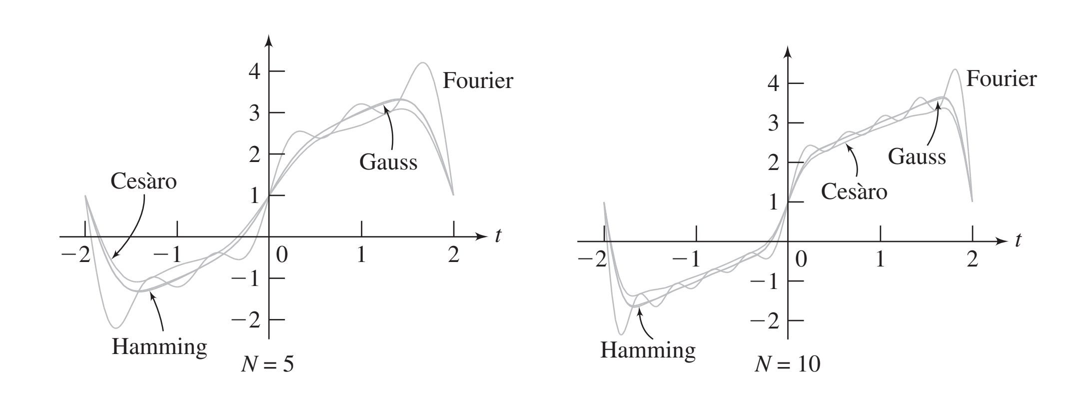


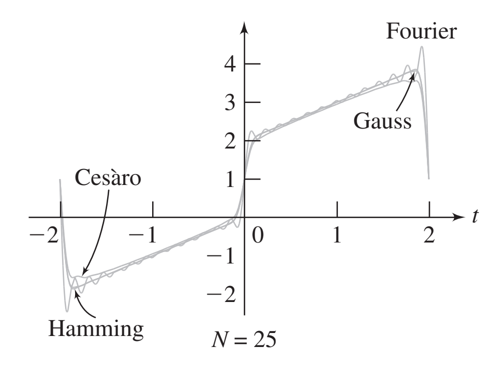
21. $S_N(t) = 1 + \sum_{n=-N, n\neq 0}^{N} \frac{i}{n\pi}\left(3(-1)^n - 1\right) e^{n\pi i t/2} = 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{-2}{n\pi}\left(3(-1)^n - 1\right) \operatorname{sen}(n\pi t/2)$, $\sigma_N(t) = 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{-2}{n\pi}\left(1 - \left|\frac{n}{N}\right|\right)\left(3(-1)^n - 1\right) \operatorname{sen}(n\pi t/2)$

Suma parcial filtrada de Hamming: $H_N(t) = 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{-2}{n\pi}(0.54 + 0.46\cos(\pi n/N))\left(3(-1)^n - 1\right) \operatorname{sen}(n\pi t/2)$

Suma parcial filtrada de Gauss: $G_N(t) = 1 + \sum_{n=1}^{N} -\frac{2}{n\pi} e^{-a\pi^2 n^2/N^2}\left(3(-1)^n - 1\right) \operatorname{sen}(n\pi t/2)$

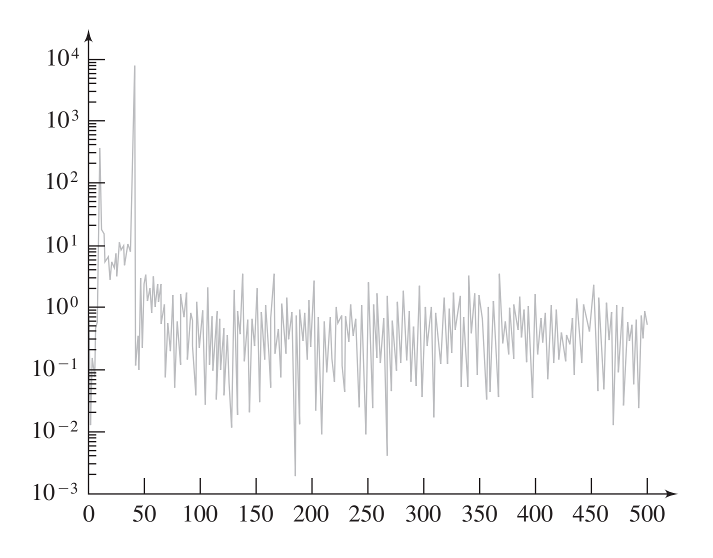
Las gráficas están dibujadas para $N = 5, 10, 25$, con $a = \frac{1}{2}$ en el filtro de Gauss.



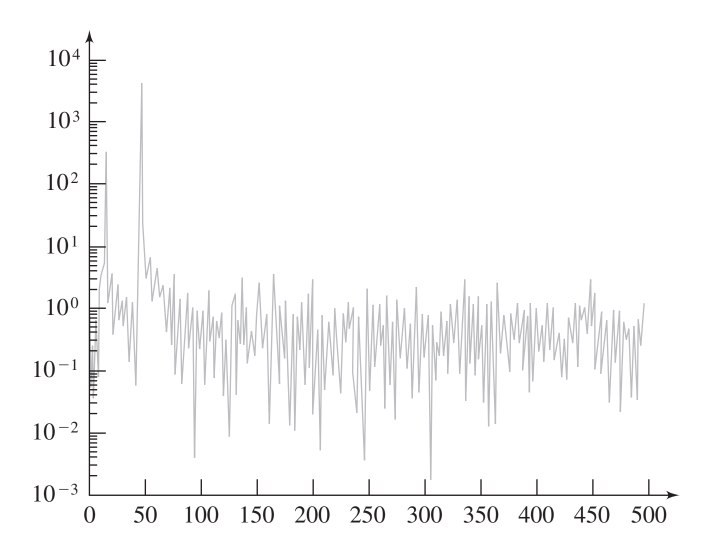


Sección 3.9

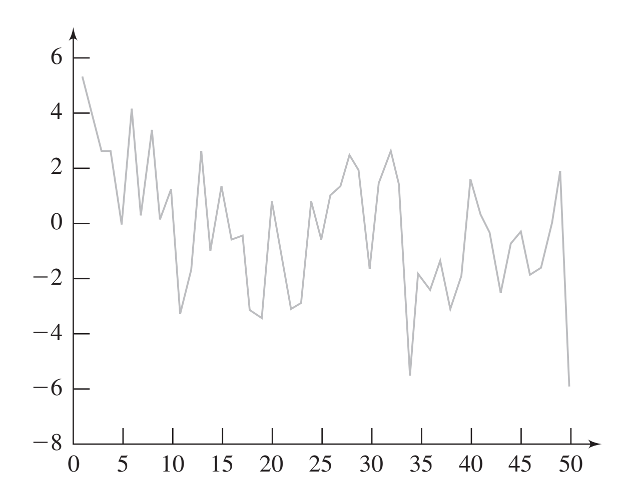
1. Espectro de potencias de $y(t) = 4\ \mathrm{sen}(80\pi t) - \mathrm{sen}(20\pi t)$



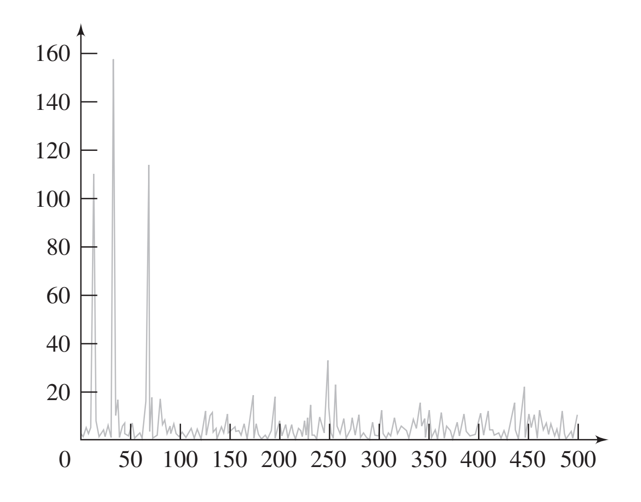
3. Espectro de potencias de $y(t) = 3\cos(90\pi t) - \mathrm{sen}(30\pi t)$



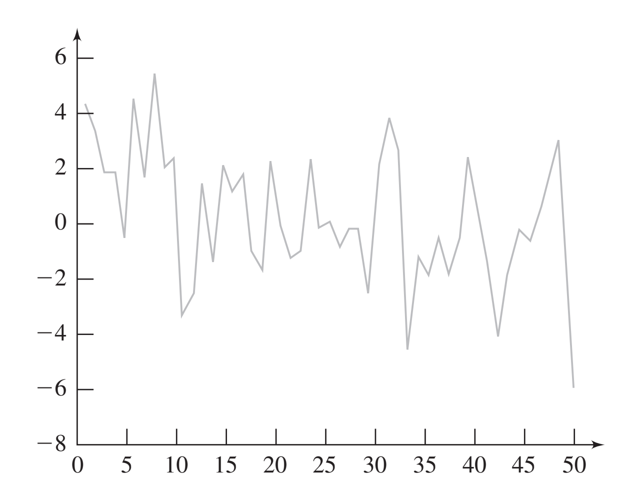
5. Señal corrupta de $y(t) = \cos(30\pi t) + \cos(70\pi t) + \cos(140\pi t)$



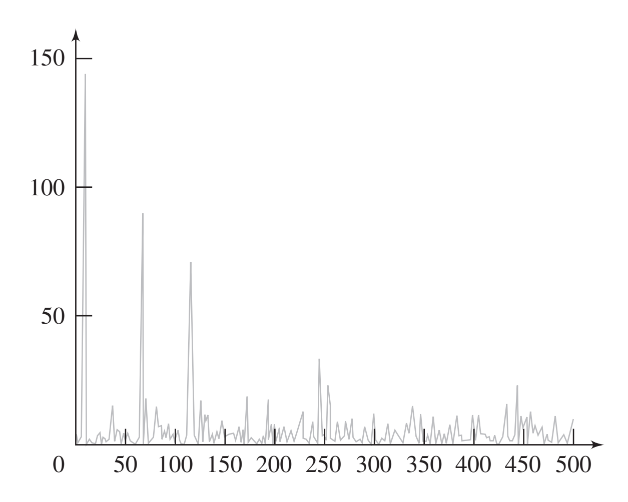
Componentes de la frecuencia de la señal corrupta



7. Señal corrupta de $y(t) = \cos(20\pi t) + \text{sen}(140\pi t) + \cos(240\pi t)$



Componentes de la frecuencia de la señal corrupta



CAPÍTULO 4

Sección 4.1

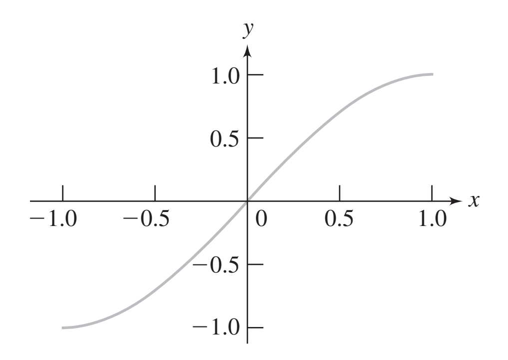
3. Se ilustra para $P_3(x)$. Por la fómula de Rodrigues, $P_3(x) = \dfrac{1}{2^3 3!}\dfrac{d^3}{dx^3}((x^2-1)^3) = \dfrac{1}{48}(120x^3-72x) = \dfrac{1}{2}(5x^3-3x)$.

5. Por ejemplo, con $n = 3$ tiene $\left[\dfrac{3}{2}\right] = 1$ y $\displaystyle\sum_{k=0}^{1}(-1)^k \frac{(6-2k)!}{8k!(3-k)!(3-2k)!}x^{3-2k} =$

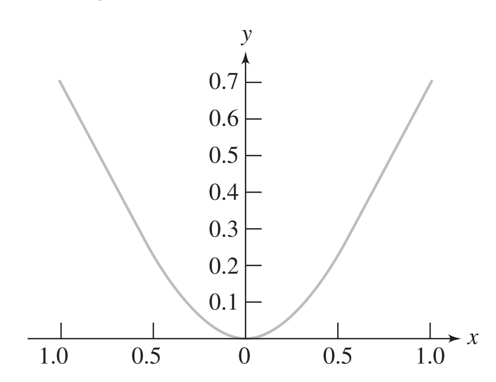
$\dfrac{6!}{8(3!)(3!)}x^3 - \dfrac{4!}{8(2!)(1!)}x = \dfrac{5}{2}x^3 - \dfrac{3}{2}x = P_3(x)$.

7. Sustituya $Q(x) = P_n(x)u(x)$ en la ecuación de Legendre. Después de las cancelaciones debido a que $P_n(x)$ es una solución, obtiene $u'' + \left(2\dfrac{P_n'}{P_n} - \dfrac{2x}{1-x^2}\right)u' = 0$. Sea $v = u'$ para escribir $\dfrac{v'(x)}{v(x)} = -2\dfrac{P_n'(x)}{P_n(x)} + \dfrac{2x}{1-x^2}$. Integre para obtener $\ln(v(x)) = -2\ln(P_n(x)) - \ln(1-x^2)$, así $v(x) = \dfrac{1}{P_n(x)^2(1-x^2)}$. Entonces $u(x) = \displaystyle\int \frac{1}{P_n(x)^2(1-x^2)}dx$ y $Q(x) = P_n(x)u(x)$.

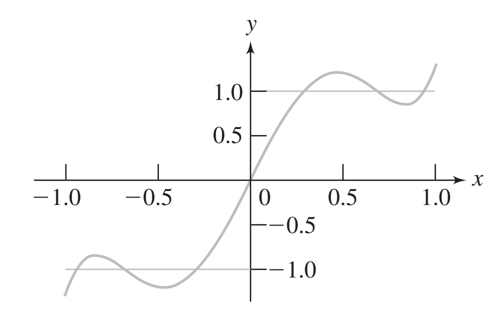
13. Para $-1 < x < 1$, $\operatorname{sen}(\pi x/2) = \dfrac{12}{\pi^2}x + 168\dfrac{\pi^2-10}{\pi^4}\dfrac{1}{2}(5x^3-3x) + 660\dfrac{-112\pi^2+\pi^4+1008}{\pi^6}\dfrac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x) + \cdots$.
En la gráfica, la suma de estos términos es indistinguible de la función.



15. Para $-1 < x < 1$, $\operatorname{sen}^2(x) = \left[-\frac{1}{2}\cos(1)\operatorname{sen}(1) + \frac{1}{2}\right] + \left[-\frac{5}{8}\cos(1)\operatorname{sen}(1) + \frac{15}{8} - \frac{15}{4}\cos^2(1)\right]\frac{5}{8}(3x^2 - 1)$
$+ \left[\frac{531}{32}\cos(1)\operatorname{sen}(1) - \frac{535}{32} + \frac{585}{16}\cos^2(1)\right]\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) + \cdots$ En la gráfica, la suma de estos términos es indistinguible de la función.



17. Para $-1 < x < 0$ y para $0 < x < 1$, $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{7}{8}\frac{1}{2}(5x^3 - 3x) + \frac{11}{16}\frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) + \cdots$ La siguiente gráfica muestra la función y la suma de estos tres términos del desarrollo de Fourier-Legendre.



Observe que en el 13 y 15, sólo los primeros tres términos del desarrollo de la función propia se aproxima tanto a la función que las dos gráficas son virtualmente indistinguibles. En el 17, es claro que debemos agregar más términos del desarrollo de la función propia para tener una aproximación razonable de $f(x)$.

Sección 4.2

1. Sea $y = x^a J_\nu(bx^c)$ y calcule $y' = ax^{a-1}J_\nu(bx^c) + x^a bcx^{c-1}J'_\nu(bx^c)$ y
$Y'' = a(a-1)x^{a-2}J_\nu(bx^c) + [2ax^{a-1}bcx^{c-1} + x^a bc(c-1)x^{c-2}]J'_\nu(bx^c) + x^a b^2c^2x^{2c-2}J''_\nu(bx^c)$. Sustituya esto en la ecuación diferencial y simplifique para obtener $c^2x^{a-2}\{(bx^c)^2J''_\nu(bx^c) + bx^cJ'_\nu(bx^c) + [(bx^c)^2 - \nu^2]J_\nu(bx^c)\} = 0$.

3. $y = c_1J_{1/3}(x^2) + c_2J_{-1/3}(x^2)$ **5.** $y = c_1x^{-1}J_{3/4}(2x^2) + c_2x^{-1}J_{-3/4}(2x^2)$

7. $y = c_1x^4J_{3/4}(2x^3) + c_2x^4J_{-3/4}(2x^3)$ **9.** $y = c_1x^{-2}J_{1/2}(3x^3) + c_2x^{-2}J_{-1/2}(3x^3)$

11. $y_1 = c_1J_3(\sqrt{x}) + c_2Y_3(\sqrt{x})$ **13.** $y = c_1J_4(2x^{1/3}) + c_2Y_4(2x^{1/3})$

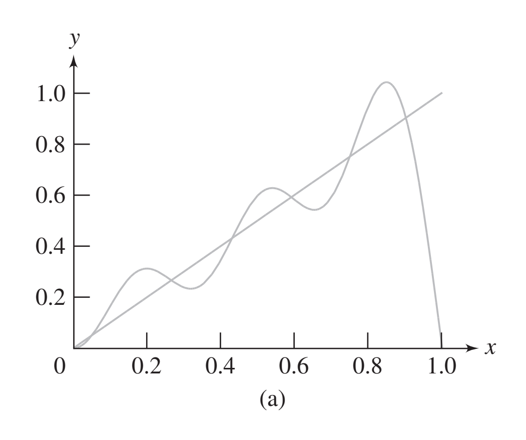
15. $y = c_1x^{2/3}J_{1/2}(x) + c_2x^{2/3}J_{-1/2}(x)$

17. Sustituya esto en la ecuación diferencial y use el hecho que $J_{1/3}(z)$ satisface $z^2J''_{1/3} + zJ'_{1/3} + \left(z^2 - \frac{1}{9}\right)J_{1/3} = 0$.

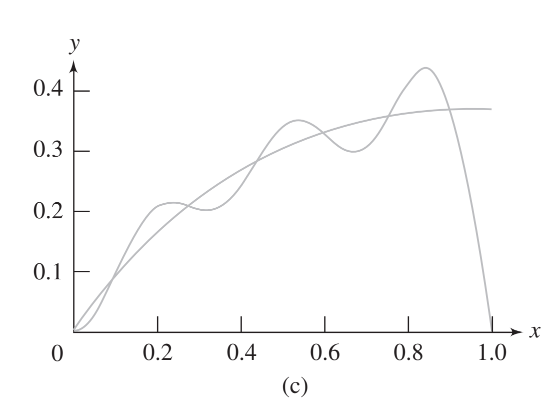
19. $y = c_1xJ_2(x) + c_2xY_2(x)$ **21.** $y = c_1x^2J_2(\sqrt{x}) + c_2x^2Y_2(\sqrt{x})$

29. (a) La suma de los primeros cinco términos del desarrollo de Fourier - Bessel es $\approx 1.67411J_2(5.135x) - 0.77750J_2(8.417x) + 0.8281J_2(11.620x) - 0.6201J_2(14.796x) + 0.6281J_2(17.960x)$. A partir de las gráficas de x de los primeros cinco términos de este desarrollo, se deben incluir más términos para conseguir una precisión razonable.

(c) La suma de los primeros cinco términos del desarrollo de Fourier-Bessel es $0.85529J_2(5.135x) - 0.21338J_2(8.417x) + 0.35122J_2(11.620x) - 0.20338J_2(14.796x) + 0.025800J_2(17.960x)$. Como indican las gráficas, se necesitan más términos para aproximar la función con la suma parcial del desarrollo de Fourier-Bessel.



(a)



(c)

Sección 4.3

1. Problema regular en $[0, L]$; valores propios $\left(\frac{2n-1}{2L}\pi\right)^2$ para $n = 1, 2, \ldots$; funciones propias múltiplos constantes distintos de cero $\operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2L}\pi x\right)$ **3.** Regular en $[0, 4]$; $\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{4}\right)^2$; $\cos\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{4}x\right)$

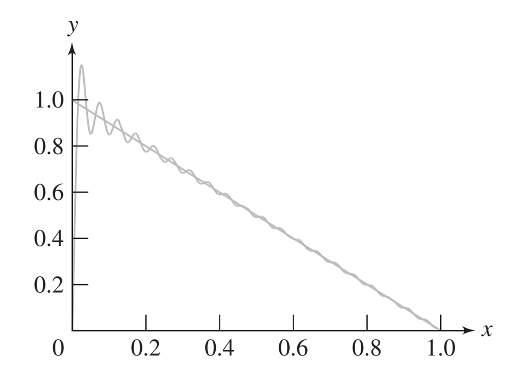
5. Periódico en $[-3\pi, 3\pi]$; 0 es un valor propio con función propia 1; para $n = 1, 2, \ldots$, $\frac{1}{9}n^2$ es un valor propio con función propia $a_n \cos(nx/3) + b_n \operatorname{sen}(nx/3)$, no ambos a_n y b_n cero

7. Regular en $[0, 1]$; los valores propios son soluciones positivas de $\tan(\sqrt{\lambda}) = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}$. Hay infinidad de tales soluciones, de las cuales las primeras cuatro son aproximadamente 0.43, 10.84, 40.47 y 89.82. Las funciones propias correspondientes al valor propio λ_n, tienen la forma $2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda_n}x) + \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x)$.

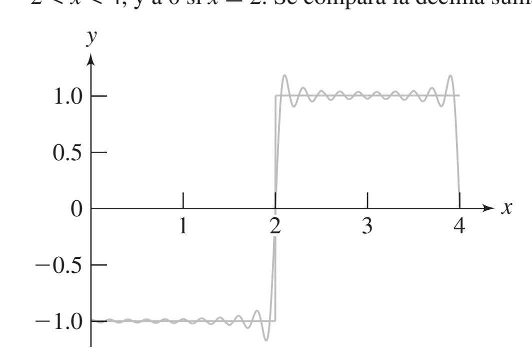
9. Regular en $[0, \pi]$; $1 + n^2$ para $n = 1, 2, \ldots$; $e^{-x}\operatorname{sen}(nx)$ para $n = 1, 2, \ldots$

11. Regular en $[1, e^3]$; $1 + \frac{n^2\pi^2}{9}$ para $n = 1, 2, \ldots$; $x^{-1}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\ln(x)\right)$ para $n = 1, 2, \ldots$

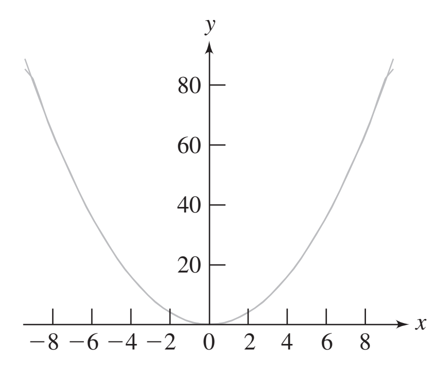
13. Para $0 < x < 1$, $1 - x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi x)$. Se compara la décima suma parcial de la serie con la gráfica de la función.



15. El desarrollo es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{\sqrt{2}\cos(n\pi/2) - \sqrt{2}\,\text{sen}(n\pi/2) - (-1)^n}{2n-1} \cos\left(\frac{2n-1}{8}\pi x\right)$. Éste converge a -1 para $0 < x < 2$ y 1 para $2 < x < 4$, y a 0 si $x = 2$. Se compara la décima suma parcial de la serie con la gráfica de la función.



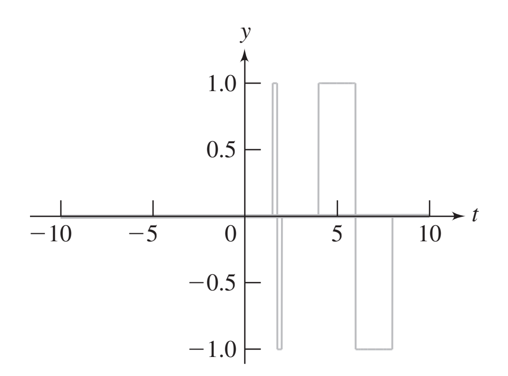
17. Para $-3\pi < x < 3\pi$, $x^2 = 3\pi^2 + 36 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx/3)$. Se compara la décima suma parcial de la serie con la gráfica de la función.



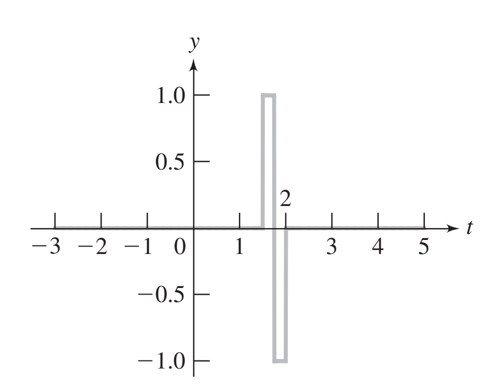
19. Las funciones propias normalizadas son $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{2n-1}{8}\pi x\right)$. Ahora, $(f \cdot \varphi_n) =$
$\int_0^4 x(4-x)\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{2n-1}{8}\pi x\right) dx = -128\sqrt{2}\frac{4(-1)^n + (2n-1)\pi}{\pi^3(2n-1)^3}$, así $\sum_{n=1}^{\infty}\left((128\sqrt{2})\frac{4(-1)^n + (2n-1)\pi}{\pi^3(2n-1)^3}\right)^2$
$\leq f \cdot f = \int_0^4 x^2(4-x)^2\,dx = \frac{512}{15}$, o $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^n + (2n-1)\pi}{\pi^3(2n-1)^3}\right)^2 \leq \frac{512}{15(128\sqrt{2})^2} = \frac{1}{960}$.

Sección 4.4

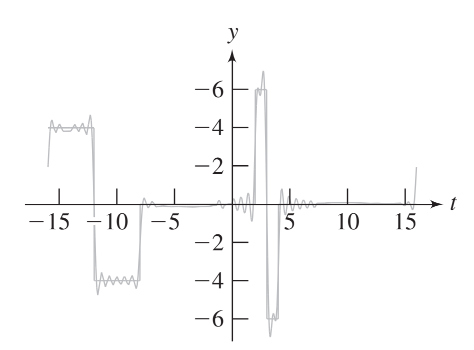
3. El intervalo en donde $\sigma_{1,3}(t)$ es distinto de cero es ajeno al intervalo en donde $\sigma_{-2,1}(t)$ es distinto de cero, de manera que $\sigma_{1,3}(t)\sigma_{-2,1}(t)$ es idénticamente cero, así $\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{1,3}(t)\sigma_{-2,1}(t)\,dt = 0$. La gráfica de $\sigma_{1,3}(t)$ y $\sigma_{-2,1}(t)$ se muestra a continuación.



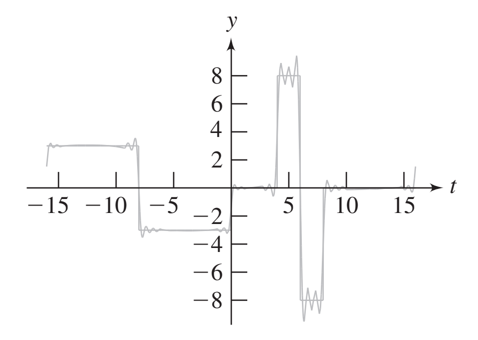
5. Una gráfica de $\psi(2t-3)$ se muestra abajo.



7. La serie de Fourier de $f(t)$ en $[-16, 16]$ es $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n\pi}\left(-2\,\text{sen}\left(\frac{3n\pi}{4}\right)+\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)-\frac{6}{n\pi}\left(\text{sen}\left(\frac{n\pi}{8}\right)-2\,\text{sen}\left(\frac{3n\pi}{16}\right)\right.\right.$ $\left.\left.+\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)\right]\cos\left(\frac{n\pi t}{16}\right)+\left[-\frac{4}{n\pi}\left(-\cos(n\pi)+2\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)+\frac{6}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{8}\right)-2\cos\left(\frac{3n\pi}{16}\right)\right.\right.$ $\left.\left.+\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)\right]\text{sen}\left(\frac{n\pi t}{16}\right)$. La siguiente gráfica compara la función con la décimoquinta suma parcial de su serie de Fourier.



9. La serie de Fourier de $f(t)$ en $[-16, 16]$ es $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left[-14\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)-8\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)+16\,\text{sen}\left(\frac{3n\pi}{8}\right)\right]\cos\left(\frac{n\pi t}{16}\right)$ $+\ \frac{1}{n\pi}\left[3(-1)^n+2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+3+8\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)-16\cos\left(\frac{3n\pi}{8}\right)\right]\text{sen}\left(\frac{n\pi t}{16}\right)$. La siguiente gráfica compara la función con la décimoquinta suma parcial de su serie de Fourier.



CAPÍTULO 5

Sección 5.1

1. Calcule $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\dfrac{n^2\pi^2}{L^2}\operatorname{sen}(n\pi x/L)\cos(n\pi ct/L)$ y $\dfrac{\partial^2 y^2}{\partial t} = -\dfrac{n^2\pi^2 c^2}{L^2}\operatorname{sen}(n\pi x/L)\cos(n\pi ct/L)$.

3. Calcule $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{2}\left[f''(x+ct) + f''(x-ct)\right]$ y $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{1}{2}c^2[f''(x+ct) + f''(x-ct)]$.

5. El problema para esta función de desplazamiento $z(x, y, t)$ es $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$ para $0 < x < a, 0 < y < b$,

$$z(x, y, 0) = f(x, y),\ \frac{\partial z}{\partial t}(x, y, 0) = 0 \text{ para } 0 < x < a, 0 < y < b,$$

$$z(0, y, t) = z(a, y, t) = z(x, 0, t) = z(x, b, t) = 0.$$

Sección 5.2

1. $y(x, t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16(-1)^n}{(2n-1)^3\pi^3 c}\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi ct}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2 c}\operatorname{sen}(n\pi x)\operatorname{sen}(n\pi ct)$

3. $y(x, t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{108}{(2n-1)^4\pi^4}\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2(2n-1)\pi t}{3}\right)$

5. $y(x, t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{(2n-1)^2\pi}(-1)^{n+1}\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\cos\left((2n-1)\sqrt{2}t\right)$

7. $y(x, t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-32}{(2n-1)^3\pi^3}\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{3(2n-1)\pi t}{2}\right)$
$\displaystyle + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]\operatorname{sen}\left(\frac{3n\pi t}{2}\right)$

9. Sea $Y(x, t) = y(x, t) + h(x)$ y sustituya en el problema para elegir $h(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{9}x$. El problema para Y se vuelve

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 3\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2},$$

$$Y(0, t) = Y(2, t) = 0,$$

$$Y(x, 0) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{9}x,\ \frac{\partial Y}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

Encontramos que $Y(x, t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{32}{3n^3\pi^3}(-1)^n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi\sqrt{3}t}{2}\right)$, y entonces $y(x, t) = Y(x, t) - h(x)$.

11. Sea $Y(x, t) = y(x, t) + h(x)$ y elija $h(x) = \cos(x) - 1$. El problema para Y es

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2},$$

$$Y(0, t) = Y(2\pi, t) = 0,$$

$$Y(x, 0) = \cos(x) - 1,\ \frac{\partial Y}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

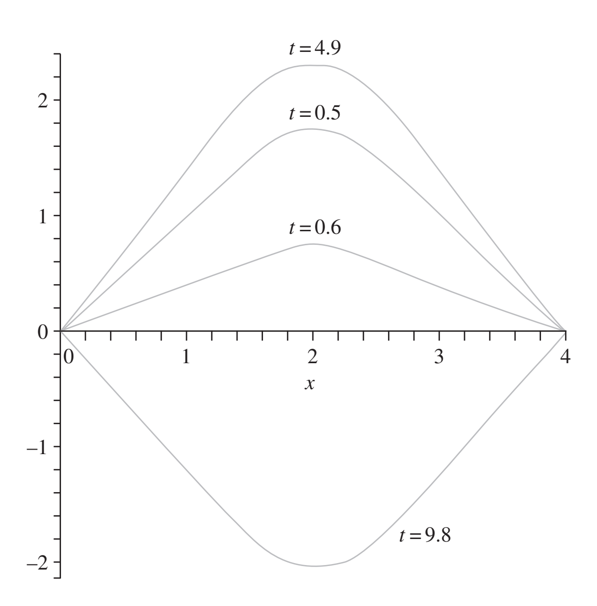
Este problema tiene solución $Y(x, t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi}\frac{1}{(2n-1)[(2n-1)^2 - 4]}\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\cos\left(\frac{(2n-1)t}{2}\right)$, y entonces $y(x, t) = Y(x, t) + 1 - \cos(x)$.

13. $u(x, t) = e^{-At/2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} C_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[\frac{1}{AL}r_n\cos\left(\frac{r_n t}{2L}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{r_n t}{2L}\right)\right]$, donde $C_n = \dfrac{2A}{r_n}\displaystyle\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$ y $r_n = \sqrt{4(BL^2 + n^2\pi^2 c^2) - A^2L^2}$

15. (a) La solución con el término de fuerza es $y_f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^3}\left(\frac{2}{(2n-1)^3} - \frac{1}{9}\frac{1}{(2n-1)[(2n-1)^2-16]}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right)$ $\cos\left(\frac{3(2n-1)\pi t}{4}\right) + \frac{1}{9\pi^2}[\cos(\pi x) - 1].$

(b) Sin el término de fuerza, la solución es $y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{128}{\pi^3(2n-1)^3}\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{4}\right)\cos\left(\frac{3(2n-1)\pi t}{4}\right).$

Ambas soluciones están dibujadas juntas para los tiempos $t = 0.5$, 0.6, 4.9 y 9.8, use los mismos ejes para permitir la comparación.



17. $y_{j,1} = 0.25$ para $j = 1, 2, \ldots, 19$
$y_{1,2} = 0.08438$, $y_{j,2} = 0.05$ para $j = 2, 3, \ldots, 19$
$y_{1,3} = 0.13634$, $y_{2,3} = 0.077149$, $y_{j,3} = 0.075$ para $j = 3\ 4, \ldots, 19$
$y_{1,4} = 0.17608$, $y_{2,4} = 0.10786$, $y_{3,4} = 0.10013$, $y_{j,4} = 0.1$ para $j = 4, 5, \ldots, 19$
$y_{1,5} = 0.20055$, $y_{2,5} = 0.14235$, $y_{3,5} = 0.12574$, $y_{4,5} = 0.12501$
$y_{j,5} = 0.125$ para $j = 5, 6, \ldots, 19$

19. Se da $y_{j,k}$ para $j = 1, 2, \ldots, 9$, primero para $k = -1$, después $k = 0, 1, \ldots, 5$.
$y_{j,-1}$: 0.08075, 0.127, 0.14475, 0.14, 0.11875, 0.087, 0.05075, 0.016, −0.01125
$y_{j,0}$: 0.081, 0.128, 0.147, 0.144, 0.125, 0.096, 0.063, 0.032, 0.009
$y_{j,1}$: 0.079125, 0.1735, 0.14788, 0.147, 0.13063, 0.10475, 0.075375, 0.0485, 0.030125
$y_{j,2}$: 0.0057813, 00.2115, 0.77078, 0.14903, 0.13567, 0.11328, 0.087906, 0.065531, 0.050516
$y_{j,3}$: −0.055066, 0.27160, 1.3199, 0.18908, 0.14015, 0.12162, 0.10062, 0.083022, 0.068688
$y_{j,4}$: −0.092055, 0.3768, 1.7328, 0.29675, 0.14653, 0.12981, 0.11355, 0.10072, 0.083463
$y_{j,5}$: −0.093987, 0.53745, 1.9712, 0.48652, 0.16125, 0.13803, 0.12669, 0.11814, 0.0941

Sección 5.3

1. $y(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{10}{\pi\left(25+\omega^2\right)}\cos(\omega x)\cos(12\omega t)d\omega$ **3.** $y(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{-1}{2\pi\omega}\frac{\operatorname{sen}(\pi\omega)}{\omega^2-1}\operatorname{sen}(\omega x)\operatorname{sen}(4\omega t)d\omega$

5. $y(x, t) = \int_0^{\infty}\left[\left(\frac{1}{3\pi\omega}e^{-2}\frac{2\cos(\omega) - \omega\operatorname{sen}(\omega)}{4+\omega^2}\right)\cos(\omega x) + \left(\frac{1}{3\pi\omega}e^{-2}\frac{\omega\cos(\omega) + 2\operatorname{sen}(\omega)}{4+\omega^2}\right)\operatorname{sen}(\omega x)\right]\operatorname{sen}(3\omega t)d\omega$

7. $y(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{2}{\pi}\frac{2 - \omega\operatorname{sen}(\omega) - 2\cos(\omega)}{\omega^3}\operatorname{sen}(\omega x)\cos(3\omega t)\, d\omega$

9. $y(x,t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi\omega} \frac{\operatorname{sen}(\pi\omega/2) - \operatorname{sen}(5\pi\omega/2)}{\omega^2 - 1} \operatorname{sen}(\omega x)\operatorname{sen}(2\omega t)\, d\omega$

11. $y(x,t) = \int_0^{\infty} -\frac{3}{7\pi\omega^5}\left[16\omega\cos^3(\omega) - 12\omega\cos(\omega) + 12\omega^2\operatorname{sen}(\omega)\cos^2(\omega) - 3\omega^2\operatorname{sen}(\omega) - 8\operatorname{sen}(\omega)\cos^2(\omega)\right.$
$\left. + 2\operatorname{sen}(\omega) + 2\omega\right]\operatorname{sen}(\omega x)\operatorname{sen}(14\omega t)\, d\omega$

13. $y(x,t) = At + (1-A)\left(t - \frac{x}{c}\right) H\left(t - \frac{x}{c}\right)$

Sección 5.4

1. Las características son rectas $x - t = k_1$, $x + t = k_2$;
$y(x,t) = \frac{1}{2}\left[(x-t)^2 + (x+t)^2\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} -\xi\, d\xi = x^2 + t^2 - xt$

3. Las características son $x - 7t = k_1$, $x + 7t = k_2$;
$y(x,t) = \frac{1}{2}\left[\cos(\pi(x-7t)) + \cos(\pi(x+7t))\right] + t - x^2 t - \frac{49}{3}t^3$

5. Las características son $x - 14t = k_1$, $x + 14t = k_2$;
$y(x,t) = \frac{1}{2}\left[e^{x-14t} + e^{x+14t}\right] + xt$

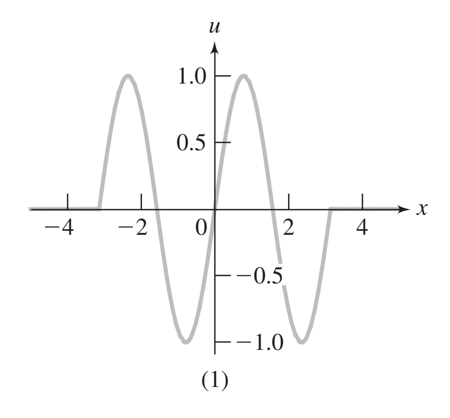
7. $y(x,t) = x + \frac{1}{8}\left(e^{-x+4t} - e^{-x-4t}\right) + \frac{1}{2}xt^2 + \frac{1}{6}t^3$

9. $y(x,t) = x^2 + 64t^2 - x + \frac{1}{32}\left(\operatorname{sen}(2(x+8t)) - \operatorname{sen}(2(x-8t))\right) + \frac{1}{12}t^4 x$

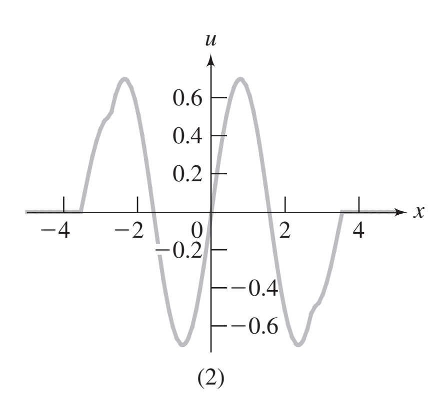
11. $y(x,t) = \frac{1}{2}\left[\cosh(x-3t) + \cosh(x+3t)\right] + t + \frac{1}{4}xt^4$

En cada uno del 13, 15 y 17, las gráficas muestran una progresión del movimiento conforme a la suma de las ondas hacia adelante y hacia atrás.

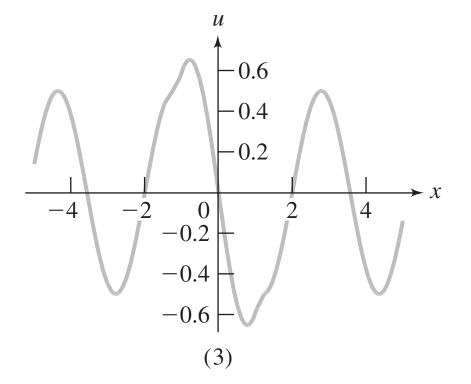
13.



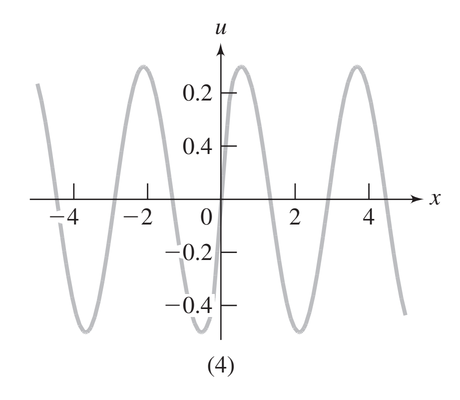
(1)



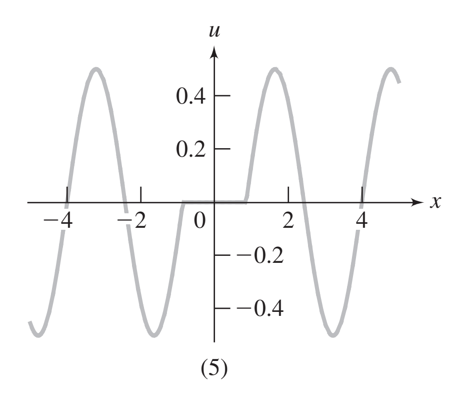
(2)



(3)



(4)



(5)

15.

(1)

(2)

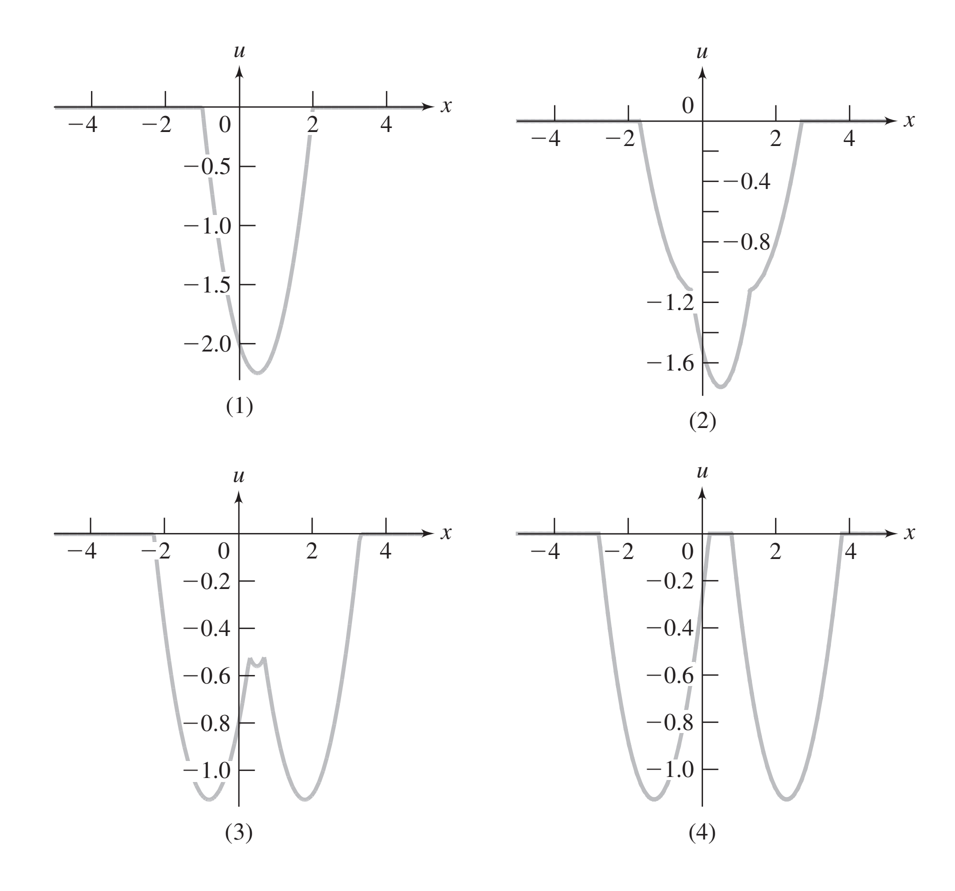
(3)

(4)

(5)

(6)

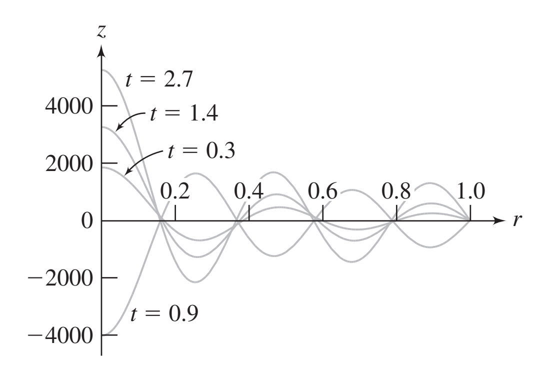
17.



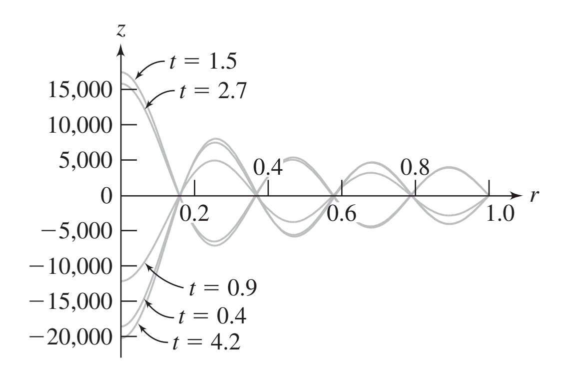
Sección 5.5

1. Encuentre que (aproximadamente) $a_1 = \dfrac{2\int_0^1 x J_0(2.405x)\,dx}{[J_1(2.405)]^2} = 2\dfrac{0.1057}{0.2695} = 0.78442, a_2 = 0.04112, a_3 = -8.1366,$ $a_4 = -375.2$, $a_5 = -6470.9$. La quinta suma parcial de la serie da la aproximación $z(r, t) \approx 0.78442J_0(2.405r)\cos(2.405t) + 0.04112J_0(5.520r)\cos(5.520t) - 8.1366J_0(8.654r)\cos(8.654t) - 375.2J_0(11.792r)\cos(11.792t) - 6470.9J_0(14.931r)\cos(14.931t)$.

   La siguiente gráfica muestra $z(r, t)$ en distintos tiempos.



3. Aproximadamente, $z(r, t) \approx 1.2534J_0(2.405r)\cos(2.405t) - 0.88824J_0(5.520r)\cos(5.520t) - 24.89J_0(8.654r)\cos(8.654t) - 1133.6J_0(11.792r)\cos(11.792t) - 19523J_0(14.931r)\cos(14.931t)$.
La siguiente gráfica muestra $z(r, t)$ en los tiempos seleccionados.



Sección 5.6

1. Calcule

$$\frac{1}{2}\alpha_0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(4-r^2)\,\text{sen}^2(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\left(4-r^2\right)$$

$$\alpha_n(r) = \frac{4-r^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\text{sen}^2(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 2 \\ \dfrac{4-r^2}{\pi}\left(-\dfrac{1}{2}\pi\right) & \text{si } n = 2 \end{cases}$$

$$\beta_n(r) = \frac{4-r^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\text{sen}^2(\theta)\,\text{sen}(n\theta)\,d\theta = 0.$$

Así,

$$\begin{aligned} z(r,\theta,t) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{[J_1(j_{0k})]^2}\left(\int_0^1 \xi(1-\xi^2)J_0(j_{0k}\xi)\,d\xi\right)J_0\left(\frac{1}{2}j_{0k}r\right)\cos(j_{0k}t) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{[J_3(j_{2k})]^2}\left(\int_0^1 \xi(\xi^2-1)J_2(j_{2k}\xi)\,d\xi\right)J_2\left(\frac{1}{2}j_{2k}r\right)\cos(2\theta)\cos(j_{2k}t) \\ &+ \sum_{p=1}^{\infty}\text{sen}(p\theta)\sum_{q=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{p+1}}{pj_{pq}[J_{p+1}(j_{pq})]^2}\int_0^1 \xi\,J_p(j_{pq}\xi)\,d\xi)J_\theta\left(\frac{1}{2}j_{pq}r\right)\text{sen}(j_{pq}t) \\ &\approx 1.1081J_0(1.2025r)\cos(2.40483t) - 0.13975J_0(2.760r)\cos(5.52008t) \\ &+ 0.4555J_0(4.3270r)\cos(8.65373t) - 0.02105J_0(5.8960r)\cos(11.7915t) \\ &+ 0.01165J_0(7.4655r)\cos(14.43092t) + \cdots - 2.9777J_2(2.5675r)\cos(2\theta)\cos(5.1356t) \\ &- 1.4035J_2(4.2085r)\cos(2\theta)\cos(8.41724t) - 1.1405J_2(5.8100r)\cos(2\theta)\cos(11.6198t) \\ &- 0.83271J_2(7.398r)\cos(2\theta)\cos(14.7960t) - \cdots . \end{aligned}$$

Sección 5.7

1. $z(x, y, t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{8(-1)^{n+1}\pi^2}{n} + \frac{16}{n^3}[(-1)^n - 1]\right]\text{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\text{sen}(y)\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{n^2+4t}\right)$

3. $z(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{16}{\pi^2(2n-1)(2m-1)\sqrt{(2n-1)^2+(2m-1)^2}}\right]\cos\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{(2m-1)x}{2}\right)$
$\times\ \text{sen}\left(\sqrt{(2n-1)^2+(2m-1)^2}\,t\right)$

CAPÍTULO 6

Sección 6.1

1. $\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ para $0 < x < L, t > 0$; $u(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$ para $t \geq 0$; $u(x, 0) = f(x)$ para $0 \leq x \leq L$.

3. $\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ para $0 < x < L, t > 0$; $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ y $u(L, t) = \beta(t)$ para $t \geq 0$; $u(x, 0) = f(x)$ para $0 \leq x \leq L$.

Sección 6.2

En estas soluciones, $\exp(A) = e^A$.

1. $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8L^2}{(2n-1)^3\pi^3}\text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)\exp\left(\frac{-(2n-1)^2\pi^2 kt}{L^2}\right)$

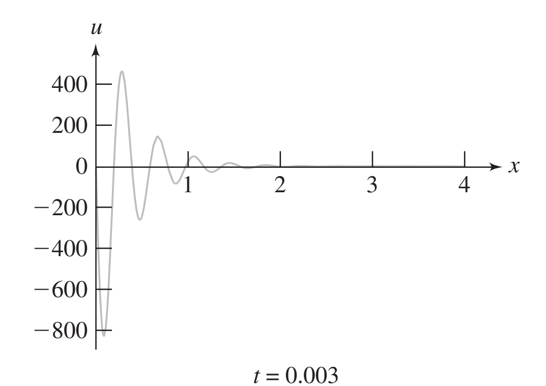
3. $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-16L}{(2n-1)\pi[(2n-1)^2-4]}\text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)\exp\left(\frac{-3(2n-1)^2\pi^2 t}{L^2}\right)$

5. $u(x, t) = \frac{2}{3}\pi^2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cos(nx)e^{-4n^2 t}$ **7.** $u(x, t) = \frac{1}{6}\left(1-e^{-6}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}12\left(\frac{1-e^{-6}(-1)^n}{36+n^2\pi^2}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{6}\right)e^{-n^2\pi^2 t/18}$

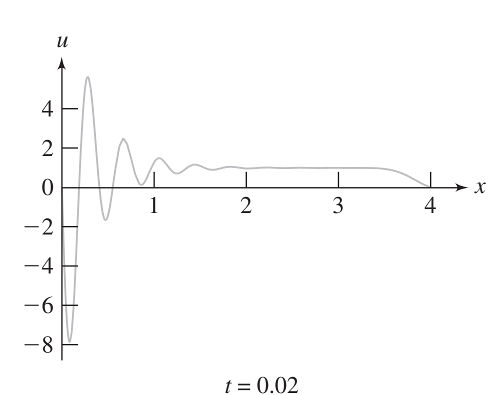
9. $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4B}{(2n-1)\pi}\text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)\exp\left(\frac{-(2n-1)^2\pi^2 kt}{4L^2}\right)$

11. Sustituya $e^{\alpha x+\beta t}v(x, t)$ en la ecuación diferencial parcial y resuelva para α y β de manera que $v_t = kv_{xx}$. Obtiene $\alpha = -A/2$ y $\beta = k(B - A^2/4)$.

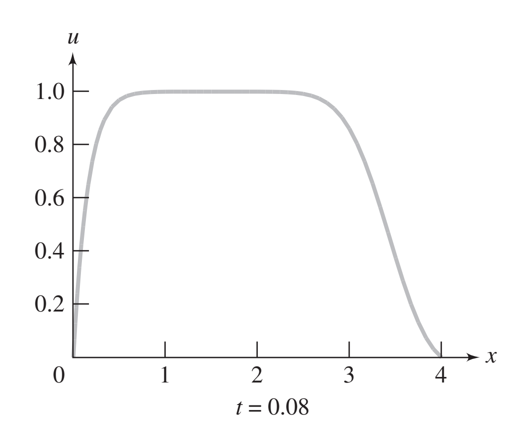
13. Sea $u(x, t) = e^{-3x-9t}v(x, t)$. Entonces $v_t = v_{xx}$, $v(0, t) = v(4, t) = 0$ y $v(x, 0) = e^{3x}$. Entonces $v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(2n\pi\frac{1-e^{12}(-1)^n}{144+n^2\pi^2}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right)e^{-n^2\pi^2 t/16}$. Las gráficas de la solución se muestran para los tiempos $t = 0.003$, 0.02, 0.08 y 1.3.

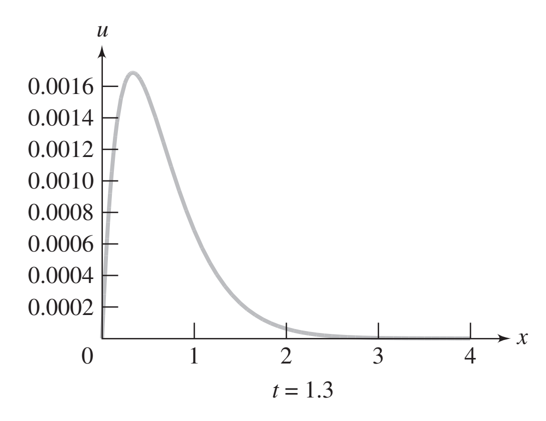


$t = 0.003$



$t = 0.02$



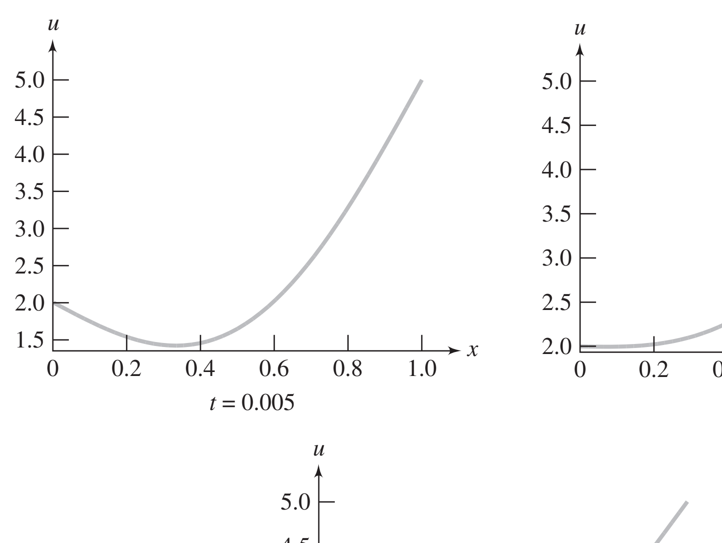


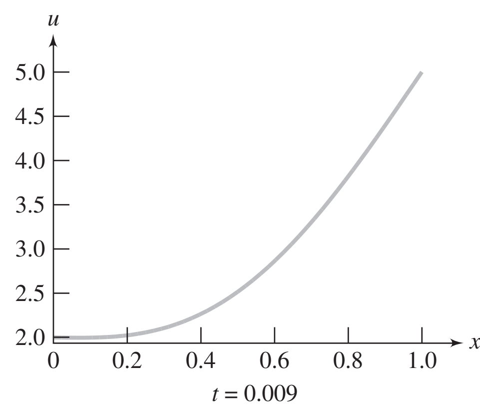
15. Sea $u(x, t) = v(x, t) + f(x)$ y elija $f(x) = 3x + 2$ para tener $v_t = 16v_{xx}$, $v(0, t) = v(1, t) = 0$ y $v(x, 0) = x^2 - f(x)$.

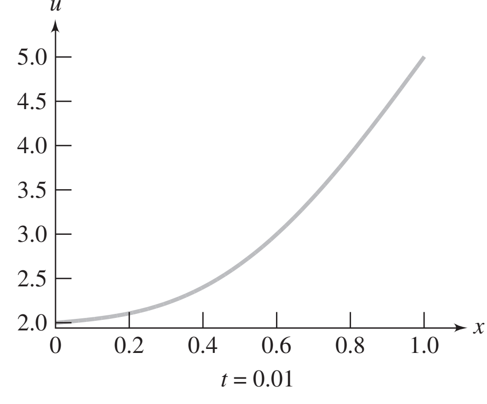
Entonces $v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\dfrac{4n^2\pi^2(-1)^n + 2(-1)^n - 2 - 2n^2\pi^2}{n^3\pi^3}\right)$

$\operatorname{sen}(n\pi x)e^{-16n^2\pi^2 t}$ y $u(x, t) = v(x, t) + 3x + 2$.

Las gráficas de la solución se muestran para los tiempos $t = 0.005$, 0.009 y 0.01.

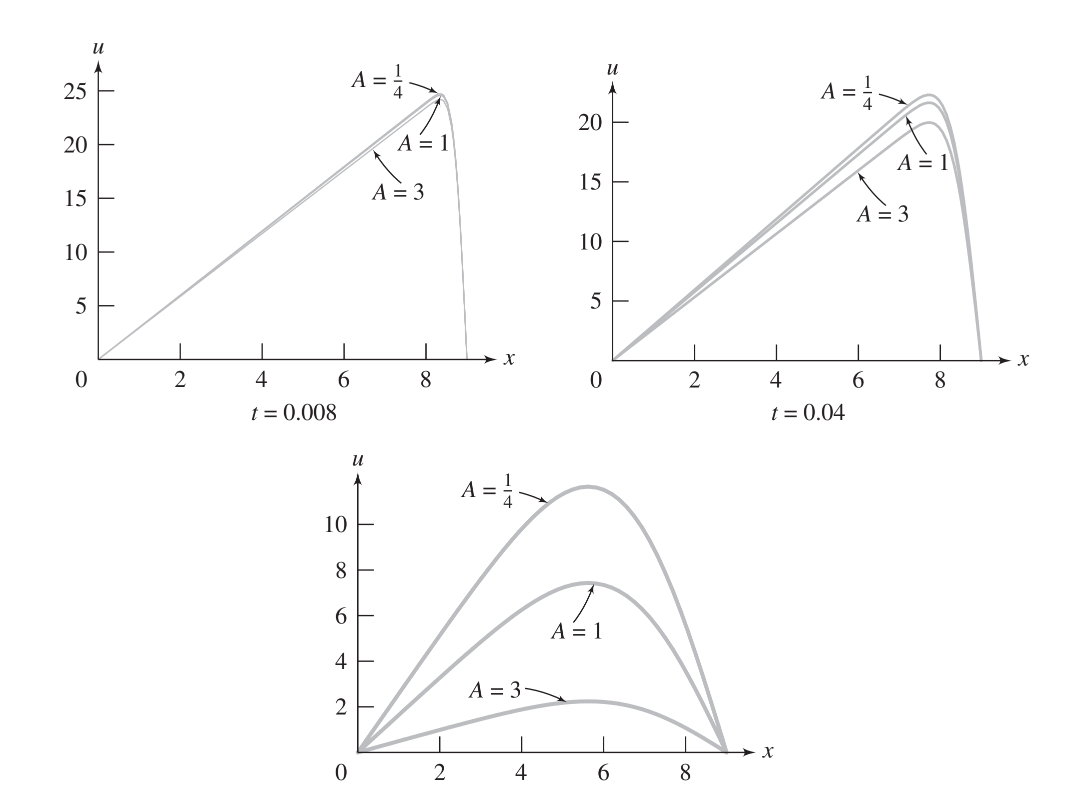




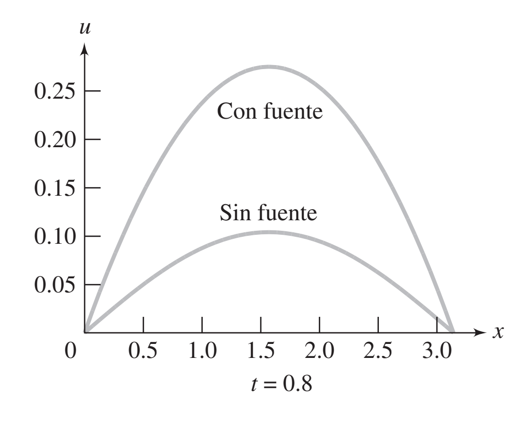


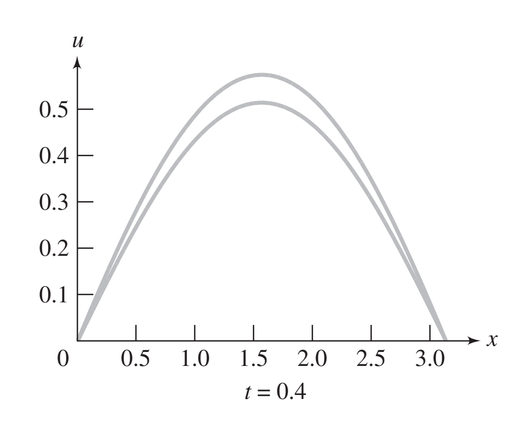
17. Sea $u(x, t) = e^{-At}w(x, t)$. Entonces $w_t = 4w_{xx}$, $w(0, t) = w(9, t) = 0$ y $w(x, 0) = 3x$. Obtenga

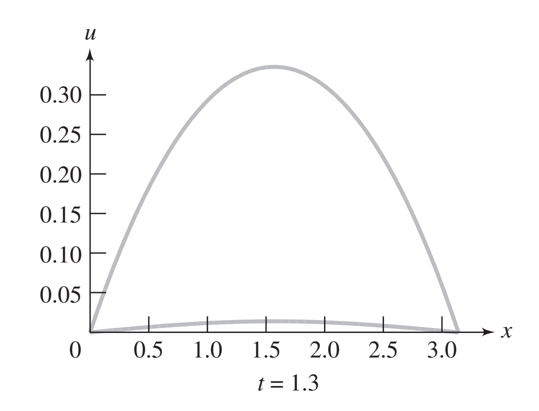
$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{54(-1)^{n+1}}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{9}\right) e^{-4n^2\pi^2 t/81}.$$ Las gráficas comparan las soluciones en los tiempos $t = 0.008$, 0.04 y 0.6 para $A = \frac{1}{4}$, 1 y 3.



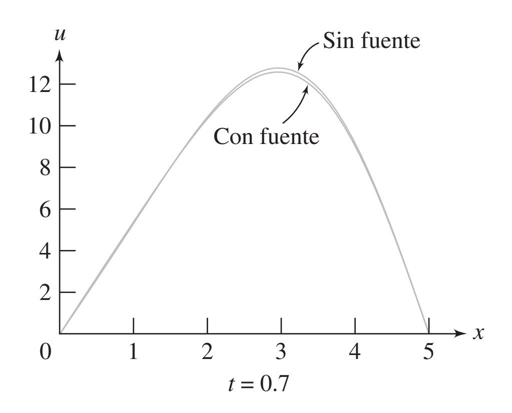
19. $$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{8\pi}\frac{1-(-1)^n}{n^5}\left(-1+4n^2t+e^{-4n^2t}\right)\right]\operatorname{sen}(nx) + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^3}\right)\operatorname{sen}(nx)e^{-4n^2t}.$$ Las gráficas comparan las soluciones con y sin el término fuente, para los tiempos $t = 0.8$, 0.4 y 1.3.

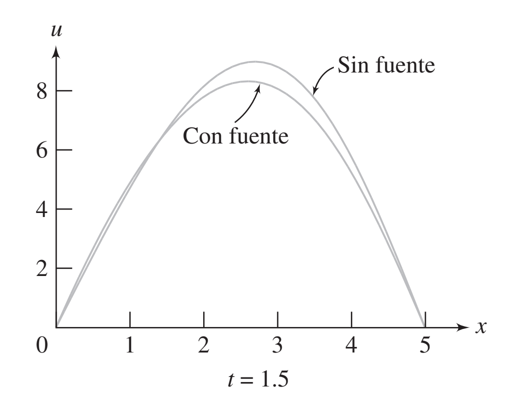


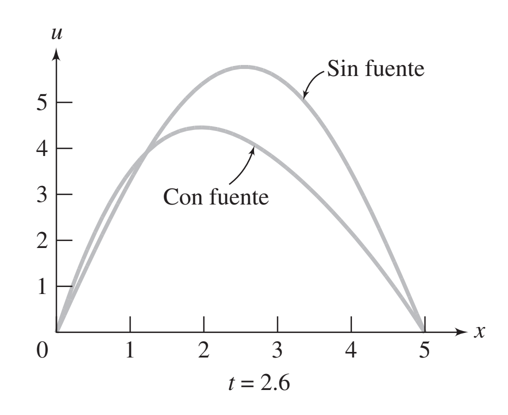


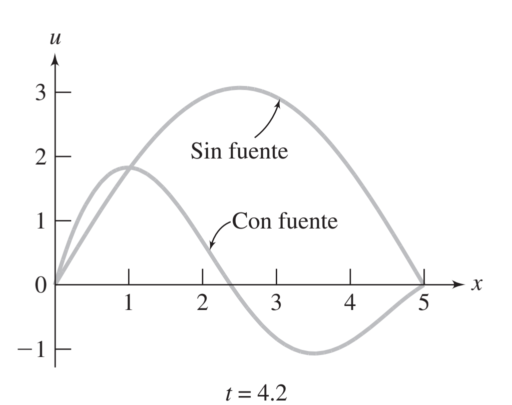


21. $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{50}{n^3\pi^3} \frac{1 - (\cos 5)\,(-1)^n}{n^2\pi^2 - 25} \left(-25 + n^2\pi^2 t + 25e^{-n^2\pi^2 t/25}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{5}\right)$
$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(-250\frac{4(-1)^n + 2}{n^3\pi^3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{5}\right) e^{-n^2\pi^2 t/25}$. Las gráficas comparan las soluciones con y sin el término fuente, para los tiempos $t = 0.7$, 1.5, 2.6 y 4.2.



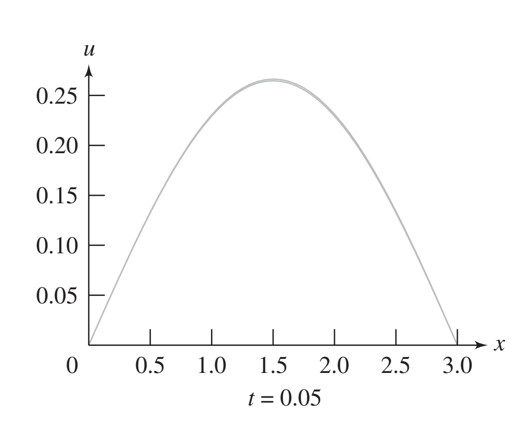


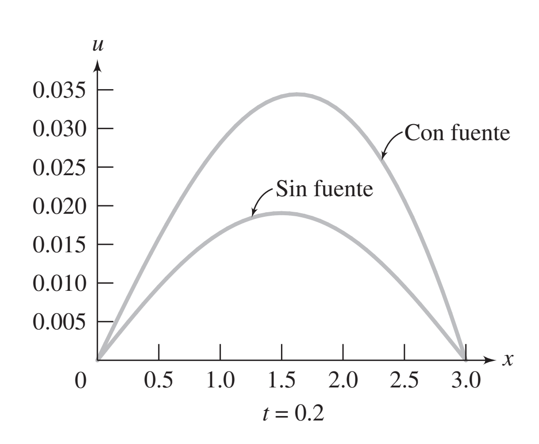




23. $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{27\,(-1)^{n+1}}{128}\left(\frac{16n^2\pi^2 t+9e^{-16n^2\pi^2 t/9}-9}{n^5\pi^5}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{3}\right)+2K\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{3}\right)e^{-16n^2\pi^2 t/9}.$

Las gráficas muestran la solución con y sin el término fuente, en los tiempos $t=0.05$ y 0.2, con $K=\frac{1}{2}$.





25. En lo subsiguiente, $j=1,2,\ldots,9$.
$u_{j,0}$: 0.009, 0.032, 0.063, 0.096, 0.125, 0.144
0.147. 0.128, 0.081
$u_{j,1}$: 0.0125, 0.034, 0.0635, 0.095, 0.1225
0.14, 0.1415, 0.121, 0.0725
$u_{j,2}$: 0.01475, 0.064125, 0.089, 0.094, 0.1195
0.136, 0.136, 0.114, 0.0665
$u_{j,3}$: 0.023381, 0.058, 0.084031, 0.099125, 0.11725
0.13188, 0.1305, 0.10763, 0.06175

27. En lo subsiguiente, $j=1,2,\ldots,9$.
$u_{j,0}$: 0.098769, 0.19021, 0.2673, 0.32361, 0.35355
0.35267, 0.31779, 0.24721, 0.14079
$u_{j,1}$: 0.096937, 0.18622, 0.26211, 0.31702, 0.34585
0.34417, 0.30887, 0.23825, 0.13220
$u_{j,2}$: 0.095124, 0.18307, 0.25697, 0.3105, 0.33822
0.33577, 0.30004, 0.22939, 0.12566
$u_{j,3}$: 0.09330, 0.17956, 0.25188, 0.30405, 0.33062
0.32745, 0.29131, 0.22112, 0.12018

Sección 6.3

1. $u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{8}{(16+\omega^2)}\cos(\omega x)e^{-\omega^2 kt}\,d\omega$

3. $$u(x,t)=\int_0^{\infty}\left[\left(\frac{8}{\pi}\cos(\omega)\frac{\cos^3(\omega)-\cos(\omega)+4\omega\operatorname{sen}(\omega)\cos^2(\omega)-2\omega\operatorname{sen}(\omega)}{\omega^2}\right)\cos(\omega x)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{4}{\pi}\frac{-2\operatorname{sen}(\omega)\cos^3(\omega)+\operatorname{sen}(\omega)\cos(\omega)+8\omega\cos^4(\omega)-8\omega\cos^2(\omega)+\omega}{\omega^2}\right)\operatorname{sen}(\omega x)\right]e^{-\omega^2 kt}\,d\omega$$

5. $u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}\operatorname{sen}(\omega x)e^{-\omega^2 kt}\,d\omega$

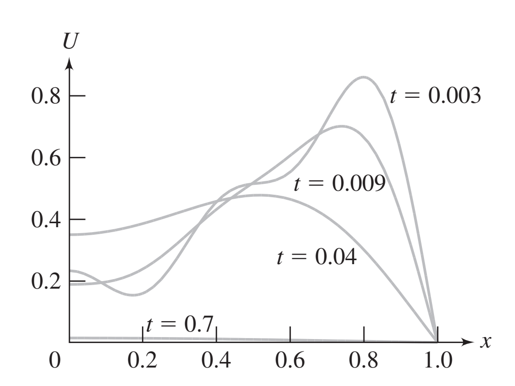
7. $u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos(h\omega)}{\omega}\operatorname{sen}(\omega x)e^{-\omega^2 kt}\,d\omega$

9. $u(x,t)=\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\omega}{(1+\omega^2)^2}\operatorname{sen}(\omega x)e^{-\omega^2 t}e^{-t^2/2}\,d\omega$

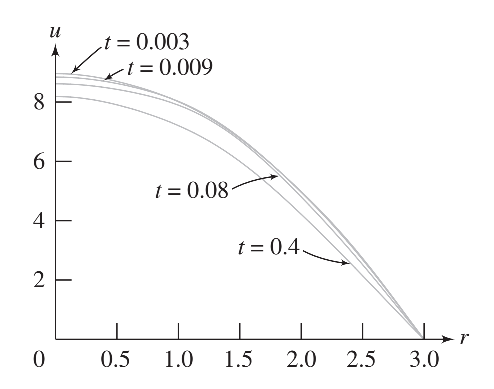
11. $u(x,t)=\int_0^{t}2(t-\tau)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{k\tau}}\right)d\tau$, en donde erfc es la función error complementaria.

Sección 6.4

1. $U(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{[J_1(j_n)]^2} \left(\int_0^1 \xi^2 J_0(j_n \xi)\, d\xi \right) J_0(j_n r) e^{-j_n^2 t}$; la quinta suma parcial, con valores aproximados insertados, es $U(r,t) \approx 0.8170 J_0(2.405r)e^{-5.785t} - 1.1394 J_0(5.520r)e^{-30.47t} + 0.7983 J_0(8.654r)e^{-74.89t} - 747 J_0(11.792r)e^{-139.04t} + 0.6315 J_0(14.931r)e^{-222.93t}$. Se muestra una gráfica de esta función para los tiempos $t = 0.003$, 0.009, 0.04 y 0.7.



3. $U(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{[J_1(j_n)]^2} \left(\int_0^1 \xi(9-\xi^2) J_0(j_n \xi)\, d\xi \right) J_0\left(\frac{j_n}{3} r\right) e^{-j_n^2 t/18}$; la quinta suma parcial, con valores aproximados insertados, es $U(r,t) \approx 9.9722 J_0(2.405r/3)e^{-5.78t/18} - 1.258 J_0(5.520r/3)e^{-30.47t/18} + 0.4093 J_0(8.654r/3)e^{-74.89t/18} - 0.1889 J_0(11.792r/3)e^{-139.04t/18} + 0.1048 J_0(14.931r/3)e^{-222.93t/18}$. Se muestra una gráfica de esta suma parcial para los tiempos $t = 0.003$, 0.009, 0.08, y 0.4.



Sección 6.5

1. $u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{K}\right) e^{-\beta_{nm} k t}$, donde $\beta_{nm} = \left(\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{K^2}\right)\pi^2$ y

$$\beta_{nm} = \frac{4}{LK} \int_0^K \int_0^L f(x,y) \operatorname{sen}(n\pi x/L) \operatorname{sen}(m\pi y/K)\, dx\, dy.$$

3. $u(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{8(-1)^{m+1} m}{(2m+1)^2(2m-1)^2} \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(my) e^{-(1+m^2)t}$.

CAPÍTULO 7

Sección 7.1

1. $\nabla^2(f+g) = (f+g)_{xx} + (f+g)_{yy} = (f_{xx} + f_{yy}) + (g_{xx} + g_{yy}) = \nabla^2 f + \nabla^2 g$ y $\nabla^2(\alpha f) = (\alpha f)_{xx} + (\alpha f)_{yy} = \alpha\left(f_{xx} + f_{yy}\right) = \alpha \nabla^2 f$.

3. Calcule $\frac{\partial}{\partial x}\ln(x^2+y^2) = \frac{2x}{x^2+y^2}$ y $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) = 2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$.
Similarmente, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) = 2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Entonces $\nabla^2\ln(x^2+y^2)=0$, siempre que $x^2+y^2\neq 0$.

5. Recuerde que, en coordenadas polares, la ecuación de Laplace es $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$. Es rutina verificar por sustitución que las funciones dadas son armónicas.

Sección 7.2

1. $u(x,y) = \frac{-1}{\operatorname{senh}(\pi^2)}\operatorname{sen}(\pi x)\operatorname{senh}(\pi(y-\pi))$

3. $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{32}{\pi^2\operatorname{senh}(4n\pi)}\frac{n(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\,(2n+1)^2}\operatorname{sen}(n\pi x)\operatorname{senh}(n\pi y)$

5. $u(x,y) = \frac{1}{\operatorname{senh}(\pi^2)}\operatorname{sen}(\pi x)\operatorname{senh}(\pi y) + \sum_{n=1,n\neq 2}^{\infty} 16n\frac{(-1)^n-1}{\pi^2(n-2)^2(n+2)}\frac{1}{\operatorname{senh}(n\pi^2/2)}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{2}\right)$
$+\frac{1}{\operatorname{senh}(2)}\operatorname{sen}(y)\operatorname{senh}(x)$

7. $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\right)\operatorname{senh}\left(\frac{(2n-1)\pi y}{2a}\right)$, donde $c_n =$
$\frac{2}{a\operatorname{senh}[(2n-1)\pi b/2a]}\int_0^a f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\right)dx$.

9. $u(x,y) = \frac{-1}{\operatorname{senh}(4\pi)}\operatorname{sen}(\pi y)\operatorname{senh}(\pi(x-4)) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\operatorname{senh}(4n\pi)}\left(2\frac{1-(-1)^n}{\pi^3 n^3}\right)\operatorname{sen}(n\pi y)\operatorname{senh}(n\pi x)$

Sección 7.3

1. $u(r,\theta)=1$ **3.** $u(r,\theta) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2}\right)^n 2(-1)^n\frac{1}{n^2}[2\cos(n\theta)+n\operatorname{sen}(n\theta)]$

5. $u(r,\theta) = \frac{1}{\pi}\operatorname{senh}(\pi) + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{4}\right)^n\frac{e^{-\pi}(-1)^n}{n^2+1}[-\cos(n\theta)-n\operatorname{sen}(n\theta)+e^{2\pi}\cos(n\theta)+e^{2\pi}n\operatorname{sen}(n\theta)]$

7. $u(r,\theta) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{8}\right)^n\left(\frac{2}{n^3}\right)[n^2\pi^2(-1)^n\operatorname{sen}(n\theta)-6(-1)^n\operatorname{sen}(n\theta)]$

9. En coordenadas polares, el problema es $\nabla^2 U(r,\theta)=0$ para $r<4$, $U(4,\theta)=16\cos^2(\theta)$. Ésta tiene solución $U(r,\theta)=8+r^2(\cos^2\theta-\frac{1}{2})$. En coordenadas rectangulares, la solución es $u(x,y)=\frac{1}{2}(x^2-y^2)+8$.

11. En coordenadas polares, la solución es $U(r,\theta)=r^2\left(2\cos^2\theta-1\right)$, entonces $u(x,y)=x^2-y^2$.

Sección 7.4

1. $u\left(\frac{1}{2},\pi\right)=\frac{3}{8\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\xi}{5/4-\cos(\xi-\pi)}d\xi = 9.8696/\pi$; $u\left(\frac{3}{4},\pi/3\right)\approx 4.813941647/\pi$, $u(0.2,\pi/4)\approx 8.843875590/\pi$

3. $u(4,\pi)\approx 155.25/\pi$, $u(12,3\pi/2)\approx 302/\pi$, $u(8,\pi/4)\approx 111.56/\pi$, $u(7,0)\approx 248.51/\pi$

5. Con $u(r,\theta)=r^n\operatorname{sen}(n\theta)$, calcule $u(R/2,\pi/2)=\frac{R^n}{2^n}\operatorname{sen}(n\pi/2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-R^2/4}{R^2+R^2/4-R^2\cos(\xi-\pi/2)}R^n\operatorname{sen}(n\xi)\,d\xi$.
Dividiendo entre las potencias comunes de R y resolviendo para la integral, obtiene $\frac{1}{2^n}\frac{2\pi}{3}\operatorname{sen}(n\pi/2)=\int_0^{2\pi}\frac{\operatorname{sen}(n\xi)}{5-4\operatorname{sen}(\xi)}d\xi$.

7. $\frac{\pi}{3(2^{n-1})}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{5-4\operatorname{sen}(\xi)}\cos(n\xi)\,d\xi\;\frac{\pi}{3(2^{n-1})}(-1)^n=\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+4\cos(\xi)}\cos(n\xi)\,d\xi$

Sección 7.5

1. $u(x, y) = \dfrac{1}{\pi}\left[\arctan\left(\dfrac{4-x}{y}\right) - \arctan\left(\dfrac{4+x}{y}\right)\right]$ para $-\infty < x < \infty,\ y > 0$

3. $u(x, y) = \dfrac{y}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{1}{y^2+(\xi-x)^2} - \frac{1}{y^2+(\xi+x)^2}\right) e^{-\xi}\cos(\xi)\,d\xi$

5. $u(x, y) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(\xi)\,\mathrm{sen}(\omega\xi)\,d\xi\right)\mathrm{sen}(\omega x)e^{-\omega y}d\omega + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty g(\xi)\,\mathrm{sen}(\omega\xi)\,d\xi\right)\mathrm{sen}(\omega y)e^{-\omega x}\,d\omega$

7. $u(x, y) = Be^{-y}\,\mathrm{sen}(x) + \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{2}{\pi}\frac{h}{n^3}\left(1-(-1)^n\right)\left(1-e^{-ny}\right)\mathrm{sen}(nx)$

9. Usando una transformada finita de Fourier en senos en x, obtenga $u(x, y) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \left[\left(-\frac{4}{n} + 6\frac{(-1)^n}{n}\right)e^{-ny} - 2\frac{(-1)^n}{n}\right]\mathrm{sen}(nx)$.

11. $u(x, y) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\omega}{1+\omega^2}\right)\mathrm{sen}(\omega y)e^{-\omega x}\,d\omega$

13. $u(x, y) = \dfrac{y}{\pi}\displaystyle\int_4^8 \frac{A}{y^2+(\xi-x)^2}\,d\xi = \frac{A}{\pi}\left[-\arctan\left(\frac{x-8}{y}\right) + \arctan\left(\frac{x-4}{y}\right)\right]$

Sección 7.6

1. $u(x, y, z) = \displaystyle\sum_{n=1}^\infty\sum_{m=1}^\infty \frac{4(-1)^{n+m}}{nm\pi^2\,\mathrm{senh}\left(\pi\sqrt{n^2+m^2}\right)}\,\mathrm{sen}(n\pi x)\,\mathrm{sen}(m\pi y)\,\mathrm{senh}(\pi\sqrt{n^2+m^2}z)$

3.
$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^\infty\sum_{m=1}^\infty \left[\frac{16}{\pi^2(2n-1)(2m-1)\,\mathrm{senh}(2\pi\sqrt{(2m-1)^2+\pi^2(2n-1)^2})}\right.$$
$$\left.\times\,\mathrm{sen}((2n-1)\pi x)\,\mathrm{sen}((2m-1)z)\,\mathrm{senh}(\sqrt{(2m-1)^2+\pi^2(2n-1)^2}y)\right]$$
$$+\sum_{n=1}^\infty\sum_{m=1}^\infty \left[\frac{16}{\pi^2(2n-1)(2m-1)}\frac{1}{\mathrm{senh}\left(\pi\sqrt{\dfrac{(2m-1)^2}{4}+\pi^2(2n-1)^2}\right)}\right.$$
$$\left.\times\,\mathrm{sen}((2n-1)\pi x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{(2m-1)y}{2}\right)\mathrm{senh}\left(\sqrt{\frac{(2m-1)^2}{4}+\pi^2(2n-1)^2z}\right)\right]$$

Sección 7.7

1.
$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(2n+1)A}{2}\left(\int_{-1}^1 (\arccos(\xi))^2 P_n(\xi)\,d\xi\right)\left(\frac{\rho}{R}\right)^n P_n(\cos(\varphi))$$
$$\approx 2.9348A - 3.7011A\left(\frac{\rho}{R}\right)P_1(\cos(\varphi)) + 1.1111A\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 P_2(\cos(\varphi))$$
$$-\ 0.5397A\left(\frac{\rho}{R}\right)^3 P_3(\cos(\varphi) + 0.3200A\left(\frac{\rho}{R}\right)^4 P_4(\cos(\varphi)) -\ 0.2120\left(\frac{\rho}{R}\right)^5 P_5(\cos(\varphi)) + \cdots$$

3.
$$u(\rho, \varphi) \approx 6.0784 - 9.8602\left(\frac{\rho}{R}\right)P_1(\cos(\varphi)) + 5.2360\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 P_2(\cos(\varphi))$$
$$-\ 2.4044\left(\frac{\rho}{R}\right)^3 P_3(\cos(\varphi)) + 1.5080\left(\frac{\rho}{R}\right)^4 P_4(\cos(\varphi)) - 0.9783\left(\frac{\rho}{R}\right)^5 P_5(\cos(\varphi)) + \cdots$$

5. $u(\rho, \varphi) = \dfrac{1}{R_2-R_1}(T_1R_1)\left[\dfrac{1}{\rho}R_2 - 1\right]$

7. $u(\rho,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}\rho^{2n-1}P_{2n-1}(\cos(\varphi))$, donde $a_{2n-1}=\dfrac{\int_0^1 AP_{2n-1}(x)\,dx}{R^{2n-1}\int_0^1 (P_{2n-1}(x))^2\,dx}=\dfrac{(4n-1)A}{R^{2n-1}}\int_0^1 P_{2n-1}(x)\,dx.$

9. $u(\rho,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}\rho^{2n-1}P_{2n-1}(\cos(\varphi))$, donde $a_{2n-1}=\dfrac{4n-1}{R^{2n-1}}\int_0^1 f(\arccos(x))P_{2n-1}(x)\,dx.$

Sección 7.8

1. Como $\int_0^1 4\cos(\pi x)\,dx = 0$, puede existir una solución. Encuentre $u(x,y) = \dfrac{4}{-\pi\,\operatorname{senh}(\pi)}\cos(\pi x)\cosh(\pi(1-$

3. Como $\int_0^{\pi}\cos(3x)\,dx=\int_0^{\pi}(6x-3\pi)\,dx=0$, puede existir una solución. Encuentre $u(x,y)=\dfrac{1}{-3\,\operatorname{senh}(3\pi)}\cos(3x)\cosh(3(\pi-$
$y))+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{12}{\pi}\dfrac{(-1)^n-1}{n^3\,\operatorname{senh}(n\pi)}\cos(nx)\cosh(ny)+C.$

5. $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\dfrac{n^2\pi^2(-1)^n+6(1-(-1)^n)}{n^4\pi^4\,\operatorname{senh}(\pi)}\right)\operatorname{sen}(n\pi y)\cosh(n\pi(1-x))$

7. $u(r,\theta)=\dfrac{1}{2}a_0+\dfrac{R}{2}\left(\dfrac{r}{R}\right)^2\left(2\cos^2\theta-1\right)$

9. $u(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln(y^2+(\xi-x)^2)e^{-|\xi|}\operatorname{sen}(\xi)\,d\xi+c$

11. $u(x,y)=\int_0^{\infty}a_\omega\cos(\omega x)e^{-\omega y}\,d\omega+c$, con $a_\omega=-\dfrac{2}{\pi\omega}\int_0^{\infty}f(\xi)\cos(\omega\xi)\,d\xi$

CAPÍTULO 8

Sección 8.1

1. $26-18$ **3.** $\frac{1}{65}(1+18i)$ **5.** $4+228i$ **7.** $6-i$ **9.** $\frac{1}{4225}(-1632+2024i)$

11. $i^{4n}=((i^2)^2)^n=1^n=1$; $i^{4n+1}=ii^{4n}=i$, como $i^{4n}=1$; $i^{4n+2}=i^{4n}(i^2)=-1$; $i^{4n+3}=i^{4n}i^2i=-i$

13. $a^2-b^2+b+1;\ 2ab-a$ **17.** $\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ **19.** $\pi-\tan^{-1}(\frac{2}{3})+2n\pi$ **21.** $\pi+2n\pi$

23. $2\sqrt{2}[\cos(3\pi/4)+i\,\operatorname{sen}(3\pi/4)]$ **25.** $\sqrt{29}\left[\cos(-\tan^{-1}(\frac{2}{5}))+i\,\operatorname{sen}(-\tan^{-1}(\frac{2}{5}))\right]$

27. $\sqrt{65}\left[\cos(\tan^{-1}(\frac{1}{8}))+i\,\operatorname{sen}(\tan^{-1}(\frac{1}{8}))\right]$

29. *Sugerencia:* Si $|z|=1$, entonces $z\bar{z}=1$ y $\left|\dfrac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|=\left|\dfrac{z-w}{z\bar{z}-w\bar{z}}\right|=\dfrac{1}{|\bar{z}|}\left|\dfrac{z-w}{z-w}\right|=1.$

Sección 8.2

1. Círculo de radio 9 con centro $(8,-4)$ **3.** Círculo de radio $\frac{1}{2}\sqrt{65}$ con centro $(0,-\frac{1}{2})$ **5.** El eje real para $x\le 0$

7. La recta $y=x+2$ **9.** La recta $8x+10y+27=0$ **11.** El semiplano $3x+y+2>0$

13. K es el semiplano cerrado $2x+8y+15\ge 0$; todo punto de K es un punto límite de K, y no hay otros puntos límite; los puntos frontera de K son aquellos puntos en la recta $2x+8y+15=0$; K es cerrado pero no compacto (ya que K no es acotado).

15. M consiste de todos los puntos que pertenecen a la recta $y=7$; los puntos límite son puntos de M y puntos en la recta $y=7$; los puntos frontera son $x+7i$; M es abierto; M no es compacto.

17. U consiste de todos los puntos $x+iy$ con $1<x\le 3$; los puntos límite son puntos de U y puntos en la recta $x=1$; los puntos frontera son puntos en las rectas $x=1$ y $x=3$; U no es abierto ni cerrado; U no es compacto (ni cerrado ni acotado).

19. W consiste de todo $x+iy$ con $x>y^2$. Estos son puntos (x,y) dentro y a la derecha de la parábola $x=y^2$. Este conjunto es abierto, y no compacto. Los puntos límite son todos puntos de W y puntos en la parábola; los puntos frontera son los puntos en la parábola.

21. $1+2i$ **23.** $2-i$ **25.** -1 **27.** $\frac{3}{2}i$

29. Si n es par, a saber $n=2m$, entonces $i^{2n}=i^{4m}=1$, de manera que $\{1\}$ es una subsucesión convergente; si $n=2m+1$, entonces $i^{2n}=i^{4m}i^2=i^2=-1$, así $\{-1\}$ es otra subsucesión convergente. Hay otras.

CAPÍTULO 9

Sección 9.1

1. $u = x$, $v = y - 1$; las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en todos los puntos; f es diferenciable para todo complejo z.

3. $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $v = 0$; en ninguna parte; en ninguna parte

5. $u = 0$, $v = x^2 + y^2$; las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en $(0, 0)$; en ninguna parte

7. $u = 1$, y/x; en ninguna parte; en ninguna parte **9.** $u = x^2 - y^2$, $v = -2xy$; $(0, 0)$; en ninguna parte

11. $u = -4x + \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $v = -4y - \dfrac{y}{x^2 + y^2}$; las ecuaciones de Cauchy-Rieman se satisfacen en todo z distinto de cero; diferenciable para $z \neq 0$

Sección 9.2

1. 2; $|z + 3i| < 2$ **3.** 1; $|z - 1 + 3i| < 1$ **5.** 2; $|z + 8i| < 2$ **7.** 1; $|z + 6 + 2i| < 1$

9. No; i está más cerca de $2i$ que de 0, de manera que si la serie convergiera a 0 tendría que converger a i.

11. c_{n+1}/c_n es 2 o $\frac{1}{2}$, dependiendo de si n es impar o par, de manera que c_{n+1}/c_n no tiene límite. Sin embargo, $\lim_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} = 1$, de manera que el radio de convergencia es 1 por el criterio de la n-ésima raíz aplicado a $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$.

Sección 9.3

1. $\cos(1) + i\,\text{sen}(1)$ **3.** $\cos(3)\cosh(2) - i\,\text{sen}(3)\,\text{senh}(2)$ **5.** $e^5\cos(2) + ie^5\,\text{sen}(2)$

7. $\frac{1}{2}[1 - \cos(2)\cosh(2)] + \frac{1}{2}i\,\text{sen}(2)\,\text{senh}(2)$ **9.** i **11.** $u = e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$, $v = e^{x^2-y^2}\,\text{sen}(2xy)$

13. $u = \dfrac{\text{sen}(x)\cos(x)}{\cos^2(x)\cosh^2(y) + \text{sen}^2(x)\,\text{senh}^2(y)}$, $v = \dfrac{\cosh(y)\,\text{senh}(y)}{\cos^2(x)\cosh^2(y) + \text{sen}^2(x)\,\text{senh}^2(y)}$

15. $\text{sen}^2(z) + \cos^2(z) = \left(\dfrac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}\right)^2 = 1$

17. $z = \ln(2) + i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$, n cualquier entero **19.** $z = \ln(2) + (2n + 1)\pi i$, n cualquier entero

Sección 9.4

1. $\ln(4) + \dfrac{4n - 1}{2}\pi i$, $\ln(4) + \dfrac{3}{2}\pi i$ **3.** $\ln(5) + (2n + 1)\pi i$, $\ln(5) + \pi i$

$+ [(2n + 1)\pi + \tan^{-1}(-\frac{2}{9})]i, \ln(\sqrt{85}) + [(\pi + \tan^{-1}(-\frac{2}{9}))i$

7. *Sugerencia:* en forma polar, $\dfrac{z}{w} = \left|\dfrac{z}{w}\right| e^{i(\arg(z) - \arg(w))}$.

Sección 9.5

1. $ie^{-(2n\pi+\pi/2)}$ **3.** $e^{-(2n\pi+\pi/2)}$ **5.** $e^{3(2n\pi+3\pi/4)}\left[\cos\left(\dfrac{3\ln(2)}{2}\right) - i\,\text{sen}\left(\dfrac{3\ln(2)}{2}\right)\right]$

7. $\cos\left(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{n\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ **9.** $16e^{(2n+1)\pi}[\cos(\ln(4)) - i\,\text{sen}(\ln(4))]$

11. $2\left[\cos\left(\dfrac{(2n + 1)\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{(2n + 1)\pi}{4}\right)\right]$ **13.** $\cos(n\pi/3) + i\,\text{sen}(n\pi/3)$

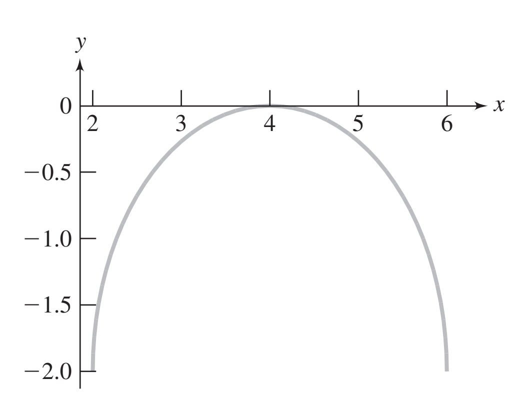
15. Las raíces n-ésima de la unidad son $\omega_k = e^{2k\pi i/n}$ para $k = 0, 1, \ldots, n - 1$. Ahora use el hecho que para $z \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \dfrac{z^n - 1}{z - 1}$, con $z = e^{2\pi i/n}$.

CAPÍTULO 10

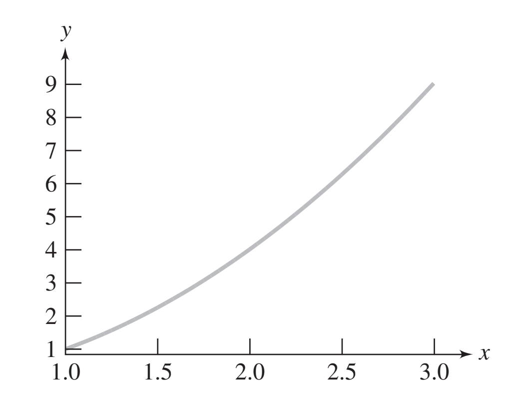
Sección 10.1

La gráfica de las curvas en los problemas 1, 3, 5, 7 y 9 se muestran abajo.

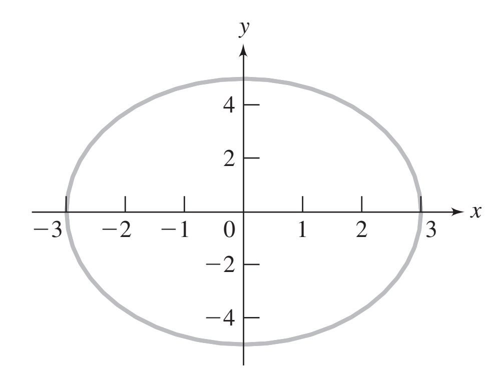
1. Punto inicial $6-2i$, punto terminal $2-2i$; simple y no cerrado; tangente $\Gamma'(t) = 2ie^{it} = -2\,\text{sen}(t)\mathbf{i} + 2\cos(t)\mathbf{j}$



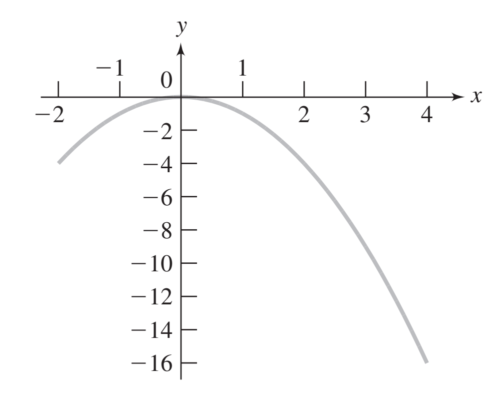
3. $1+i$, $3+9i$; simple y no cerrado; $\Gamma'(t) = 1 + 2ti = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$



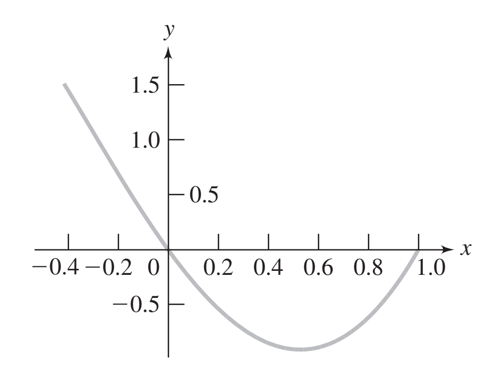
5. 3, 3; cerrado pero no simple; $\Theta'(t) = -3\,\text{sen}(t) + 5\cos(t)i = -3\,\text{sen}(t)\mathbf{i} + 5\cos(t)\mathbf{j}$



7. $-2-4i$, $4-16i$; simple y no cerrado; $\Psi'(t) = 1 - ti = \mathbf{i} - t\mathbf{j}$



9. 1, $\cos(2) - 2\,\text{sen}(4)i$; simple y no cerrado; $\Gamma'(t) = -\,\text{sen}(t) - 4\cos(2t)i = -\,\text{sen}(t)\mathbf{i} - 4\cos(2t)\mathbf{j}$



Sección 10.2

1. $8 - 2i$ **3.** $\frac{3}{2}(1+i)$ **5.** $\frac{1}{2}(-13+4i)$ **7.** $-\frac{1}{2}[\cosh(8) - \cosh(2)]$

9. $-\frac{1}{2}[e^{-1}(\cos(2) + i\,\text{sen}(2)) - e(\cos(2) - i\,\text{sen}(2))]$ **11.** $10 + 210i$ **13.** $\frac{25}{2}i$ **15.** $\frac{2}{3}(1+i)$

16. $1/\sqrt{z}$ (o cualquier número grande)

Sección 10.3

1. 0 **3.** 0 **5.** $2\pi i$ **7.** 0 **9.** 0 **11.** $4\pi i$

Sección 10.4

1. $32\pi i$ **3.** $2\pi i(-8+7i)$ **5.** $-2\pi e^2(\cos(1) - i\,\text{sen}(1))$ **7.** $\pi i(6\cos(12) - 36\,\text{sen}(12))$

9. $-512\pi(1-2i)\cos(256)$ **11.** $-\frac{13}{2} - 39i$ **13.** 2π

CAPÍTULO 11

Sección 11.1

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 2^{2n} z^{2n}$; $|z| < \infty$ (esto es, la serie converge para todo complejo z)

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-4i)^{n+1}}(z-4i)^n$; $|z-4i| < \sqrt{17}$ **5.** $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$; $|z| < 1$

7. $-3 + (1-2i)(z-2+i) + (z-2+i)^2$; $|z| < \infty$ **9.** $63 - 16i + (-16+2i)(z-1-i) + (z-1-i)^2$; $|z| < \infty$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+i)^{2n+1}$; $|z| < \infty$

13. $1 + iz + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n + 2^{n-1}}{(2n)!} z^{2n} + i\frac{2^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}\right)$; $|z| < \infty$

15. Fije z y piense en w como la variable. Defina $f(w) = e^{zw}$. Entonces $f^{(n)}(w) = z^n e^{zw}$. Por la fórmula integral de Cauchy, $f^{(n)}(0) = z^n = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{zw}}{w^{n+1}} dw$, con Γ el círculo unitario alrededor del origen. Entonces $\frac{z^n}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{zw}}{w^{n+1}}\,dw$, así $\left(\frac{z^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^n}{n!w^{n+1}} e^{zw}\,dw$. Entonces $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_\Gamma \frac{z^n}{n!w^{n+1}} e^{zw}\,dw =$
$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{z}{w}\right)n\right)\frac{e^{zw}}{w}\,dw =$
$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{z(w+1/w)}\frac{1}{w}\,dw$. Ahora sea $w = e^{i\theta}$ en Γ para obtener el resultado.

17. El máximo debe alcanzarse en un punto frontera del rectángulo. Considere cada lado. En el lado vertical izquierdo, $x = 0$ y $\left|e^z\right| = \left|e^{iy}\right| = 1$. En el lado vertical derecho, $\left|e^z\right| = e^1\left|e^{iy}\right| = e$ tiene máximo e. En el lado horizontal inferior, $\left|e^z\right| = e^x$ para $0 \le x \le 1$, con máximo e. En el lado horizontal superior, $\left|e^z\right| = e^x$ tiene máximo e. Así el máximo de $\left|e^z\right|$ en este rectángulo es e.

Sección 11.2

1. $\frac{1}{z-i} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}(z-i)^n$, para $0 < |z-i| < 2$ **3.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}4^n}{(2n)!} z^{2n-2}$; $|z| < \infty$

5. $-\frac{1}{z-1} - 2 - (z-1)$; $0 < |z-1| < \infty$ **7.** $\frac{1}{z^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(n+1)!}$; $0 < |z| < \infty$ **9.** $1 + \frac{2i}{z-i}$; $0 < |z-i| < \infty$

CAPÍTULO 12

Sección 12.1

1. Polo de orden 2 a $z = 0$ **3.** Singularidad esencial en $z = 0$ **5.** Polos simples en i y $-i$, polo de orden 2 en 1

7. Polo simple en $-i$, singularidad removible en i **9.** Polos simples en $1, -1, i$ y $-i$ **11.** Polos simples en $\frac{(2n+1)}{2}\pi$

13. f tiene desarrollo de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ en algún disco abierto alrededor de z_0 y g tiene un desarrollo de Laurent de la forma $g(z) = \frac{b_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ en algún anillo $0 < |z-z_0| < r$. Entonces fg tiene un desarrollo de la forma $\frac{b_{-1}a_0}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ en el anillo, y $b_{-1}a_0 \neq 0$ ya que $b_{-1} \neq 0$ y $a_0 = f(z_0) \neq 0$.

15. Escriba $h(z) = (z-z_0)^3 q(z)$, donde q es analítica en z_0 y $q(z_0) \neq 0$. Entonces $\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^3}\frac{g(z)}{q(z)}$ en algún anillo $0 < |z-z_0| < r$. Ahora g/q es analítica en z_0, y así tiene desarrollo de Taylor $g(z)/q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ en algún disco alrededor de z_0. Más aún, $c_0 \neq 0$ ya que $q(z_0) \neq 0$ y $g(z_0) \neq 0$. Entonces, en algún anillo alrededor de z_0, $\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{c_0}{(z-z_0)^3} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n-2}$.

Sección 12.2

1. El residuo en 1 es $\frac{1}{25}(16-12i)$, y en $-2i$, $\frac{1}{25}(9+12i)$; el valor de la integral es, por tanto $2\pi i$.

3. 0 **5.** $2\pi i$ **7.** $2\pi i$ **9.** $-\pi i/4$ **11.** 0 **13.** $2\pi i$ **15.** $\frac{\pi}{2}(e^{8i}-1)$

18. Escriba $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ y $h(z) = \sum_{n=3}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$, con $a_0 \neq 0$ y $b_3 \neq 0$. Del problema 23, sección 12.1, $\frac{g(z)}{h(z)} = \sum_{n=-3}^{\infty} d_n(z-z_0)^n$, con $d_{-3} \neq 0$. Escriba $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \left(\sum_{n=3}^{\infty} b_n(z-z_0)^n\right)\left(\sum_{n=-3}^{\infty} d_n(z-z_0)^n\right)$ e iguale el coeficiente de $(z-z_0)^n$ de la izquierda con el coeficiente de $(z-z_0)^n$ en el producto de la derecha. Obtiene $a_0 = d_{-3}b_3$, $a_1 = d_{-3}b_4 + d_{-2}b_3$, $a_2 = d_{-3}b_5 + d_{-2}b_4 + d_{-1}b_3$. Use esto y resuelva para d_{-1} en términos de los coeficientes $a_0, a_1, a_2, b_1, \ldots, b_4$ y use el hecho que $a_n = \frac{1}{n!}g^{(n)}(z_0)$, $b_n = \frac{1}{n!}h^{(n)}(z_0)$.

Sección 12.3

1. $2\pi i$ **3.** 0

5. $\cos(3t)$ **7.** $\frac{1}{36}e^{-4t} - \frac{1}{36}e^{2t} + \frac{1}{6}te^{2t}$ **9.** $\frac{1}{2}t^2e^{-5t}$

11. $2\pi/\sqrt{3}$ **13.** $2\pi/3$ **15.** $\frac{1}{4}\pi e^{-2\sqrt{2}}\operatorname{sen}(2\sqrt{2})$ **17.** $-\pi/128$ **19.** $\frac{\pi}{32}(1+5e^{-4})$

21. $-\frac{16\pi}{5}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{5}\right)\frac{17\cos(\pi/5)+16\cos(3\pi/5)}{289+168\cos(2\pi/5)+136\cos(4\pi/5)+32\cos(6\pi/5)}$

23. $\operatorname{Re}s(e^{i\alpha z}/(z^2+1), i) = -\frac{1}{2}ie^{-\alpha}$, así $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\alpha x)}{x^2+1}\,dx = 2\pi i\left(-\frac{1}{2}ie^{-\alpha}\right) = \pi e^{-\alpha}$.

25. Con las sustituciones trigonométricas obtendrá $-4i\int_{\Gamma}\frac{z}{(\alpha^2-\beta^2)z^2+2(\alpha^2+\beta^2)z+(\alpha^2-\beta^2)}\,dz$, con Γ el círculo unitario. Los dos polos dentro del disco unitario son $z = \pm\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}}$, y el residuo en cada uno es $-i/2\alpha\beta$. Por tanto, el valor de la integral es $2\pi i(-i/\alpha\beta)$, o $2\pi/\alpha\beta$.

27. Por el teorema de Cauchy, $\int_{\Gamma} e^{-z^2}\,dz = 0$, donde Γ es una trayectoria rectangular. Escriba la integral sobre cada pedazo de la frontera (empezando abajo y recorriéndola en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj), tendrá $\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx + \int_0^{\beta} e^{-(R+it)^2}i\,dt + \int_R^{-R} e^{-(x+\beta i)^2}\,dx + \int_{\beta}^{0} e^{-(-R+it)^2}i\,dt = 0$. Sea $R \to \infty$. La segunda integral es $e^{-R^2}\int_0^{\beta} e^{t^2}e^{-2iRt}\,dt$, y ésta tiende a cero conforme $R \to \infty$. Similarmente, la cuarta integral tiene límite cero. La primera y tercera integrales dan $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{\beta^2}e^{-2\beta ix}\,dx = 0$. Entonces $\sqrt{\pi} = e^{\beta^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2\beta x)\,dx + ie^{-\beta^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\operatorname{sen}(2\beta x)\,dx$. La última integral es cero ya que la integral es impar. Finalmente, escriba $\sqrt{\pi} = 2e^{\beta^2}\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos(2\beta x)\,dx$, ya que este integrando es par. Ahora resuelva la integral.

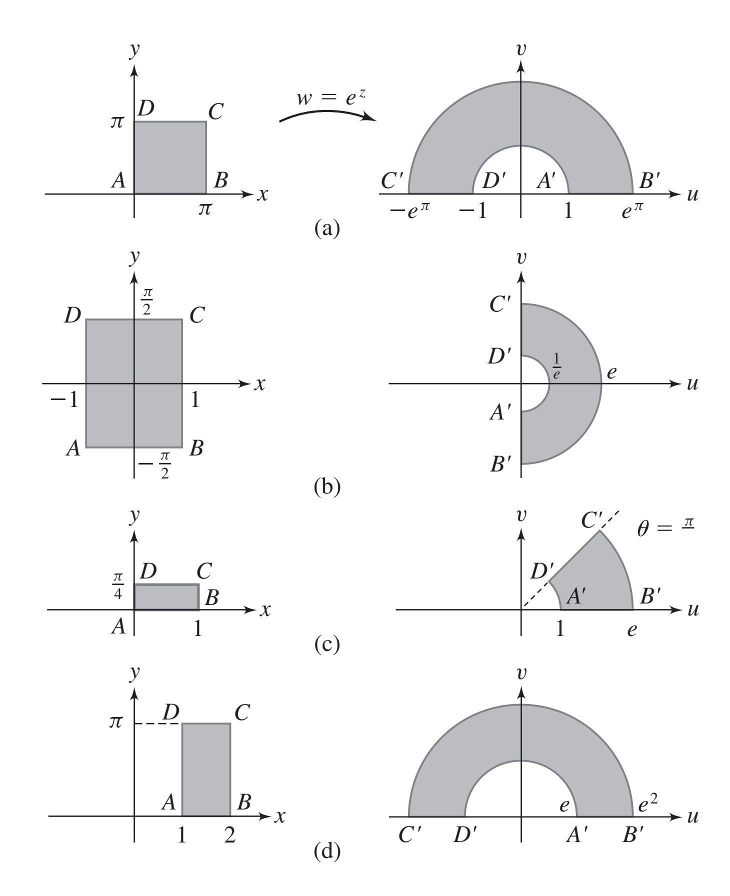
28. Por el teorema de Cauchy, $\int_\Gamma e^{iz^2}\,dz = 0$. Ahora integre sobre cada pedazo de Γ, recorriéndola en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y empezando con el segmento $[0, R]$: $\int_0^R e^{ix^2}\,dx + \int_0^{\pi/4} e^{iR^2e^{2i\xi}} Rie^{i\xi}\,d\xi + \int_R^0 e^{i(re^{i\pi/4})^2} e^{i\pi/4}\,dr = 0$. La segunda integral tiende a cero conforme $R \to \infty$, y en el límite la última ecuación se convierte en $\int_0^\infty [\cos(x^2) + i\,\mathrm{sen}(x^2)]\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\int_0^\infty e^{-r^2}\,dr = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Iguale la parte real de cada lado y la parte imaginaria de cada lado para evaluar las integrales de Fresnel.

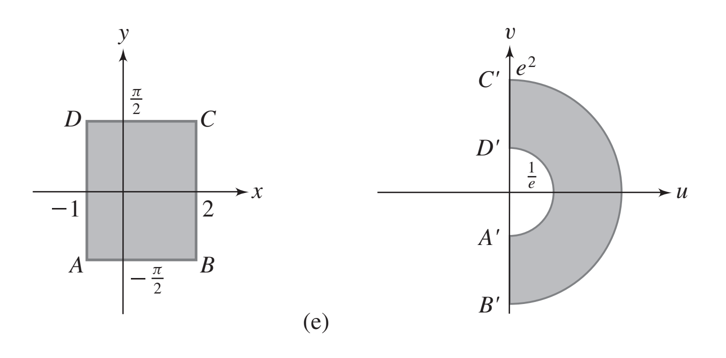
30. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(\alpha+\beta\cos(\theta))^2}\,d\theta = \int_\Gamma \frac{1}{\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)^2}\frac{1}{iz}\,dz = -4i\int_\Gamma \frac{z}{(\beta z^2 + 2\alpha z + \beta)^2}\,dz$. El integrando tiene polos dobles en $\frac{1}{\beta}\left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)$, pero solamente $\frac{1}{\beta}\left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)$ está encerrado por el círculo unitario Γ. Calcule $\mathrm{Re}\,s\left(\frac{-4iz}{(\beta z^2+2\alpha z+\beta)^2},\ \frac{1}{\beta}\left(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)\right) = -\frac{\alpha i}{(\alpha^2-\beta^2)^{3/2}}$. Entonces $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(\alpha+\beta\cos(\theta))^2}\,d\theta = \frac{2\pi\alpha}{(\alpha^2-\beta^2)^{3/2}}$. Finalmente, verifique que $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(\alpha+\beta\cos(\theta))^2}\,d\theta = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{(\alpha+\beta\cos(\theta))^2}\,d\theta$.

CAPÍTULO 13

Sección 13.1

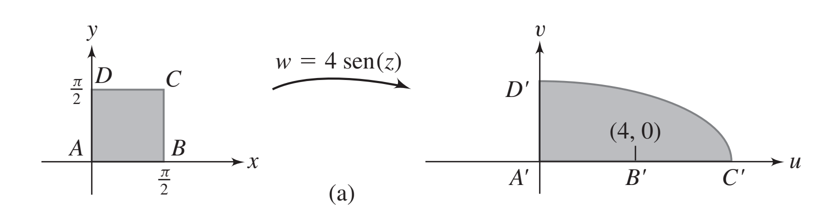
1. Las imágenes están dadas por los siguientes diagramas.



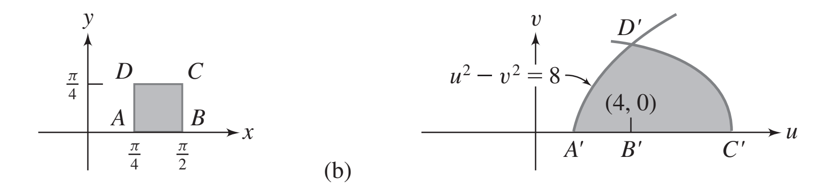


(e)

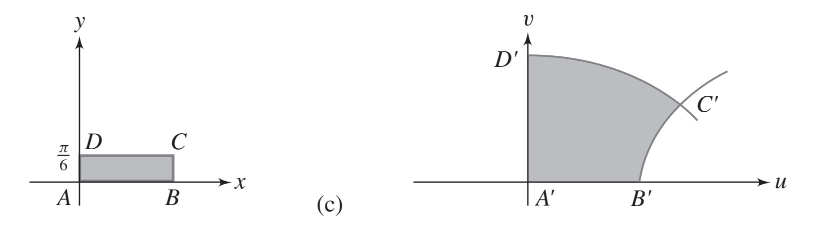
3. Las imágenes están dadas por los siguientes diagramas.



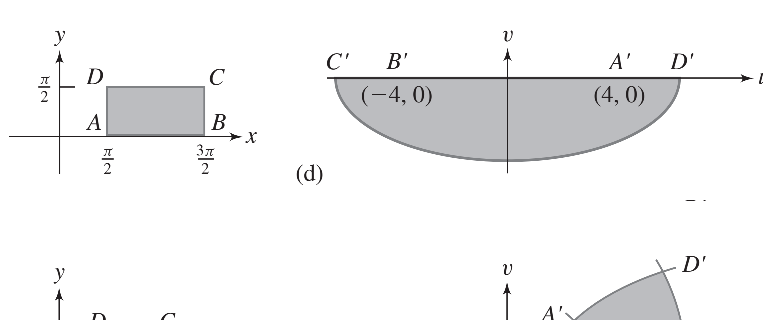
(a)



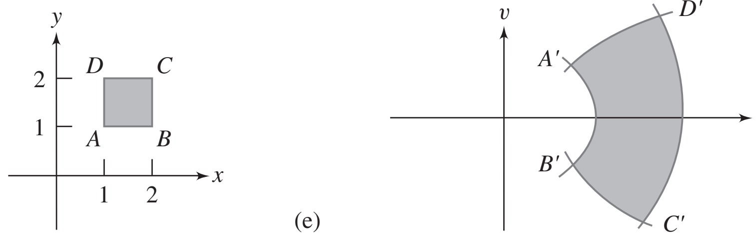
(b)



(c)



(d)



(e)

5. El sector que consiste de todo w con un argumento en $[\pi/2, \pi]$.

7. *Sugerencia:* Haga $z = re^{i\theta}$ y obtenga $u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos(k)$, $v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\text{sen}(k)$, donde se localiza la semirecta $\theta = k$.

9. Todo el plano w sin el origen.

Sección 13.2

1. $w = \dfrac{3 + 8i - (1 + 4i)z}{4 + 7i - (2 + 3i)z}$ **3.** $w = \dfrac{16 - 16i + (-7 + 13i)z}{4 - 8i + (-1 + 2i)z}$ **5.** $w = \dfrac{4 - 75i + (3 + 22i)z}{-21 + 4i + (2 + 3i)z}$

7. $v = 10$ **9.** $(u - \frac{11}{21})^2 + (v + \frac{1}{63})^2 = \frac{208}{3969}$ **11.** $(u - 1)^2 + (v + \frac{19}{4})^2 = \frac{377}{16}$

13. $w = \overline{z}$ invierte orientación.

15. Si $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$ y $ad - bc \neq 0$, entonces $z = -\dfrac{dw - b}{cw - a}$ también es una transformación lineal fraccional.

17. *Sugerencia:* Pruebe que $z = \dfrac{az + b}{cz + d}$ tiene una o dos soluciones, dependiendo de si c es o no cero. Una traslación no tiene punto fijo.

En cada uno de los problemas del 19 al 21, hay muchas soluciones, una de las cuales se da aquí.

19. $z \to \frac{1}{z} \to -4\frac{1}{z} \to -4\frac{1}{z} + i = w$ **21.** $z \to iz \to iz - (2 - 7i) = w$

Sección 13.3

En los problemas 1, 3 y 5, hay muchos mapeos que tienen la propiedad pedida. Se da uno de tales mapeos en cada caso.

1. $w = 2z + 1 - i$ **3.** $w = \dfrac{3z + 2 + 6i}{z + 2i}$ **5.** $w = \dfrac{-4i(z + 1)}{z - 1}$

7. $w = z^{1/3}$ **9.** Sugerencia: Evalúe $f(1), f(-1), f(0)$, y $f(\infty)$ y entonces use el resultado que $\int_0^1 t^{m-1}(1 - t)^{n-1}\, dt = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m + n)}$ para enteros positivos m y n.

Sección 13.4

1. $u(x, y) = \dfrac{y}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{(t - x)^2 + y^2}dt$, donde $u(x, 0) = g(x)$.

3.
$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x_0 + R\cos(t), y_0 + R\,\text{sen}(t)) \times \left[\frac{R^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}{R^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - 2R(x - x_0)\cos(t) - 2R(y - y_0)\,\text{sen}(t)}\right] dt$$

5.
$$u(r\cos(\theta), r\,\text{sen}(\theta)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[r\cos(t) - r\,\text{sen}(t)](1 - r^2)}{1 + r^2 - 2r\cos(t - \theta)}\, dt$$

7.
$$u(x, y) = \frac{1}{8}\int_{-1}^{1} \frac{(1 - |t|)\cos(\pi t/2)}{1 + \text{sen}^2(\pi t/2)} \times \left[\frac{4\,\text{senh}(\pi x/2)\cos(\pi y/2)[1 + \text{sen}^2(\pi t/2)] + \text{senh}(\pi x)\,\text{sen}(\pi y)[1 - \text{sen}(\pi t/2)]}{\text{senh}^2(\pi x/2) + \text{sen}^2(\pi y/2) - 2\cosh(\pi x/2)\,\text{sen}(\pi y/2)\,\text{sen}(\pi t/2) + \text{sen}^2(\pi t/2)}\right] dt$$

Sección 13.5

1. Con $a = Ke^{i\theta}$, las curvas equipotenciales son $\varphi(x, y) = K[x\cos(\theta) - y\,\text{sen}(\theta)] =$ constante. Estas son líneas de la forma $y = \cot(\theta)x + b$. Las líneas de corriente son $\psi(x, y) = K[y\cos(\theta) + x\,\text{sen}(\theta)] =$ constante, que son líneas $y = -\tan(\theta)x + b$. Velocidad $= \overline{f'(z)} = Ke^{-i\theta}$. No hay fuente o sumidero.

3. $\varphi(x, y) = \cos(x)\cosh(y)$, $\psi(x, y) = -\text{sen}(x)\,\text{senh}(y)$. Las curvas equipotenciales son las gráficas de $y = \cosh^{-1}(K/\cos(x))$, las líneas de corriente son gráficas de $y = \text{senh}^{-1}(C/\text{sen}(x))$.

5. $\varphi(x, y) = K\ln|z - z_0|$, $\psi(x, y) = K\arg(z - z_0)$. Las curvas equipotenciales son círculos $|z - z_0| = r$ y las líneas de corriente son rayos que emanan desde z_0; $\int_C -v dx + u dv = 2\pi K$, con C el círculo de radio r alrededor de z_0.

7. $f(z) = k\left[x + \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\left(y - \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)\right]$. Las curvas equipotenciales son las gráficas de $x + \dfrac{x}{x^2+y^2} = c$, las líneas de corriente son gráficas de $y - \dfrac{y}{x^2+y^2} = d$.

9. Las curvas equipotenciales son las gráficas de $K\left[x + \dfrac{x}{x^2+y^2}\right] - \dfrac{b}{2\pi}\arg(z) = c$. Las líneas de corriente son gráficas de $k\left[y - \dfrac{y}{x^2+y^2}\right] + \dfrac{b}{4\pi}\ln|z| = d$. Los puntos de estancamiento ocurrren donde $f'(z) = k\left(1 - \dfrac{1}{z^2}\right) + \dfrac{ib}{2\pi z} = 0$, o $z = -\dfrac{ib}{4k\pi} \pm \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{16\pi^2k^2}}$.

CAPÍTULO 14

Sección 14.1

1. $\begin{pmatrix} 14 & -2 & 6 \\ 10 & -5 & -6 \\ -26 & -43 & -8 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2+2x-x^2 & -12x+(1-x)(x+e^x+2\cos(x)) \\ 4+2x+2e^x+2xe^x & -22-2x+e^{2x}+2e^x\cos(x) \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} -36 & 0 & 68 & 196 & 20 \\ 128 & -40 & -36 & -8 & 72 \end{pmatrix}$

7. $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -10 & -34 & -16 & -30 & -14 \\ 10 & -2 & -11 & -8 & -45 \\ -5 & 1 & 15 & 61 & -63 \end{pmatrix}$, **BA** no está definido.

9. $\mathbf{AB} = (115)$ y $\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 3 & -18 & -6 & -42 & 66 \\ -2 & 12 & 4 & 28 & -44 \\ -6 & 36 & 12 & 84 & -132 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -24 & -8 & -56 & 88 \end{pmatrix}$

11. **AB** no está definido **BA** $= \begin{pmatrix} 410 & 36 & -56 & 227 \\ 17 & 253 & 40 & -1 \end{pmatrix}$

13. **AB** no está definido **BA** $= \begin{pmatrix} -16 & -13 & -5 \end{pmatrix}$

15. **BA** no está definido **AB** $= \begin{pmatrix} 39 & -84 & 21 \\ -23 & 38 & 3 \end{pmatrix}$

17. **AB** es 14×14, **BA** es 21×21
19. **AB** no está definido **BA** es 4×2
21. **AB** no está definido **BA** es 7×6
23. El número de caminos $v_1 - v_4$ de distancia 3 es 4, de distancia 4, 18. El número de caminos $v_2 - v_3$ de distancia 3 es 9. El número de caminos únicos $v_2 - v_4$ de distancia 4 es 26.
25. El número de caminos $v_4 - v_5$ de distancia 2 es 2, el número de caminos $v_2 - v_3$ de distancia 3 es 10, el número de caminos $v_1 - v_2$ de distancia 4 es 32, el número de caminos $v_4 - v_5$ de distancia 4 es 32.

27. Sea $\mathcal{M}_{nm}$ la configuración de toas las matrices reales $n \times m$. Sabemos que una suma de matrices y una multiplicación de una matriz $n \times m$ es un número real. Hay una matriz cero (todos su índices son cero), y la matriz $-\mathbf{A} = [\,a_{ij}]$ funciona como la suma inversa de $\mathbf{A}$. Además, para todo número real α y β,

$$(\alpha+\beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A},$$
$$(\alpha\beta)\mathbf{A} = \alpha(\beta\mathbf{A}), \quad \text{y}$$
$$\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}.$$

Entonces, $\mathcal{M}_{nm}$ tiene las propiedades algebráicas de un espacio vectorial. Si tomamos las filas de una matriz $n \times m$ y las ordenamos simplememente una tras otra, obtenemos el vector nm. Entonces, hay una relación uno a uno de las matrices en $\mathcal{M}_{nm}$ y de vectores en R^{nm}. Esto también nos sugiere la dimensión de $\mathcal{M}_{nm}$. Las matrices nm formadas al poner un elemento igual a 1 y todos los demás en cero es la base para $\mathcal{M}_{nm}$. Entonces, $\mathcal{M}_{nm}$ tiene la dimensión nm, al igual que R^{nm}.

Sección 14.2

1. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} & 16\sqrt{3} & 3\sqrt{3} \\ 1 & -2 & 4 & 8 \end{pmatrix}; \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 40 & 5 & -15 \\ -2+2\sqrt{13} & 14+9\sqrt{13} & 6+5\sqrt{13} \\ 2 & 9 & 5 \end{pmatrix}; \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 30 & 120 \\ -3+2\sqrt{3} & 15+8\sqrt{3} \end{pmatrix}; \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 15 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ -36 & 28 & -20 & 28 \\ -13 & 3 & 44 & 9 \end{pmatrix}; \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 14 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

9. Si $i \neq s$ y $i \neq t$,

$$\begin{aligned}(\mathbf{EA})_{ij} &= (\text{fila } i \text{ de } \mathbf{E}) \cdot (\text{columna } j \text{ de } \mathbf{A}) \\ &= (\mathbf{I}_n\mathbf{A})_{ij} = \mathbf{A}_{ij}.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}(\mathbf{EA})_{sj} &= (\text{fila } s \text{ de } \mathbf{E}) \cdot (\text{columna } j \text{ de } \mathbf{A}) \\ &= (\text{fila } t \text{ de } \mathbf{I}_n) \cdot (\text{columna } j \text{ de } \mathbf{A}) \\ &= \mathbf{A}_{tj} = \mathbf{B}_{sj}.\end{aligned}$$

Similarmente, $(\mathbf{EA})_{tj} = \mathbf{A}_{sj} = \mathbf{B}_{tj}$.

Sección 14.3

1. $\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \Omega = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. $\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -6 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. $\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\Omega = \frac{1}{270}\begin{pmatrix} -8 & -2 & 38 \\ 37 & 43 & -7 \\ 19 & -29 & 11 \end{pmatrix}$

9. $\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$; $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

11. $\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/7 & 2/7 & -3/7 \end{pmatrix}$

Sección 14.4

1. (a)

$$\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & 3/5 \end{pmatrix},$$

A tiene rango 2. (b) < −4, 1, 3 > y < 2, 2, 0 > forman la base del nuevo espacio de renglón. (c) Los vectores de columna

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

forman la base para el espacio de columna de **A**.

3. (a)

$$\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

rango (**A**) = 2. (b) Los vectores de fila < −3, 1 > y < 2, 2 > forman la base del nuevo espacio de renglón. El espacio de columna tiene una base conformada por

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

5. (a)

$$\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & -5/4 & 1/2 \end{pmatrix},$$

rango (**A**) = 2. (b) Los vectores de fila < 8, −4, 3, 2 > y < 1, −1, 1, 0 > forman la base del nuevo espacio de renglón. El espacio de columna tiene una base conformada por

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

7. (a)

$$\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

A tiene rango 3. (b) Los vectores de fila < 2, 2, 1 >, < 1, −1, 3 > y < 0, 0, 1 > forman la base del nuevo espacio de renglón. El espacio de columna tiene una base conformada por

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

9. (a)

$$\Omega_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

A tiene rango 3. (b) < 0, 4, 3 >, < 6, 1, 0 > y < 2, 2, 2 > forman la base del espacio de renglón de **A**. El espacio de columna tiene una base conformada por

$$\begin{pmatrix}0\\6\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}.$$

11.

$$\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

rango (**A**) = 3. (b) El espacio de fila tiene una base conformada por < −3, 2, 2 > y < 1, 0, 5 > . El espacio de columna tiene una base conformada por

$$\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix}.$$

13.

$$\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix}1 & 0 & -11\\0 & 1 & -3\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

A tiene rango 2. (b) < −2, 5, 7 > y < 0, 1, −3 > forman la base del espacio de renglón. El espacio de columna tiene una base conformada por

$$\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix}5\\1\\11\end{pmatrix}.$$

15.

$$\begin{aligned}\text{rango}(\mathbf{A}) &= \text{espacio tenue de fila de } \mathbf{A}\\ &= \text{espacio tenue de fila de A} = \text{Espacio tenue de fila de } \mathbf{A}^T\\ &= \text{rango}(\mathbf{A}^t)\end{aligned}$$

Sección 14.5

1.

$$\alpha\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

El espacio de solución tiene dimensión 2.

3.

$$\alpha\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

(solo la solución trivial). El espacio de solución tiene dimensión 0.

5.

$$\alpha\begin{pmatrix}-9/4\\-7/4\\-5/8\\13/8\\1\end{pmatrix}$$

El espacio de solución tiene dimensión 1.

7.

$$\alpha \begin{pmatrix} -5/6 \\ -2/3 \\ -8/3 \\ -2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -5/9 \\ -10/9 \\ -13/9 \\ -1/9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El espacio de solución tiene dimensión 2.

9.

$$\alpha \begin{pmatrix} 5/14 \\ 11/7 \\ 6/7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

El espacio de solución tiene dimensión 1.

11.

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ -3/2 \\ 2/3 \\ -4/3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El espacio de solución tiene dimensión 3.

13. Sí, si m − rango (**A**) > 0. Por ejemplo, el sistema

$$x_1 + 3x_2 = 0,\ 2x_1 + 6x_2 = 0,\ 3x_1 + 9x_3 = 0$$

tiene solución $x_1 = -3x_3,\ x_2 = x_3$ y el espacio de solución tiene dimensión 1.

Sección 14.6

1. Solución única

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3. $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -17/2 \\ -6 \\ -51/4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9/2 \\ 3 \\ 25/4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

5. $\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -9/2 \\ -3/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -38 \\ -11/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

7. $\alpha \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3/4 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9/8 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

9. $\alpha\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-3/14\\0\\3/14\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+\epsilon\begin{pmatrix}1/14\\0\\-1/14\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-29/7\\0\\1/7\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

11. $\alpha\begin{pmatrix}-19/15\\3\\67/15\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}22/15\\-5\\-121/15\\0\end{pmatrix}$

13. Solución única

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}16/57\\99/57\\23/57\end{pmatrix}$$

15. Si **AX** = **B** es consistente, entonces existe una solución **C**. Ya que **AC** es una combinación lineal de las columnas de **A**, así **B** es en el espacio de columna de **A**. Conversamente, si **B** está en el espacio de columna de **A**, entonces **B** es una combinación lineal

$$a_1A_1+\cdots+a_mA_m$$

de las columnas de A, y entonces **AC** = **B** donde **C** es la columna matrix de los coeficientes $a_1, \cdots, a_m$.

Sección 14.7

1. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1&2\\2&1\end{pmatrix}$

3. $\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-2&2\\1&5\end{pmatrix}$ **5.** $\frac{1}{12}\begin{pmatrix}3&-2\\-3&6\end{pmatrix}$

7. $\frac{1}{31}\begin{pmatrix}-6&11&2\\3&10&-1\\1&-7&10\end{pmatrix}$

9. $-\frac{1}{12}\begin{pmatrix}6&-6&0\\-3&-9&2\\3&-3&-2\end{pmatrix}$

11. $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}-1&-1&8&4\\-9&2&-5&14\\2&2&-5&3\\3&3&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-5\end{pmatrix}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}-23\\-75\\-9\\14\end{pmatrix}$

13. $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}22\\27\\30\end{pmatrix}$

15. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-21\\14\\0\end{pmatrix}$

Sección 14.8

1. $\mathbf{X}^*=\begin{pmatrix}13/5\\7/5\end{pmatrix}$

3. $\mathbf{X}^*=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

5. $\mathbf{X}^*=\alpha\begin{pmatrix}7/3\\1\\5/3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}$

7. $y=3.88x+0.16$ **9.** $y=4.164x-9.267$

Sección 14.9

1. $\mathbf{U}=\begin{pmatrix}2 & 4 & -6\\ 0 & -14 & 25\\ 0 & 0 & 136/7\end{pmatrix}$ y $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 0\\ -2 & -6/7 & 1\end{pmatrix}$

3. $\mathbf{U}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 12\\ 0 & -5 & 13\\ 0 & 0 & 119/5\end{pmatrix}$ y $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & -3/5 & 1\end{pmatrix}$

5. $\mathbf{U}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2 & -1 & 4\\ 0 & -5 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 88/5 & 4 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 195/22 & -691/44\end{pmatrix}$ y $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ -2 & -14/5 & 1 & 0\\ 4 & 14/5 & -63/88 & 1\end{pmatrix}$

7. Primero obtenga

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}4 & 4 & 2\\ 0 & -2 & 5/2\\ 0 & 0 & 21/4\end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{L}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1/4 & 1 & 0\\ 1/4 & -3/2 & 1\end{pmatrix}.$$

Resuelva

$$\mathbf{LY}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \text{ para obtener } \mathbf{Y}=\begin{pmatrix}1\\ -1/4\\ 3/8\end{pmatrix}.$$

Resuelva **UX** = **Y** para obtener

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}0\\ 3/14\\ 1/4\end{pmatrix}.$$

9.

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 6\\ 0 & 3 & 2 & 16\\ 0 & 0 & 17/3 & 52/3\end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{L}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & -1/3 & 1\end{pmatrix}.$$

Resuelva **LY** = **B** y luego **UX** = **Y** para obtener $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}2\\ 5\\ 29/3\end{pmatrix}$ y $\mathbf{X}=\alpha\begin{pmatrix}1\\ 28/3\\ 26/3\\ -17/6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -5/3\\ -1/3\\ 2/3\end{pmatrix}.$

11.

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}6 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 4/3 & 5/3 & 3\\ 0 & 0 & 13/4 & 13/4\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{L}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2/3 & 1 & 0 & 0\\ -2/3 & 5/4 & 1 & 0\\ 1/3 & -1 & 4/13 & 1\end{pmatrix}.$$

Resuelva **LY** = **B** y luego **UX** = **Y** para obtener $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}4\\ 28/3\\ -7\\ 43/13\end{pmatrix}$ y $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}-263/130\\ 537/65\\ -233/65\\ 93/65\end{pmatrix}.$

Sección 14.10

1. *T* es linear y T(1,0,0) = (3,1,0), T(0,1,0) = (0,−1,0), y T(0,0,1) = (0,0,2), entonces

$$\mathbf{A}_T=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

T está dentro y uno a uno porque A_T tiene rango 3 uno a uno. El espacio nulo de T tiene dimensión $m-\ \text{rank}\mathbf{A}_T=3-3=0$.

3. Nolienal (por el término $2xy$)

5. T es lineal y

$$\mathbf{A}_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

T está dentro pero no uno a uno; A_T tiene rango 3.

7. Nolienal por el término sen(xy).

9. T es no lineal (la imagen de la suma de dos vectores tiene un último componente 2).

CAPÍTULO 15

Sección 15.1

1. $|\mathbf{B}| = \alpha^n |\mathbf{A}|$

3. $|\mathbf{A}| = (-1)^n |\mathbf{A}^t| = (-1)^n |\mathbf{A}|$.

Porque $(-1)^n = -1$ si n es impar, luego $|\mathbf{A}| = -|\mathbf{A}|$, y $|\mathbf{A}| = 0$.

Sección 15.2

1. -22 **3.** -14 **5.** -2247 **7.** -122

9. 72

Sección 15.3

1. 32 **3.** 3 **5.** -773 **7.** -152

9. 1693

11.

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & \beta-\alpha & \beta^2-\alpha^2 \\ 0 & \gamma-\alpha & \gamma^2-\alpha^2 \end{vmatrix}$$

$$= (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & \beta+\alpha \\ 0 & 1 & \gamma+\alpha \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\begin{vmatrix} 1 & \beta+\alpha \\ 1 & \gamma+\alpha, \end{vmatrix}$$

Lo que lleva al valor $\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$.

Sección 15.4

1. $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. $\frac{1}{32}\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -8 & -24 & 24 \\ -2 & -14 & 6 \end{pmatrix}$

7. $\frac{1}{29}\begin{pmatrix} -1 & 25 & -21 \\ -8 & -3 & 6 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

9. $\frac{1}{378}\begin{pmatrix} 210 & -42 & 42 & 0 \\ 899 & -124 & 223 & -135 \\ 275 & -64 & 109 & -27 \\ -601 & 122 & -131 & 81 \end{pmatrix}$

Sección 15.5

1. $x_1 = -11/47, x_2 = -100/47,$ **3.** $x_1 = -1/2, x_2 = -19/22, x_3 = 2/11$
5. $x_1 = 5/6, x_2 = -10/3, x_3 = -5/6$ **7.** $x_1 = -86, x_2 = -109/2, x_3 = -43/2, x_4 = 37/2$
9. $x_1 = 33/93, x_2 = -409/33, x_3 = -1/93, x_4 = 116/93$

Sección 15.6

1.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

y el número de árboles que abarca es 21.

3. 61 **5.** 61

CAPÍTULO 16

Sección 16.1

1. $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 5;$ los eigenvalores y sus eigenvectores correspondientes son

$$1 + \sqrt{6}, \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 2 \end{pmatrix}; 1 - \sqrt{6}, \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ 2 \end{pmatrix}; 3.$$

Los círculos de Gerschgorin tienen radio 3 en torno a (1, 0) y radio 2 en torno a (1, 0).

3. $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 10;$

$$-5, \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}; \; 2, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El círculo de Gerschgorin tiene radio 1, centro en (2, 0).

5. $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 14;$

$$\frac{1}{2}(3 + \sqrt{47}i), \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{47}i \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}(3 - \sqrt{47}i), \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{47}i \\ 4 \end{pmatrix}$$

Los círculos de Gerschgorin tienen radio 3, centro (1, 0) y radio 2, centro (2, 0).

7. $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda,$

$$0, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \; 2, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \; 3, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

El círculo de Gerschgorin tiene radio 3, centro en (0, 0).

9. $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^3(\lambda + 3),$

$$0, 0, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; -3, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El círculo de Gerschgorin tiene radio 2, centro en (−3, 0).

11. $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda + 14)(\lambda - 2)^2,$

$$-14, \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; 2, 2, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El eigenvalor 2 de multiplicidad 2 no tiene dos eigenvectores linealmente independientes. Los círculos de Gerschgorin tienen radio 1, centro (−14, 0) y radio 1, centro (2, 0).

13. $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 8\lambda + 7)$,

$$0, \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}; 1, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}; 7, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los círculos de Gerschgorin tienen radio 2, centro (1, 0) y radio 5, centro (7, 0).

15. $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda^2 + \lambda - 13)$,

$$1, \begin{pmatrix} -2 \\ -11 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; 2, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$(-1 + \sqrt{53})/2, \begin{pmatrix} \sqrt{53} - 7 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; (-1 - \sqrt{53})/2, \begin{pmatrix} -\sqrt{53} - 7 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Los círculos de Gerschgorin tienen radio 2, centro (−4, 0) y radio 1, centro (3, 0).

17. $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda$,

$$0, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; 5, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

19. $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda - 23$,

$$5 + \sqrt{2}, \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}; 5 - \sqrt{2}, \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

21. $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda^2 + 2\lambda - 1)$,

$$3, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; -1 + \sqrt{2}, \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; -1 - \sqrt{2}, \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

23. Si $\mathbf{AE} = \lambda\mathbf{E}$, entonces

$$\mathbf{A}^2\mathbf{E} = \mathbf{A}(\mathbf{AE}) = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{E}) = \lambda\mathbf{AE} = \lambda^2\mathbf{E}.$$

La repetición de este argumento arroja la conclusión general $\mathbf{A}^k\mathbf{E} = \lambda^k\mathbf{E}$.

Sección 16.2

En los problemas 1 al 9, **P** está dado o se dice que la matriz no es diagonalizable.

1. $\begin{pmatrix} -3 + \sqrt{7}i & -3 - \sqrt{7}i \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$

3. No es diagonalizable (**A** no tiene don eigenvectores linealmente independientes)

5. $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

7. **A** no es diagonalizable

9. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (2 - 3\sqrt{5})/41 & (2 + 3\sqrt{5})/41 \\ 0 & 0 & (-1 + \sqrt{5})/2 & (-1 - \sqrt{5})/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

11. Como $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$, luego $\mathbf{A} = \mathbf{PAP}^{-1}$, entonces

$$\mathbf{A}^k = (\mathbf{PDP}^{-1})(\mathbf{PDP}^{-1}) \cdots (\mathbf{PDP}^{-1})$$
$$= \mathbf{PD}^k\mathbf{P}^{-1}.$$

13. $\mathbf{A}^{18} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (1-5^{18})/4 & 5^{18} \end{pmatrix}$

15. $\mathbf{A}^{43} = \begin{pmatrix} 0 & 2^{22} \\ 2^{21} & 0 \end{pmatrix}$

Sección 16.3

En los problemas 1 al 12, **Q** es una matriz ortogonal que diagonaliza la matriz dada.

1. $0, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; 5, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

3. $5+\sqrt{2}, \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}; 5-\sqrt{2}, \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})/(\sqrt{4+2\sqrt{2}}) & (1-\sqrt{2})/(\sqrt{4-2\sqrt{2}}) \\ 1/\sqrt{4+2\sqrt{2}} & 1/\sqrt{4-2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

5. $3, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; -1+\sqrt{2}, \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; -1-\sqrt{2}, \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & (1+\sqrt{2})/\sqrt{4+2\sqrt{2}} & (1-\sqrt{2})/\sqrt{4-2\sqrt{2}} \\ 0 & 1/\sqrt{4+2\sqrt{2}} & 1/\sqrt{4-2\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. $0, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; (5+\sqrt{41})/2, \begin{pmatrix} 5+\sqrt{41} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}; (5-\sqrt{41})/2, \begin{pmatrix} 5-\sqrt{41} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & (5+\sqrt{41})/\sqrt{82+10\sqrt{41}} & (5-\sqrt{41})/\sqrt{82-10\sqrt{41}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/\sqrt{82+10\sqrt{41}} & 4/\sqrt{82-10\sqrt{41}} \end{pmatrix}$$

9. $0, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; (1+\sqrt{17})/2, \begin{pmatrix} 0 \\ -1-\sqrt{17} \\ 4 \end{pmatrix}; (1-\sqrt{17})/2, \begin{pmatrix} 0 \\ -1-\sqrt{17} \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1-\sqrt{17})/\sqrt{34+2\sqrt{17}} & (-1+\sqrt{17})/\sqrt{34+2\sqrt{17}} \\ 0 & 4/\sqrt{34+2\sqrt{17}} & 4/\sqrt{34+2\sqrt{17}} \end{pmatrix}$$

11. 0 es un eigenvalor de multiplicidad 2, con eigenvectores independientes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-1, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; 3, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

13. No hermitiana, no antihermitiana, no unitaria; 2 es un eigenvalor repetifo y todos los eigenvectores son múltiplos escalares de

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz no es daigonalizable.

15. Antihermitiana;

$$0, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}; \sqrt{3}i, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3}i \\ -1-i \end{pmatrix}; -\sqrt{3}i, \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3}i \\ -1-i \end{pmatrix}$$

La matriz es daigonalizable por

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3}i & -\sqrt{3}i \\ 1+i & -1-i & -1-i \end{pmatrix}$$

17. Hermitiana; los eigenvalores y eigenvectores aproximados son

$$4.051374, \begin{pmatrix} 1 \\ 0.525687 \\ -0.129755i \end{pmatrix}; 0.482696, \begin{pmatrix} 1 \\ -1.258652 \\ 2.607546i \end{pmatrix}; -1.53407, \begin{pmatrix} 1 \\ -2.267035 \\ -1.477791i \end{pmatrix}$$

Utilice estos eigenvectores como columnas de **p**.

19. Antihermitiana; los aigenvalores y eigenvectores aproximados son

$$-2.164248i, \begin{pmatrix} -i \\ -3.164248 \\ 2.924109 \end{pmatrix}; 0.772866i, \begin{pmatrix} i \\ 0.227134 \\ 0.587771 \end{pmatrix}; 2.391382i, \begin{pmatrix} i \\ -1.391382 \\ -1.163664 \end{pmatrix}$$

Utilice estos eigenvectores como columnas de **P**.

21. Hermitiana

$$0, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}; 4+3\sqrt{2}, \begin{pmatrix} 4+3\sqrt{2} \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}; 4-3\sqrt{2}, \begin{pmatrix} 4-3\sqrt{2} \\ -1 \\ -i \end{pmatrix},$$

utilice estos eigenvectores como columnas de **P**.

23.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

y la forma estándar es

$$\left(\frac{5+\sqrt{153}}{2}\right) y_1^2 + \left(\frac{5-\sqrt{153}}{2}\right) y_2^2$$

25.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

y la forma estándar es

$$\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right) y_1^2 + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^2 y_2^2$$

27.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

y la forma estándar es $y_1^2 + 6y_2^2$

29. Si **A** es hermitiana, $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^t$, entonces

$$\begin{aligned} \overline{(\mathbf{A}\mathbf{A}^t)} &= \overline{\mathbf{A}(\mathbf{A}^t)} \\ &= \overline{\mathbf{A}}(\overline{\overline{\mathbf{A}}}) = (\overline{\mathbf{A}})\overline{\mathbf{A}}. \end{aligned}$$

31. Si $\mathbf{S}^t = -\overline{\mathbf{S}}$, entonces $s_{jj} = -\overline{s_{jj}}$. Ponga $s_{jj} = a_{jj} + ib_{jj}$. Luego $a_{jj} = -a_{jj}$, y $a_{jj} = 0$ y s_{jj} son puramente imaginarios.

Índice

A

C

D

E

F

G

I

L

M

N

O

P

U

V

Notas

Notas

Notación

Los siguientes símbolos y notación se utilizan a lo largo de este texto. Cada símbolo está acompañado con la sección en la que se define o se usa. Los símbolos usuales, como la notación para integrales y sumas no están incluidas.

$\mathcal{L}[f]$ transformada de Laplace de f (1.1)

$\mathcal{L}[f](s)$ transformada de Laplace de f evaluada en s (1.1)

$\mathcal{L}^{-1}[F]$ transformada inversa de Laplace de F

$H(t)$ función Heaviside (1.3.2)

$\delta(t)$ función delta de Dirac (1.5)

$f(x_0-), f(x_0+)$ límite izquierdo y derecho, respectivamente, de f en x_0 (2.3)

$f'_{\mathcal{L}}(x_0), f'_R(x_0)$ derivada izquierda y derecha, respectivamente, de f en x_0 (2.3.2)

$\mathfrak{F}[f]$ o $\hat{f}$ transformada de Fourier de f (3.3)

$\mathfrak{F}^{-1}[f]$ transformada inversa de Fourier de f (3.3)

$\mathfrak{F}_{ven}[f]$ transformada de Fourier ventaneada f (3.4.6)

$\mathfrak{F}_{ven,\, t_0}[f]$ transformada de Fourier ventaneada de f recorrida (3.4.6)

$\mathfrak{F}_C[f]$ o $\hat{f}_C(\omega)$ transformada de Fourier en cosenos de f (3.5)

$\mathfrak{F}_S[f]$ o $\hat{f}_S(\omega)$ transformada de Fourier en senos de f (3.5)

$\mathfrak{C}[f]$ o $\widetilde{f}_C(n)$ transformada finita de Fourier en coseno de f (3.6)

$\mathfrak{S}[f]$ o $\widetilde{f}_S(n)$ transformada finita de Fourier en seno de f (3.6)

$\mathbb{D}[u]$ transformada discreta de Fourier de N puntos (TDF) de $\{u_j\}$ (3.7)

$\sigma_N(t)$ en el contexto de las series de Fourier, denota la N-ésima suma de Cesàro de f (3.8.2)

$Z(t)$ en el contexto filtrado, denota una función filtro (3.8.2)

$L^2(R)$ espacio de funciones cuadrado integrables definidas en la recta real (3.8.2)

$P_n(x)$ n-ésimo polinomio de Legendre (4.1)

$T_n(x)$ n-ésimo polinomio de Chebyschev (4.4.1)

$L_n(x)$ n-ésimo polinomio de Laguerre (4.4.2)

$H_n(x)$ n-ésimo polinomio de Hermite (4.4.3)

$\Gamma(x)$ función gamma (4.2.1)

$J_n(x)$ función de Bessel de la primera clase de orden n (4.2.2)

$Y_n(x)$ función de Bessel de la segunda clase de orden n (4.2.3)

γ algunas veces se utiliza para denotar la constante de Euler (4.2.3)

$I_0(x), K_0(x)$ funciones de Bessel modificadas de primer y segunda clase, respectivamente, de orden cero (4.2.4)

$\chi_{[0,1]}$ función característica de [0, 1] (4.5.2)

$\sigma_{m,n}(t) = \psi(2^m t - n)$ funciones utilizadas para construir las onduletas de Haar (4.5.2)

$\psi_{m,n}(t)$ onduletas de Haar (4.5.2)

$\nabla^2(u)$ Laplaciano de u (7.1)

$\mathrm{Re}(z)$ parte real de z (8.1)

$\mathrm{Im}(z)$ parte imaginaria de z (8.1)

$\bar{z}$ complejo conjugado de z (8.1.2)

$|z|$ magnitud (módulo) de z (8.1.2)

$\arg(z)$ argumento de z (8.1.5)

$\int_\Gamma f(z)dz$ integral de una función compleja f sobre una curva Γ (10.2)

$\mathrm{Re}\, s(f, z_0)$ residuo de f en z_0 (12.2)

$f: D \to D^*$ f es un mapeo de D en D^* (13.1)

Notas

MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA INGENIERÍA Séptima edición

Peter V. O'neil

Esta séptima edición de **Matemáticas avanzadas para ingeniería** amplía las ediciones anteriores al mismo tiempo que conserva el orden ya clásico del volumen, con el ánimo de respetar el orden de planes de estudio que numerosos cursos han construido en torno a sus páginas a lo largo de los años. En sus páginas se hace un mayor énfasis en la construcción y análisis de modelos, en la utilización de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, de transformadas integrales y de funciones especiales.
Esta edición incluye tres capítulos completamente nuevos que abordan los siguentes temas: matrices, proyecciones ortogonales, mínimos cuadrados, aproximaciones de vectores y funciones, factorización LU, transformaciones lineales y representaciones de matrices. Estos nuevos capítulos, al mismo tiempo que ayudan a que el volumen siga siendo uno de los más consultados y referenciados en la materia, hacen que el libro cubra en un solo volumen todos los materiales que el estudiante de ingeniería puede llegar a necesitar en un curso de matemáticas avanzadas.

Fotografía de portada: shutterstock.com



Visite nuestro sitio en
http://latinoamerica.cengage.com

ISBN-13: 978-607-522-025-3
ISBN-10: 607-522-025-9

